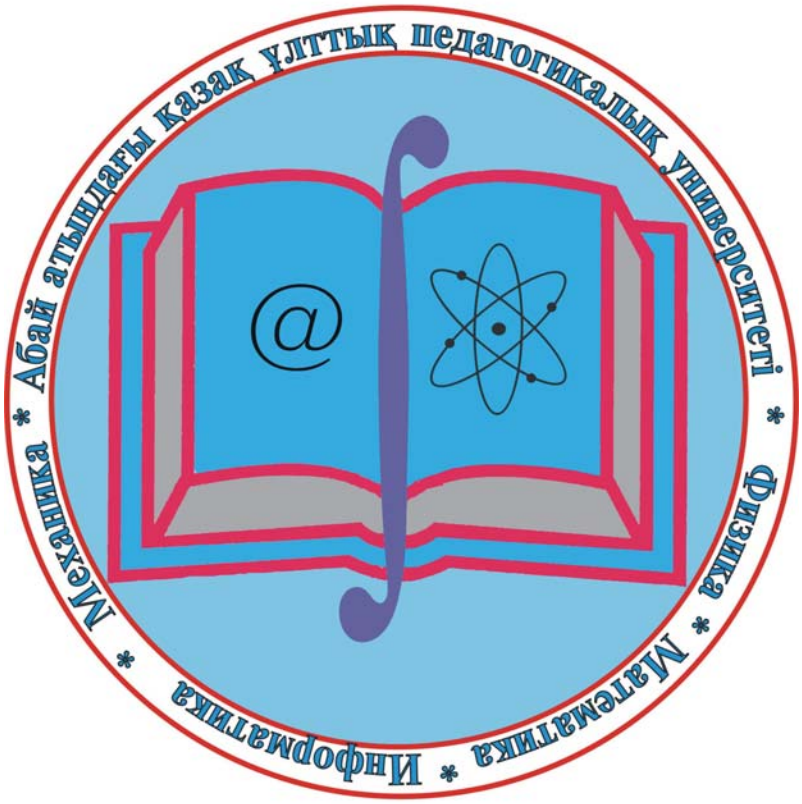
ISSN 1728-7901

Абай атындағы
Қазақ ұлттық педагогикалық университеті

Казахский национальный педагогический
университет имени Абая

ХАБАРШЫ
ВЕСТНИК



Серия «Физико-математические науки» • «Физика-математика ғылымдары» сериясы

№ 4(32)
2010

Алматы

Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті

ХАБАРШЫ

“Физика-математика ғылымдары” сериясы № 4 (32)

Бас редактор
ҚР ҰҒА *академигі*
Ғ.У. Уәлиев

***Редакция алқасы*:**
бас ред. орынбасарлары:
п.ғ.д. **Е.Ы. Бидайбеков,**
*ф.-м.ғ.к.***М.Ж. Бекпатшаев**
жауапты хатшы
ф.-м.ғ.к. **Ф.Р. Гусманова**
***мүшелері*:**
п.ғ.д. **А.Е. Абылкасымова,**
ф.-м.ғ.д. **М.Ә. Бектемесов,**
*п.ғ.д.***В.В. Гриншкун,**
ф.-м.ғ.д. **Қ.Т. Искаков,**
ф.-м.ғ.д. **С.И. Кабанихин,**
ф.-м.ғ.д. **А.К. Калыбаев,**
ф.-м.ғ.д. **В.Н. Косов,**
*ф.-м.ғ.д.***Қ.К. Коксалов,**
ф.-м.ғ.д. .**Б.Ә. Қожамқұлов,**
т.ғ.д. **М.К. Құлбек,**
п.ғ.д. **М.П. Лапчик,**
ф.-м.ғ.д. **Қ.М. Мұқашев,**
ф.-м.ғ.к. **С.Т. Мұхамбетжанов,**
ф.-м.ғ.д. **Ш.С. Сахаев,**
ф.-м.ғ.д. **Н.Ж. Такибаев,**
т.ғ.д. **А.К. Тулешов,**
ф.-м.ғ.д. **Л.М. Чечин,**
ф.-м.ғ.к. **Е.Б. Шалбаев,**
т.ғ.к. **Ш.И. Хамраев**

© **Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, 2010**

Қазақстан Республикасының Ақпарат министрлігінде тіркелген № 4824 – Ж - 15.03.2004
(Журнал бір жылда 4 рет шығады)
2000 жылдан бастап шығады

Редакторлары**: Ф.Р. Гусманова, Г.А. Абдулкаримова**

Компьютерлік беттеу:
Ф.Р. Гусманова

Басуға 23.12.2010 ж. қол қойылды
Таралымы 300 дана
Көлемі 7,5 е.б.т.
Пішімі 60х84 1/8.

050010, Алматы қаласы,
Достық даңғылы,13
Абай атындағы ҚазҰПУ
“ЖШС Нұр-Принт”типографиясында баспадан өткен
Алматы қаласы, Хамида көшесі, 4а

М а з м ұ н ы
С о д е р ж а н и е

Г.А. Абдулкаримова, Г. Амруллаева Способы оценивания уровня достижений учащихся при обучении элективным курсам 3
А.Н. Алимова Об одной задачи Дирихле для волнового уравнения 8
С.Н. Амиргалиева, М.Д. Кошанова Нелокальные по времени задач для уравнения типа С.Л.Соболева 12
М.А. Асқарова Сан теңсіздіктерін пайдаланып теңсіздіктерді дәлелдеу және теңсіздіктер мен теңдеулерді шешу әдістері .. 18
С.А. Атанбаев, А.А. Кожабекова Численный алгоритм определения температуры поверхности суши по данным дистанционного измерения 25
М.А. Бектемесов, А.Н. Алимова Задача Дирихле для волнового уравнения в двумерном пространстве 29
А. Бөлен, Ш.М. Бердиева Кубтық циклдық абсолют Абельдік өрістердің композиттерінің конструктивтік сипаттамалары және олардың кейбір қолданылулары 34
С.А. Джанабердиева, Ш. Абдураимова Тарихи мәліметтерді математика сабақтарында пайдалану 39
С.А. Джанабердиева, А.Ө. Ташкенбаева Тереңдетілген мектептерде математиканы оқытуда қызықты математиканың элементтерін пайдалану 44
А.А. Ерденеева Дискретный аналог оптимизационного метода определения диэлектрической проницаемости в обратной задаче геоэлектрики в случае линейного источника 48
А.А. Ерденеева Дискретный аналог оптимизационного метода определения проводимости в обратной задаче геоэлектрики 52
Б. Жакашбаев, С.А. Исаев Почти многопериодические решения систем уравнений в частных производных..... 56
Т.Т. Исмагамбетов О бинарной проблеме Гольдбаха и Эйлера 59
Т.Т. Исмагамбетов Теорема косинусов и загадка теоремы Ферма 63
Е.В. Ихсанов Численные исследования ограниченной задачи десяти тел в случае резонанса частот 3 – го порядка 68
G.A. Kaldybaeva, A.J. Satybaev Numerical definition of density in a dynamic problem of termo-elasticity 74
У.М. Кабылбекова Компьютерный анализ электрической модели процесса твердения бетонных изделий 78
Д.А. Кинжебаева, Д.К. Капарова, А.Г. Петренко, А.С. Кинжебаева Определение угловой скорости вала и тока якоря электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением с использованием программы Matlab 84
А.Т. Кулахметова Использование творческих заданий при формировании умений и навыков учебно-исследовательской деятельности учащихся..... 88
М.Қ. Құлбекұлы, Б. Ерженбек Монотермитті үлгілердегі физика-химиялық түрленулердің термографиясы мен термодинамикасы 93
М. Құлбекұлы, Б. Ерженбек, Э.А. Джаксигельдинова Физика-химиялық кебу барысындағы күрделі жылу тасымалдау үдерістерін есептеу тәжірибелері арқылы үлгілеп зерттеу 98

Казахский национальный педагогический университет имени Абая
ВЕСТНИК
Серия "Физико-математические науки" № 4 (32)

Главный редактор
академик НАН РК
Г.У. Уалиев

***Редакционная коллегия*:**
зам.главного редактора:
д.п.н. **Е.Ы. Бидайбеков,**
к.ф.-м.н. **М.Ж. Бекпатшаев,**
ответ.секретарь
к.ф.-м.н. **Ф.Р. Гусманова**
***члены*:**
д.п.н. **А.Е. Абылкасымова,**
д.ф.-м.н. **М.А. Бектемесов,**
д.п.н. **В.В. Гриншкун,**
д.ф.-м.н. **К.Т. Искаков,**
д.ф.-м.н. **С.И. Кабанихин,**
д.ф.-м.н. **А.К. Калыбаев,**
*д.ф.-м.н.***Б.А. Кожамкулов,**
д.ф.-м.н. **В.Н. Косов,**
д. ф.-м.н. **К.К. Коксалов**
д.т.н. **М.К. Кулбеков,**
д.п.н. **М.П. Лапчик,**
д.ф.-м.н. **Қ.М. Мукашев,**
к.ф.-м.н. **С.Т. Мухамбетжанов**
д.ф.-м.н. **Ш.С. Сахаев,**
д.ф.-м.н. **Н.Ж. Такибаев,**
д.т.н. **А.К. Тулешов,**
д.ф.-м.н. **Л.М. Чечин,**
к.ф.-м.н. **Е.Б. Шалбаев,**
к.т.н. **Ш.И. Хамраев**

© **Казахский национальный педагогический университет им. Абая, 2010**

Зарегистрировано в Министерстве информации Республики Казахстан, № 4824 - Ж - 15.03.2004
(периодичность - 4 номера в год)
Выходит с 2000 года

Редакторы**: Ф.Р. Гусманова,**
Г.А. Абдулкаримова

Компьютерная верстка:
Ф.Р. Гусманова

Подписано в печать 23.12.2010 г.
Формат 60x84 1/8.
Об 7,5 уч.-изд.л.
Тираж 300 экз.

050010, г.Алматы, пр.Достык, 13,
КазНПУ им.Абая
Отпечатано в типографии
"ТОО Нур-Принт 75"
г.Алматы, ул.Хамиди 4а

А.Ш. Нуразхан, А.Б. Закирова Виртуальные представительства в электронных информационно-коммуникационных технологиях в образовательной среде вуза 104
Ж.О. Оралбекова Дискретный аналог оптимизационного метода граничной задачи 110
Ж.О. Оралбекова Исследование граничной задачи по определению водонасыщенности 113
Т.Т. Оспанова, Д.У. Ашигалиев, Е.Н. Амиргалиев Математическая модель и алгоритм решения трехмерной задачи на основе локально-одномерной схемы 117
Л.Б. Рахимжанова, О.И. Курбанова, Д.Т. Турдиева Контроль знаний учащихся по линии формализация и моделирование в курсе информатики 122
В.Б. Рыстыгулова, Р.М. Муратханова, К.С. Шадинова, Ж.А. Кутелова, Р. Арекенов Готфрид Вильгельм Лейбниц – что мы знаем о нем? 127
Т.Х. Садыков Исследование потоков нейтронов на высоте гор 133
Т.Х. Садыков Исследование частиц космического излучения методом ионизационного калориметра и рентгеноэмульсионной камеры 137
Ә.Х. Сарыбаева Физика курсынан кредиттік оқыту жүйесінде электрондық оқулықты пайдаланудың жолдары ... 142
Selim Guvercin The effect of instruction with problem posing on the mathematical achievement 148
Ж.Н. Тасмамбетов, Р.У.Жахина Об условиях определения нормальных решений специальной системы в частных производных второго порядка 153
Ф.С. Телгожаева Применения оптимизационного метода в обратных задачах для уравнения теплопроводности 160
Ф.С. Телгожаева Условная устойчивость обратной коэффициентной задачи для гиперболо-параболического уравнения 164
З.Г. Уалиев, А.Г. Петренко, Д.А. Идрисова Анализ плоских рычажных механизмов на электронно высислительных машинах 168
К.С. Шадинова, Р.М. Муратханова, Ж.А. Кутелова, Ж. Танаткызы Диагностические параметры ультразвуковых колебаний в контексте с патологией организма 170
Б.Б. Шолпанбаев Прямая и обратная задача в двумерной постановке 173

УДК 372

Г.А. Абдулкаримова, Г. Амруллаева*

СПОСОБЫ ОЦЕНИВАНИЯ УРОВНЯ ДОСТИЖЕНИЙ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ ЭЛЕКТИВНЫМ КУРСАМ

(*г.Алматы, КазНПУ им.Абая, * - студент*)

Мақалада элективті курсты оқытуда оқушылардың жетістіктерін бағалау мәселесі қарастырылады. Оқу жетістіктерін бағалау жүйесінін құзырлылық тәсілі қарастырылады. Білім беру нәтижелерінде оқушылардың жетістіктерін тексеру формалары келтірілді. Оқушылардың білім сапасы мен жетістік деңгейлері сипатталады.

The article considers the estimation of the level of student achievement, in education elective courses. Considered competent approach to the evaluation system of educational achievements. Describes forms of educational test results, the characteristics of education quality and levels of student achievement.

Совершенствование общего среднего образования в настоящее время направлено на переориентацию процесса обучения - развитие личности ученика, и обучение его самостоятельно овладевать новыми знаниями. Современный молодой человек вынужден быть мобильным, информированным, критически и творчески мыслящим, а значит и более мотивирован к самообучению и саморазвитию.

Новый этап в развитии школьного образования связан с внедрением компетентностного подхода к формированию содержания и организации учебного процесса. В действующих учебных программах, разработанных на принципах компетентностного подхода разработано содержание предметов, основанное на результативную составляющую содержания. Определены обязательные результаты обучения: требования к знаниям, умениям учащихся, выражающиеся в различных видах учебной деятельности (ученик называет, приводит примеры, характеризует, определяет, распознает, анализирует, сравнивает, делает выводы и т.п.).

Компетентностного образование ориентировано на практические результаты, опыт личной деятельности, выработку отношений, что приводит к принципиальным изменениям в организации обучения, которое становится направленным на развитие конкретных ценностей и жизненно необходимых знаний и умений учащихся.

Внедрение компетентностного подхода предполагает обязательное прогнозирование результативной составляющей содержания, что требует адекватных изменений в системе оценивания знаний.

В контексте этого меняются и подходы к оценке результатов учебных достижений школьников как части учебного процесса. Оценивание должно основываться на положительном принципе, что, прежде всего, предполагает учет уровня достижений ученика, а не степени его неудач.

Результаты учебной деятельности учащихся на всех этапах школьного образования не могут ограничиваться знаниями, умениями, навыками. Целью обучения должны быть сформированные компетентности, как общая способность, основанная на знаниях, опыте и ценностях личности.

Компетентности не противоречат знаниям, умениям, навыкам, они предусматривают способность осмысленно их использовать. Совершенствование образовательного процесса с учетом компетентностного подхода заключается в том, чтобы научить учащихся применять полученные знания и умения в конкретных учебных и жизненных ситуациях.

Ученые выделяют трехуровневую иерархию компетенций. Предметные - формируются средствами учебных предметов. Межпредметные - относятся к группе предметов или образовательных областей. Компетентностный образование на предметном и межпредметных уровнях ориентирована на усвоение личностью конкретных учебных результатов - знаний, умений, навыков, формирование отношений, опыта, уровень усвоения которых позволяет ей действовать адекватно в определенных учебных и жизненных ситуациях.

Наиболее универсальными являются ключевые компетентности, которые формируются средствами межпредметного и предметного содержания. Перечень ключевых компетенций определяется на основе целей общего образования и основных видов деятельности учащихся, способствующие овладению социальным опытом, навыками жизни и практической деятельности в обществе.

Международное сообщество считает компетентностный подход действенным инструментом улучшения качества образования.

Совет Европы, проводя международные исследования, углубляя и развивая понятие компетенций, предлагает список ключевых компетенций, которыми должны обладать молодые европейцы: политические и социальные компетентности; компетентности, связанные с жизнью в многокультурном обществе; компетентности, касающиеся владения устным и письменным общением, компетентности, связанные с развитием информационного общества, способность учиться в течение жизни. Позже они были объединены в три основных направления: социальные, связанные с социальной деятельностью личности, жизнью общества; мотивационные, связанные с интересами, индивидуальным выбором личности; функнальные, связанные со сферой знаний, умением оперировать научными знаниями и фактическим материалом.

На основании международных выделены пять сквозных ключевых компетентностей:

Умение учиться - предусматривает формирование индивидуального опыта участия школьника в учебном процессе, умение, желание организовать свой труд для достижения успешного результата; овладение умениями и навыками саморазвития, самоанализа, самоконтроля и самооценки.

Здоровьесберегающая компетентность - связана с готовностью вести здоровый образ жизни в физической, социальной, психической и духовной сферах.

Общекультурная (коммуникативная) компетентность - предполагает овладение общением в сфере культурных, языковых, религиозных отношений, способность ценить важнейшие достижения национальной, европейской и мировой культур.

Социально-трудовая компетентность - связана с готовностью делать сознательный выбор, ориентироваться в проблемах современного общественно-политической жизни; овладение этикой гражданских отношений, навыками социальной активности, функциональной грамотности, умение организовать собственную трудовую и предпринимательскую деятельности; оценивать собственные профессиональные возможности, способность соотносить их с потребностями рынка труда.

Информационная компетентность - предполагает овладение новыми информационными технологиями, умениями отбирать, анализировать, оценивать информацию, систематизировать ее, использовать различные источники информации для собственного развития.

Компетентность как интегрированный результат индивидуальной учебной деятельности учащихся формируется на основе овладения ими смысловыми, процессуальными и мотивационными компонентами, его уровень оказывается в процессе оценки.

Основными функциями оценки знаний учащихся являются:

• контролирующая - определяет уровень достижений каждого учащегося, готовность к усвоению нового материала, что позволяет учителю соответственно планировать и излагать учебный материал;

• учебная - способствует повторению, уточнению и углублению знаний, их систематизации, углублению умений и навыков;

• диагностико-корректирующая - выясняет причины трудностей, возникающих у учащегося в процессе обучения; обнаруживает пробелы в усвоенному, вносит коррективы, направленные на их устранение;

• мотивационно -стимулирующая - формирует положительные мотивы учения;

• воспитательная - способствует формированию умений ответственно и сосредоточенно работать, применять приемы контроля и самоконтроля, рефлексии учебной деятельности.

Оценке подлежит в первую очередь уровень достижения учеником минимально необходимых результатов, обозначенных в целях и задачах элективного курса. Затем те направления и результаты деятельности учеников, которые определены в рабочей программе учителя и в индивидуальных образовательных программах учеников.

При оценке знаний учащихся должны учитываться:

• характеристики ответа ученика: правильность, логичность, обоснованность, целостность;

• качество знаний: полнота, глубина, гибкость, системность, прочность;

• сформированность общеучебных и предметных умений и навыков;

• уровень владения умственными операциями: умение анализировать, синтезировать, сравнивать, абстрагировать, классифицировать, обобщать, делать выводы и т.п.;

• опыт творческой деятельности (умение выявлять проблемы и решать их, формулировать гипотезы);

• самостоятельность оценочных суждений.

Характеристики качества знаний взаимосвязаны между собой и дополняют друг друга. Полнота знаний - количество знаний, определенных учебной программой. Глубина знаний - осознанность существующих связей между группами знаний. Гибкость знаний - умения учащихся применять полученные знания в стандартных и нестандартных ситуациях; находить вариативные способы использования знаний, умение комбинировать новый способ деятельности из уже известных.

Системность знаний - осознание структуры знаний, их иерархии и последовательности, т.е. осознание одних знаний как базовых для других. Прочность знаний - длительность сохранения их в памяти, воспроизведение их в необходимых ситуациях. Знание является составной умений учащихся действовать. Умение проявляются в различных видах деятельности и подразделяются на умственные и практические. Навыки - действия, доведенные до автоматизма в результате выполнения упражнений. Для сформированных навыков характерны быстрота и точность воспроизведения.

Ценностные отношения выражают личный опыт учащихся, их действия, переживания, чувства, которые проявляются в отношениях к окружающему (людей, явлений, природы, познания и т.д.). В контексте компетентностного образования это проявляется в ответственности учащихся, стремлении закреплять позитивные достижения в учебной деятельности, росте требований к своим знаний.

Названные выше ориентиры положен в основу четырех уровней знаний учащихся: начального, среднего, достаточного, высокого.

Они определяются по следующим характеристикам:

Первый уровень - начальный. Ответ учащегося фрагментарный, характеризуется начальными представлениями о предмете изучения. Второй уровень - средний. Ученик воспроизводит основной учебный материал, выполняет задания по образцу, обладает элементарными умениями учебной деятельности. Третий уровень - достаточный. Ученик знает существенные признаки понятий, явлений, связи между ними, умеет объяснить основные закономерности, а также самостоятельно применяет знания в стандартных ситуациях, обладает мыслительными операциями (анализом, абстрагированием, обобщением и т.д.), умеет делать выводы, исправлять допущенные ошибки. Ответ ученика правильный, логически обоснован, хотя учащемуся не хватает собственных суждений. Четвертый уровень - высокий. Знания являются глубокими, прочными, системными; учащийся умеет применять их для выполнения творческих заданий, его учебная деятельность отмечена умением самостоятельно оценивать различные ситуации, явления, факты, выявлять и отстаивать личную позицию.

Определение высокого уровня знаний предусматривает знания и умения в рамках учебной программы и не предусматривает участия школьников в олимпиадах, творческих конкурсах и т.д.

Каждый следующий уровень требований вбирает в себя требования к предыдущему, а также добавляет новые характеристики. Критерии оценки знаний реализуются в нормах оценок, устанавливающих четкое соотношение между требованиями к знаниям, умениям и навыкам, которые оцениваются, и показателем оценки в баллах. Видами оценки знаний учащихся является текущее, тематическое, семестровое, годовое оценивание и государственная итоговая аттестация.

Текущее оценивание - это процесс установления уровня знаний учащегося в овладении содержанием элективного курса, умениями и навыками в соответствии с требованиями учебных программ.

Объектом текущего оценивания уровня знаний учащихся являются знания, умения и навыки, самостоятельность оценочных суждений, опыт творческой деятельности и эмоционально-ценностного отношения к окружающей действительности. Текущее оценивание осуществляется в процессе поурочного изучения темы. Его основными задачами являются: установление и оценка уровней понимания и первичного усвоения отдельных элементов содержания темы, установление связей между ними и усвоенным содержанием предыдущих тем, закрепление знаний, умений и навыков.

Формами текущего оценивания является индивидуальный, групповой и фронтальный опрос, работа с диаграммами, графиками, схемами; зарисовки объектов; выполнение учащимися различных видов письменных работ; взаимоконтроль учащихся в парах и группах; самоконтроль т.д.

Проверка достигаемых образовательных результатов может производиться в следующих формах:

- текущий рефлексивный самоанализ, контроль и самооценка учащимися выполняемых заданий;
- взаимооценка учащимися работ друг друга или работ, выполненных в группах;
- публичная защита выполненных учащимися творческих работ (индивидуальных или групповых);
- текущая диагностика и оценка учителем деятельности школьников;
- итоговая оценка индивидуальной деятельности учащихся учителем, выполняемая в форме образовательной характеристики.

В условиях внедрения внешнего независимого оценивания особое значение приобретает тестовая форма контроля и оценки знаний учащихся. Информация, полученная на основании текущего контроля, является для корректировки работы

учителя на уроке. Тематическому оцениванию учебных достижений подлежат основные результаты изучения темы (раздела). Тематическое оценивание знаний учащихся обеспечивает:

• устранение бессистемности в оценке;

• повышение объективности оценки знаний, навыков и умений;

• индивидуальный и дифференцированный подход к организации обучения;

• анализ и обобщение учебного материала;

• концентрацию внимания учащихся к самому существенному в системе знаний по предмету.

Тематическая оценка выставляется на основании результатов изучения учащимися материала темы протяжении ее изучения с учетом текущих оценок, различных видов учебных работ (практических, лабораторных, самостоятельных, творческих, контрольных работ) и учебной активности школьников. Перед началом изучения очередной темы все ученики должны быть ознакомлены с продолжительностью изучения темы (количество занятий); количеством и тематикой обязательных работ и срокам их проведения; условиями оценивания. Оценка за семестр выставляется по результатам тематического оценивания, а за год - на основе семестровых оценок.

Более гибкой, разноплановой системы оценивания нуждается профильная старшая школа, на основе дифференцированного обучения должна учитывать не только учебные достижения, но и творческие, проектно-изыскательские, личностные, социально значимые результаты, умение решать проблемы, возникающие в различных жизненных ситуациях.

Наряду с другими формами оценки эффективной в старшей школе есть рейтинговая система, которая способствует формированию ключевых компетентностей и создает возможности для:

• повышения мотивации учащихся к самообучению и самооценки;

• расширения возможности в индивидуальной подготовленности учащихся на каждом этапе учебного процесса;

• повышения объективности оценки не только в течение учебного года, а за весь период обучения в старшей школе;

• градации значимости баллов, которые получают ученики за выполнение различных видов работ (самостоятельная работа, итоговая работа, творческая работа, олимпиады, выставки, конкурсы творческих работ, научно-исследовательские и художественные проекты, деятельность в органах ученического самоуправления, в социально-полезных проектах и т.п.).

Внедрение рейтинга учебных достижений предусматривает построение учащимися индивидуальной образовательной программы, которая позволит учителям и родителям учащихся анализировать их образовательный прогресс и его достижения, выявлять ошибки, а также регулировать формы и виды образовательной деятельности.

С целью оценки индивидуальных достижений учащихся в предпрофильной и профильной школе может быть использован метод оценки портфолио. Основная суть портфолио - «показать все, на что способен учащийся». Педагогическая идея портфолио предполагает смещение акцента с незнания учащихся на индивидуальные достижения, их активное участие в накоплении различных видов работ, которые удостоверяют движение в индивидуальном развитии, интеграцию количественных и качественных оценок, повышения роли самооценки.

Такая оценка предполагает определенную подготовку: определение критериев для включения ученических наработок в портфолио, формы представления материала,

спланированность оценочного процесса, элементы самооценки со стороны ученика и т.д.

В процессе обучения, в частности при оценке, учителю важно проявлять доброжелательность, требовательность сочетать с индивидуальным подходом, т.е. сравнивать обнаруженные достижения учащегося не только с нормой, а с его неудачами или успехами.

1. Сластенин В.А. и др. Педагогика: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов; Под ред. В.А. Сластенина. - М.: Издательский центр "Академия", 2002. - 576 с.
2. Программы профильных и прикладных элективных курсов общеобразовательных средних школ. Естественно-математическое направление. Часть2, Алматы, 2007.

УДК 517.946

А.Н. Алимова

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

(г. Алматы, КазНПУ имени Абая)

Мақалада толқын теңдеуі үшін бірөлшемді Дирихле есебі қарастырылады. Есеп операторлық түріне келтіріледі. Ландвебер әдісі қолданылады. Есептің сандық шешімінің нәтижелері келтірілді. Түсу параметрінің мәнінің және тордағы түйіндер санының артуымен байланысты толқын теңдеуінің сандық шешімінің нәтижелері итерацияның саны аз болғандағы дәл шешіміне жинақталады.

This article describes a one-dimensional Dirichlet problem for the wave equation. The problem is reduced to an operator form. Landweber method is used. The results of the numerical solution of the problem. It is shown that with increasing values of descent and the number of nodes in the grid the numerical solution of wave equation converge to the exact solution with fewer iterations.

Рассмотрим задачу Дирихле для гиперболического уравнения с данными на всей границе в области $[0,\pi]\times[0,T]$ [1,2] .

Постановка задачи

Требуется определить $u(x,t)$ из соотношений

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad x \in (0,\pi), \qquad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in (0,\pi) \tag{3}$$

$$u(x,T) = f(x), \qquad x \in (0,\pi) \tag{4}$$

Сведение задачи (1)-(4) к операторному уравнению.

Сначала определим прямую задачу:

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad x \in (0,\pi), \qquad t \in (0,T) \tag{5}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \tag{6}$$

$$u(x,0) = 0 \tag{7}$$

$$u_t(x,0) = q(x) \tag{8}$$

Прямая задача корректна[3-5]. Теперь предположим, что $q(x)$ неизвестна, но о решении прямой задачи (5)-(8) известна дополнительная информация

$$u(x,T) = f(x). \tag{9}$$

Значение Aq определяется следующим образом. Пусть $q \in L_2(0,\pi)$ решаем прямую задачу (5)-(8) и полагаем

$$Aq := f(x) := u(x,T).$$

Обратная задача (5)-(9) заключается в нахождении $q(x)$ из соотношении (5)-(9) по заданным $\varphi(x)$ и $f(x)$. Обратную задачу запишем в виде операторного уравнения.

$$Aq = f. \tag{10}$$

Введем функционал

$$J(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle = \int_0^\pi [\, u(x,T;q) - f(x) \,]^2 dx. \tag{11}$$

Приближенное решение будем искать методом итераций Ландвебера

$$q_{n+1}(x) = q_n(x) - \alpha J' q_n, \tag{12}$$

где $\alpha \in (0, \|A\|^{-2})$.

В работе [6] было показано, что

$$(J'q)(x) = -\psi(x,0) \tag{13}$$

где $\psi(x,t)$ есть решение сопряженной задачи

$$\begin{cases} \psi_{tt} = \psi_{xx}, & (14) \\ \psi(0,t) = \psi(\pi,t) = 0 & (15) \\ \psi(x,T) = 0 & (16) \\ \psi_t(x,T) = 2[u(x,T;q) - f(x)] & (17) \end{cases}$$

Ниже приведем результаты серии численных экспериментов, по решению обратной задачи с различными параметрами.

Результаты численных расчетов

1 эксперимент.

Расчеты проводились при следующих параметрах: $T = \frac{3}{4}\pi$, $n = 10$, $h = \frac{\pi}{n}$, $\alpha = 0{,}01$, функция $q(x) = \sin 3x$

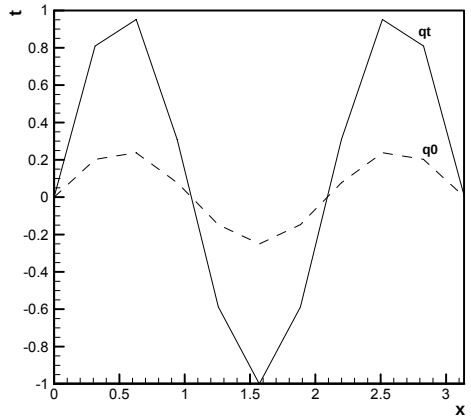


График 1.
qt - точное решение, q0 - приближенное решение, число итераций - 1000, время счета – 8 секунд

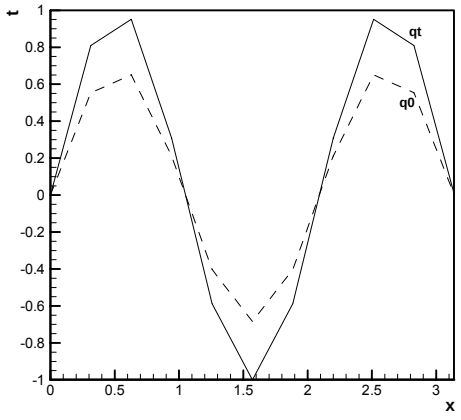


График 2.
qt - точное решение, q0 - приближенное решение, число итераций - 4000, время счета – 8 секунд

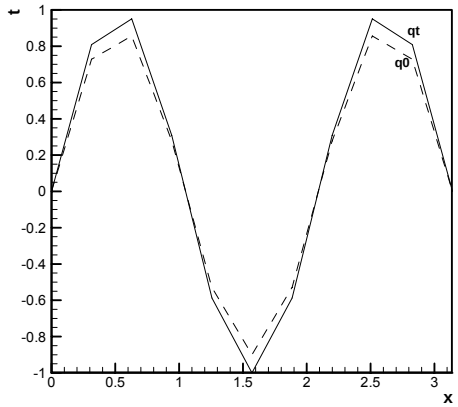


График 3.
qt - точное решение, q0 - приближенное решение, число итераций - 8000, время счета – 15 секунд

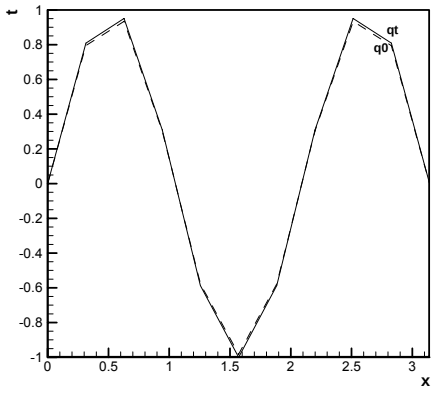


График 4.
qt - точное решение, q0 - приближенное решение, число итераций – 14000, время счета – 17 секунд

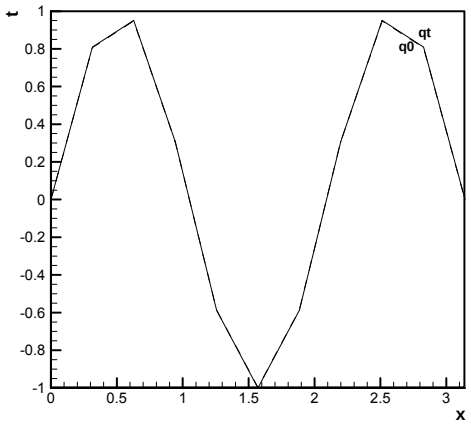


График 5.
qt - точное решение, q0 - приближенное решение, число итераций – 20000, время счета – 22 секунды

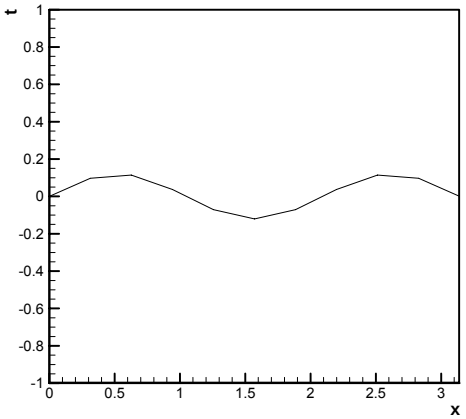


График 6.
$f(x) = u(x,T)$ *след функции*

2 эксперимент.

При $n = 100$ функция более гладкая и сходимость итерационного процесса сходится за меньшее количество итерации, приведенные на графиках (7-10).

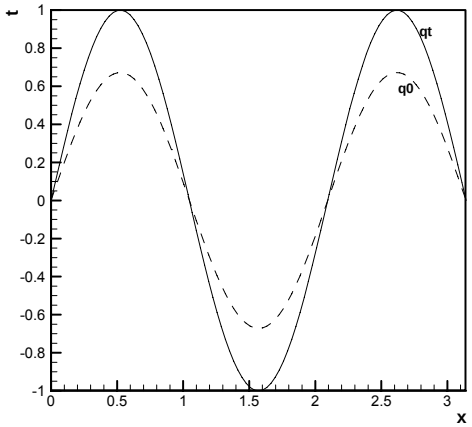


График 7.
qt - точное решение, q0 - приближенное решение, число итераций - 1000, время счета – 1 минута 25 секунд

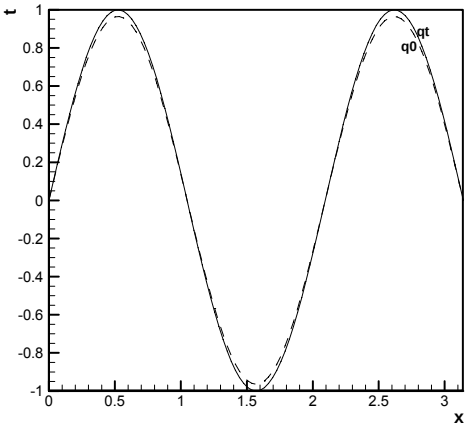


График 8.
qt - точное решение, q0 - приближенное решение, число итераций - 3000, время счета – 4 минуты 27 секунд

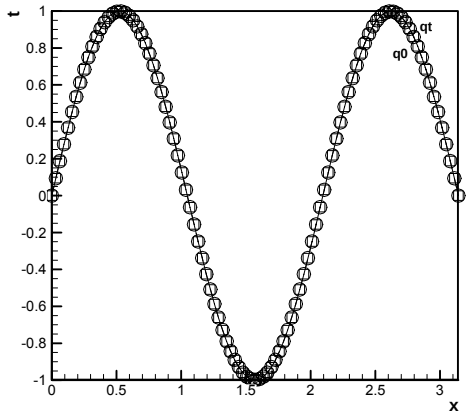


График 9.
qt - точное решение, $q0$ - приближенное решение, число итераций - 6000, время счета – 8 минут 30 секунд

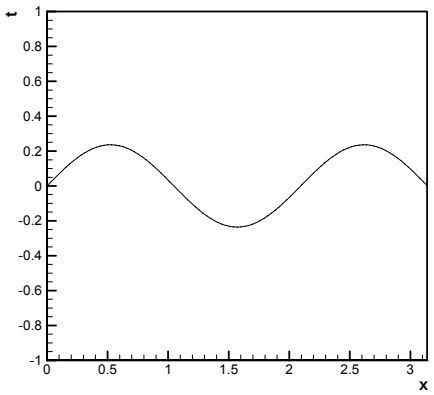


График 10.
$f(x) = u(x,T)$ след функции

Эксперимент 3.

Если параметр спуска $\alpha = 0{,}01$ изменить $\alpha = 0{,}1$ и $\alpha = 0{,}5$ то сходимость за меньшее количество итераций и затрачено меньше времени.

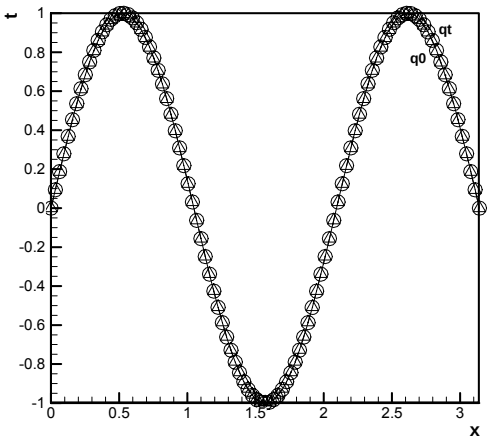


График 11.
qt - точное решение, $q0$ - приближенное решение, число итераций - 500, время счета – 42 секунд
$\alpha = 0{,}1$

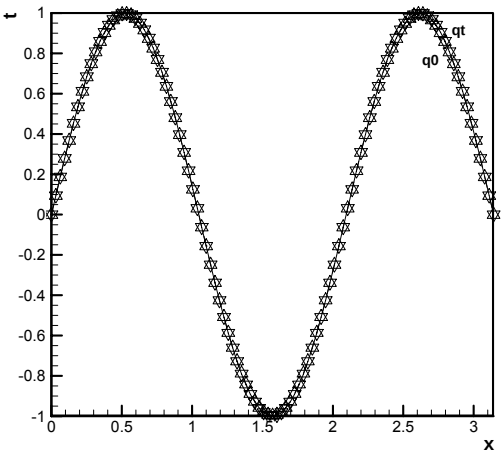


График 12.
qt - точное решение, $q0$ - приближенное решение, число итераций - 100, время счета – 12 секунд
$\alpha = 0{,}5$

В результате работы можно сделать следующие выводы:

- с увеличением количества узлов сетки, точность приближенного решения растет
- с увеличением количества узлов сетки, уменьшается количество итераций, т.е. решение сходится быстрее
- при увеличении параметра спуска скорость сходимости также растет.

1. Бурский В.П. Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка, 2002.
2. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наукова думка, 1984.

3. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, Сибирское Научное издательство, 2009, 457с.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М. «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1988, 512с.
5. Тихонов А.Н., Самарский А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1972.
6. Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Алимова А.Н. Итерационный метод решения задачи Дирихле для волнового уравнения. // Вестник КазНПУ серия «Физико-математические науки» 2010 г., № 1 (29).

УДК 517.9

С.Н. Амиргалиева, М.Д. Кошанова

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА С.Л.СОБОЛЕВА

(г.Алматы, КБТУ, г.Шымкент, МКТУ им. А. Яссауи)

Мақалада С.Л. Соболев типтес теңдеудің уақыт бойынша локальді емес есебі қарастырылады. Есептің спектралдық қасиеттері мен шешімнің кейбір айрықшалықтары алынды. Дәлелдеуі бүтін функциялар теориясының әдістеріне негізделген.

The linear non local problem for the heat-conducting equation is studied. Is received criterion of uniqueness of the decision. The proof is based on methods of the theory of the integer functions.

Изучается линейная нелокальная задача для уравнения типа С.Л. Соболева. Получены спектральные свойства задачи и некоторые качественные особенности решения. Доказательство основывается на методах теории целых функций.

Фиксируем $0 < c < b < \infty$. Рассмотрим в $L_2[0,c]$ и $L_2[c,b]$ два формально самосопряженных дифференциальных выражения

$$l^-(y) = \left(p_0^- y^{(\mu)}(x)\right)^{(\mu^-)} \left(p_1^- y^{(\mu^- -1)}(x)\right)^{(\mu^- -1)} + \ldots + \left(p_{\mu^- -1}^- y'(x)\right)' + p_{\mu^-}^- \cdot y(x),$$

и

$$l^+(y) = \left(p_0^+ y^{(\mu^+)}(x)\right)^{(\mu+)} \left(p_1^+ y^{(\mu^+ -1)}(x)\right)^{(\mu^+ -1)} + \ldots + \left(p_{\mu^+ -1}^+ y'(x)\right)' + p_{\mu+}^+ \cdot y(x),$$

где $p_{\mu^\pm}^\pm, \ldots, p_0^\pm$ - вещественнозначные достаточное число раз дифференцируемые на $I^\pm$ функции, $\mu^\pm$ - натуральные числа, $I^- = [0;c]$, $I^+ = [c;b]$. Допускается случай $\mu^+ \neq \mu^-$.

Введем максимальный оператор $L_{\max}$, порождаемые заданными дифференциальными выражениями $l^+(\cdot)$ и $l^-(\cdot)$ в пространстве $L_2(o,b)$. Для этого обозначим через $D_{\max}$ совокупность всех функций $y(x)$ из $L_2(o,b)$, все

производные которых до $(2\mu^{\pm}-1)$-ого порядка включительно абсолютно непрерывна на $I^{\pm}$, а производная $2\mu^{\pm}$-го порядка принадлежит пространству $L_2[I^{\pm}]$. Известно, что $D_{\max}$ - линейное многообразие в пространстве $L_2[0;b]$. Оператор $L_{\max}$ в $L_2(o,b)$ определим следующим образом: область определения оператора $L_{\max}$ есть $D_{\max}$ и для всех $y(x)\in D_{\max}$ действие оператора $L_{\max}$ зададим по формуле $L_m y(x)=l^{\pm}(y(x))$ при $x\in I^{\pm}$. Наряду с $L_{\max}$ нам понадобится так называемый минимальный оператор $L_{\min}$ в пространстве $L_2[0;b]$, порождаемые дифференциальными выражениями $l^{\pm}(y)$. Обозначим через $D_{\min}$ совокупность всех функций $y(x)$ из $D_{\max}$, удовлетворяющих условиям

$$y^{(k)}(0)=y^{(k)}(c-0), k=0,1,...,2\mu^{-}-1,$$
$$y^{(m)}(c+0)=y^{(m)}(b), m=0,1,...,2\mu^{+}-1.$$

Пусть $L_{\min}$ означает сужение $L_{\max}$ на $D_{\min}$, то есть если $y(x)\in D_{\min}$, то $L_{\min}y(x)=L_{\max}y(x)$ или $L_{\min}\subset L_{\max}$.

Перечислим основные свойства оператора $L_{\min}$.

1. Для любых элементов $y\in D_{\min}, z\in D_{\max}$ имеет место соотношение

$$(L_{\min}y,z)=(y,L_{\max}z).$$

Указанное свойство сразу же следует из формулы Лагранжа.

2. Для любых элементов $y,z\in D_{\min}$ имеет место соотношение

$$(L_{\min}y,z)=(y,L_{\min}z).$$

Второе свойство есть непосредственное следствие первого свойства.

3. Пусть $f(x)\in L_2[0;b]$. Уравнение $L_{\min}y=f(x)$ разрешимо тогда и только тогда, когда $f(x)$ **ортогонально** подпространству $Ker\,L_{\max}$.

Доказательство свойствы 3. В интервале $I^{\pm}$ рассмотрим неоднородное уравнение

$$l^{\pm}(y)=f(x), y^{(k)}\big|_{\partial I^{\pm}}=0, k=0,1,...,2\mu^{\pm}-1.$$

В [1, стр 195] показано, что необходимые и достаточные условия разрешимости указанной задачи имеют вид

$$\int_{I^{\pm}} f(x)\overline{z(x)}dx=0$$

где $z(x)$– произвольное решение однородного уравнения $l^{\pm}(z)\equiv 0, x\in I^{\pm}$.

4. Каковы бы ни были числа

$$\alpha_0^{\pm},\alpha_1^{\pm},...,\alpha_{2\mu^{\pm}-1}^{\pm};\beta_0^{\pm},\beta_1^{\pm},...,\beta_{2\mu^{\pm}-1}^{\pm}$$

существует функция $y(x)\in D_{\max}$ удовлетворяющая условиям

$$y^{(k)}(0)=\alpha_k^{-}, y^{(k)}(c-0)=\beta_k^{-}, k=0,1,...,2\mu^{-}-1,$$

$$y^{(m)}(c+0)=\alpha_m^- y^{(m)}(b)=\beta_m^+, m=0,1,...,2\mu^+-1.$$

Доказательство аналогичного свойства имеется в [1, стр 196].

5. $D_{\min}$ **плотно в пространстве** $L_2[0;b]$ **и** $L^*{}_{\min}=L_{\max}$, $L^*{}_{\max}=L_{\min}$.

Это свойство доказывается так же как в [1, стр 199] .

6. Нахождение индексов дефекта оператора $L_{\min}$ **.**

Пусть λ произвольная комплексное число из верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda>0$. Тогда первое дефектное число означает количество линейно независимых элементов $z(x)$ из $L_2[0;b]$, удовлетворяющих уравнению $L^*{}_{\min}z=\lambda z$ или $l^{\pm}(z)=\lambda z, x\in I^{\pm}$. Заметим, что уравнение $l^+(z)=\lambda z, x\in I^+$ имеет $(2\mu^+)$ линейно независимых решений из $L_2[0;c]$, а уравнение $l^-(z)=\lambda z, x\in I^-$ имеет $(2\mu^-)$ линейно независимых решений из $L_2[c,b]$. Следовательно, из них можно составить систему из $(2\mu^++1)(2\mu^-+1)$ – линейно независимых на $(0,b)$ функций. Действительно, пусть $z_1^-(x),...,z_{2\mu^-}^-(x)$ - фундаментальная система решений однородного уравнения $l^-(z)=\lambda z,\ x\in I^-$ и $z_1^+(x),...,z_{2\mu^-}^+(x)$ - фундаментальная система решений однородного уравнения $l^+(z)=\lambda z,\ x\in I^+$. Тогда система функций $\{u_{k0}(x),u_{0m}(x),k=1,...,2\mu^-,m=1,...,2\mu^+\}$, задаваемые по формулам

$$u_{k0}(x)=\begin{cases}z_k^-(x), x\in I^-\\ 0,\ \ x\in I^+,\end{cases}$$

$$u_{0m}(x)=\begin{cases}0,\ \ x\in I^-\\ z_m^-(x),\ \ x\in I^+,\end{cases}$$

образует линейно независимую систему функции на $(0,b)$.

Таким образом, первое дефектное число оператора $L_{\min}$ равно $2\mu^-+2\mu^+$. Точно также определяется второе дефектное число оператора $L_{\min}$. Оно равно $2\mu^++2\mu^-$, поскольку λ надо заменить на $\overline{\lambda}$.

Теорема 1. Оператор $L_{\min}$ есть замкнутый симметрический оператор с индексами дефекта $(2(\mu^++\mu^-);2(\mu^++\mu^-))$, причем максимальный оператор является сопряженным к оператору $L_{\min}$.

7. Описание самосопряженных расширений минимального оператора

Пусть $2M=2(\mu^++\mu^-)$. Тогда индексы дефекта оператора $L_{\min}$ равны $(2M;2M)$, то есть размерность пространства R_i равна $2M$. Подпространство R_λ есть линейная комбинация функций

$$\{u_{km}(x),k=0,1,...,2\mu^+-1,m=0,1,...,2\mu^--1,k+m>0\}.$$

Обозначим ортонормированный базис $\{\varphi_r\}_{r=1}^{2M}$ в дефектном подпространстве R_i. Точно также возьмем ортонормированный базис $\{\varphi_r\}_{r=1}^{2M}$ в дефектном подпространстве R_{-i}. Перейдем в сумме дефектных подпространств к новым базисам, состоящим из элементов $\{W_r^{\pm}\}$

$$W_r^- = \frac{1}{2i}(\psi_r - \varphi_r), W_r^+ = \frac{1}{2}(\psi_r + \varphi_r),\ r = 1,...,2M\ .$$

Вычислим

$$L^*_{\min} W_r^- = L_{\max} W_r^- = \frac{1}{2i}(L_{\max}\psi_r - L_{\max}\varphi_r) = \frac{1}{2i}(-i\psi_r - i\varphi_r) = W_r^+\ .$$

Точно также

$$L^*_{\min} W_r^+ = L_{\max} W_r^+ = \frac{1}{2}(L_{\max}\psi_r + L_{\max}\varphi_r) = \frac{1}{2}(-i\psi_r + i\varphi_r) = W_r^-\ .$$

Нетрудно проверить, что скалярные произведения представимы в виде

$$< W_p^+; W_r^+ >= \frac{1}{4} < \psi_p, \psi_r > + \frac{1}{4} < \varphi_p, \varphi_r > + \frac{1}{4} < \psi_p, \varphi_r > + \frac{1}{4} < \varphi_p, \psi_r >=$$

$$= \frac{1}{2}\delta_{pr} + \frac{1}{4} < \psi_p, \varphi_r > + \frac{1}{4} < \varphi_p, \psi_r >,$$

$$< W_p^-; W_r^- >= -\frac{1}{2}\delta_{pr} + \frac{1}{4} < \psi_p, \varphi_r > + \frac{1}{4} < \varphi_p, \psi_r >,$$

$$< W_p^-; W_r^+ >= -\frac{1}{4i} < \varphi_p, \psi_r > + \frac{1}{4i} < \psi_p, \varphi_r >,$$

$$< W_p^+; W_r^- >= -\frac{1}{4i} < \varphi_p, \psi_r > + \frac{1}{4i} < \psi_p, \varphi_r >,$$

где $\delta_{pp} = 1, \delta_{pr} = 0$ при $p \neq r$.

Известно [1, стр 163], что всякий элемент $y(x)$ из области определения сопряженного оператора $L^*_{\min}$ представляется в виде суммы $\tilde{y}(x)$ из $D_{\min}$ и «дефектной части» из $R_i + R_{-i}$:

$$y(x) = \tilde{y}(x) + \sum_{r=1}^{2M}\left[\xi_r^+(y)W_r^+(x) + \xi_r^-(y)W_r^-(x)\right]$$

где $\xi_r^+(y), \xi_r^-(y)$ – некоторые числа.

Теорема 2. Для любых $y(x), z(x)$ из области определения сопряженного оператора $L^*_{\min}$ справедливо тождество

$$< L^*_{\min} y(x), z(x) > - < y(x), L^*_{\min} z(x) >= \sum_{r=1}^{2M}\left[\xi_r^-(y)\overline{\xi_r^+(z)} + \xi_r^+(y)\overline{\xi_r^-(z)}\right]$$

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение

$$< L^*_{\min} y(x), z(x) >= \int_0^c l^-(y)\overline{z(x)}dx + \int_c^b l^+(y)\overline{z(x)}dx =$$

$$= \left| y(x) = \tilde{y}(x) + \sum_{r=1}^{2M} \left[\xi_r^+(y) W_r^+(x) + \xi_r^-(y) W_r^-(x) \right] \right| =$$

$$\int_0^b L_{\max} \tilde{y}(x) \overline{z(x)} dx +$$

$$+ \sum_{r=1}^{2M} \left[\xi_r^+(y) \int_0^1 L_{\min}^* W_r^+(x) \overline{z(x)} dx + \xi_r^-(y) \int_0^1 L_{\min}^* W_r^-(x) \overline{z(x)} dx \right]$$

$$= \left| \begin{matrix} L_{\min}^* W_r^{\pm} = W_r^{\pm} \\ L_{\max} \tilde{y} = L_{\min} \tilde{y} \end{matrix} \right| = \int_0^b L_{\min} \tilde{y}(x) \overline{z(x)} dx +$$

$$+ \sum_{r=1}^{2M} \left[\xi_r^+(y) \int_0^1 W_r^-(x) \overline{z(x)} dx + \xi_r^-(y) \int_0^1 W_r^+(x) \overline{z(x)} dx \right] =$$

$$= \int_0^1 \tilde{y}(x) \overline{L_{\min}^* z(x)} dx + \int_0^1 \left(\xi_r^+(y) W_r^-(x) + \xi_r^-(y) W_r^+(x) \right) \overline{z(x)} dx$$

Точно также имеем цепочку равенств

$$< y(x), L_{\min}^* z(x) >= \int_0^1 \tilde{y}(x) \overline{L_{\min}^* z(x)} dx +$$

$$+ \sum_{r=1}^{2M} \left[\xi_r^+(y) \int_0^1 W_r^+(x) \overline{L_{\min}^* z(x)} dx + \xi_r^-(y) \int_0^1 W_r^+(x) \overline{L_{\min}^* z(x)} dx \right].$$

Поэтому разность

$$< L^*_{\min} y(x), z(x) > - < y(x), L_{\min}^* z(x) >=$$

$$= \sum_{r=1}^{2M} \xi_r^+(y) \left(< W_r^-(x), z(x) > - < W_r^+(x), L_{\min}^* z(x) > \right) +$$

$$+ \sum_{r=1}^{2M} \xi_r^-(y) \left(< W_r^+(x), z(x) > - < W_r^-(x), L_{\min}^* z(x) > \right).$$

Следовательно, надо рассмотреть разности вида

$$1) \; < W_r^-(x), z(x) > - < W_r^+(x), L_{\min}^* z(x) >=< W_r^-(x), \tilde{z}(x) > +$$

$$+ \sum_{p=1}^{2M} \left[\overline{\xi_p^+(z)} < W_r^-(x), W_p^+(x) > + \overline{\xi_p^-(z)} < W_r^-(x), W_p^-(x) > \right] -$$

$$- < W_r^+(x), L_{\min} \tilde{z}(x) > -$$

$$- \sum_{p=1}^{2M} \left[\overline{\xi_p^+(z)} < W_r^+(x), W_p^-(x) > + \xi_p^-(z) < W_r^+(x), W_p^+(x) > \right] =$$

$$=< W_r^-(x), \tilde{z}(x) > - < L_{\min}^* W_r^+(x), \tilde{z}(x) > +$$

$$+\sum_{p=1}^{2M}\left[\overline{\xi_p^+(z)}\left(\frac{1}{4i}<\psi_r,\varphi_p>-\frac{1}{4i}<\varphi_r,\psi_p>\right)+\right.$$

$$\left.+\overline{\xi_p^-(z)}\left(-\frac{1}{2}\delta_{pr}+\frac{1}{4}<\psi_r,\varphi_p>+\frac{1}{4}<\varphi_r,\psi_p>\right)\right]-$$

$$-\sum_{p=1}^{2M}\left[\overline{\xi_p^-(z)}\left(\frac{1}{2}\delta_{pr}+\frac{1}{4}<\psi_r,\varphi_p>+\frac{1}{4}<\varphi_r,\psi_p>\right)+\right.$$

$$\left.+\overline{\xi_p^+(z)}\left(-\frac{1}{4i}<\varphi_r,\psi_p>+\frac{1}{4i}<\psi_r,\varphi_p>\right)\right]=-\overline{\xi_p^-(z)}.$$

2. $$<W_r^+(x),z(x)>-<W_r^-(x),L_{\min}^*z(x)>=<W_r^+(x),\tilde{z}(x)>+$$

$$+\sum_{p=1}^{2M}\left[\overline{\xi_p^+(z)}<W_r^+(x),W_p^+(x)>+\overline{\xi_p^-(z)}<W_r^+(x),W_p^-(x)>\right]-$$

$$-<W_r^-(x),L_{\min}\tilde{z}(x)>-$$

$$-\sum_{p=1}^{2M}\left[\overline{\xi_p^+(z)}<W_r^-(x),W_p^-(x)>+\overline{\xi_p^-(z)}<W_r^-(x),W_p^+(x)>\right]=$$

$$=<W_r^+(x),\tilde{z}(x)>-<W_r^-(x),L_{\min}\tilde{z}(x)>+$$

$$+\sum_{p=1}^{2M}\left[\overline{\xi_p^+(z)}\left(\frac{1}{2}\delta_{pr}+\frac{1}{4}<\psi_r,\varphi_p>+\frac{1}{4}<\varphi_r,\psi_p>\right)+\right.$$

$$\left.+\overline{\xi_p^-(z)}\left(-\frac{1}{4i}<\varphi_r,\psi_p>+\frac{1}{4i}<\psi_r,\varphi_p>\right)\right]-$$

$$-\sum_{p=1}^{2M}\left[\overline{\xi_p^+(z)}\left(-\frac{1}{2}\delta_{pr}+\frac{1}{4}<\psi_r,\varphi_p>+\frac{1}{4}<\varphi_r,\psi_p>\right)+\right.$$

$$\left.+\overline{\xi_p^-(z)}\left(-\frac{1}{4i}<\varphi_r,\psi_p>+\frac{1}{4i}<\psi_r,\varphi_p>\right)\right]=\overline{\xi_p^+(z)}.$$

При этом учтено, что $z(x)\in D\left(L_{\max}^*\right)$, то есть

$$z(x)=\tilde{z}(x)+\sum_{p=1}^{2M}\left[\xi_p^+(z)W_p^+(x)+\xi_p^-(z)W_p^-(x)\right].$$

Из теоремы 2 сразу же следует описание всех самосопряженных расширений оператора $L_{\min}$. Для этого введем граничные векторы

$\vec{\xi}^{\pm}=\left(\xi_1^+,\xi_2^+,...,\xi_{2M}^+\right)^T$, T – транспонирование.

Теорема 3. Пусть Г – произвольная эрмитова матрица размерности $2M$. Тогда область определения $D_\Gamma=D\left(L_\Gamma\right)$ самосопряженного расширения

$L_\Gamma\left(L_{\min}\subset L_\Gamma=L_\Gamma^*\subset L_{\max}\right)$ состоит из всех функций $y(x)$, допускающих представление в виде суммы

$$y(x)=\tilde{y}(x)+\vec{W}^-\cdot\Gamma\vec{\xi}^+ +\vec{W}^+\cdot\vec{\xi}^+,\forall\vec{\xi}^+,$$

где $\forall\tilde{y}(x)\in D_{\min}$, вектор $\vec{W}^\pm(x)=\left(W_1^\pm(x),W_2^\pm(x),...,W_{2M}^\pm\right)$.

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы М., Наука. 1969, 528 с.
2. Демиденко Г.В. Задача Коши для уравнений и систем соболевского типа // Краевые задачи для уравнений с частными производными. Новосибирск: Ин-т математики АН СССР. Сиб. отделение. 1986, С. 69-84.
3. Дубинский Ю.А. О некоторых дифференциально-операторных уравнениях произвольного порядка // Мат. сбор. 1973. Т. 90. № 1. С. 3-22.
4. Кангужин Б.Е., Берикханова Г.Е., Сарыбаева Ж.М. Нелокальная задача для уравнения теплопроводности. // Докл. НАН РК, 2004. № 4. С. 14-17.
5. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. Москва. Наука. 1989, 416 с.
6. Кангужин Б.Е. Вычислительные аспекты биортогональных разложений. Вычислительные технологии. 2004.№9.С.70-75.

ӘОЖ.378.14.016.02:51:004.45 (574)

М.А. Асқарова

САН ТЕҢСІЗДІКТЕРІН ПАЙДАЛАНЫП ТЕҢСІЗДІКТЕРДІ ДӘЛЕЛДЕУ ЖӘНЕ ТЕҢСІЗДІКТЕР МЕН ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЕШУ ӘДІСТЕРІ

(Алматы қ., Абай атындағы ҚазҰПУ)

В статье рассматриваются методы, основанные на применении численных неравенств. Нестандартными методами в математике являются также методы, в основу которых положено использование известных в математике численных неравенств (Коши, Бернулли и Коши – Буняковского), изучению которых в общеобразовательной школе не уделяется или почти не уделяется никакого внимания. Однако многие математические задачи (особенно задачи повышенной сложности) эффективно решаются именно такими методами. В этой связи незнание последних может существенно ограничить круг успешно решаемых задач. Первоначально приведем формулировки неравенства Коши, неравенства Бернулли и неравенства Коши – Буняковского, а затем проиллюстрируем их применение на примерах.

In article considers methods based on application of numerical inequalities. Non-standard methods in the mathematics are also methods which are based on numerical inequalities known in the mathematics (methods of Koshi, Bernulli and Koshi – Bunjakovsky) These methods are not studied in a comprehensive school. However many mathematical problems (especially problems of the raised complexity) effectively dare by this methods. Thereupon ignorance of the last can essentially limit a circle of successfully solved sums. Firstly, it is need to reduce the formulation of an inequality of Koshi, an inequality of Bernulli and an inequality of Koshi – Bunjakovsky, and then we will illustrate their application on examples.

Математикада белгілі сан теңсіздіктерін (Коши, Бернулли, Коши-Буняковский теңсіздіктерін) пайдаланып математикалық есептерді шешу әдісі де стандартты емес әдіс деп аталады.

Соңғы кезде, жалпы білім беретін мектептердің математика курсы бағдарламасында мұндай есептерге дұрыс көңіл бөлінбей келеді, мектеп оқулықтарында бұл мәселелерге арналған есептер құрастырылмаған. Көптеген математикалық есептерді (әсіресе қиындығы жоғары, немесе күрделі есептерді) біз қарастырып отырған әдіспен шешу тиімдірек болады. Сондықтан бұл мақаламызда алдымен Коши, Бернулли, Коши-Буняковский теңсіздіктерінің тұжырымдамаларын келтіреміз, содан соң оларды пайдаланып, теңсіздіктерді дәлелдеу мен теңдеулерді шешуге мысалдар қарастырамыз.

Коши теңсіздігі (арифметикалық және геометриялық орта туралы)

Егер $a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0,...,\ a_n \geq 0$ сандар болса, онда

$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 ....a_n}$ (1) орындалады, мұндағы $n \geq 2$.

Дербес жағдайда, егер $n = 2$ болса, онда (1) теңсіздігі $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}$, (2) түрінде жазылады.

(2) теңсіздігі мектептегі математика есептерін шешуде кездеседі.

Егер (2)-де $a_1 = a,\ a_2 = \frac{1}{a}$ және $a > 0$ болса, онда $a + \frac{1}{a} \geq 2,$ (3) болады. Сан мен оның керісінің қосындысы 2-ге тең не артық болады. $a = 1$ болғанда теңсіздік теңдікпен мәндес болады. Егер $a < 0$ болса, онда $a + \frac{1}{a} \leq -2,$ (4). $a = -1$ болғанда теңдікке айналады.

Бернулли теңсіздігі

Егер $x > -1$ болса, онда кез келген натурал n саны үшін $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ (5) теңсіздігі орындалады.

$x = 0$, немесе $n = 1$ болғанда (5) теңдікке айналады.

(5) теңсіздігімен қатар, құрамында екі теңсіздігі бар Бернуллидің жалпы теңсіздігі болады:

Егер $p < 0,$ немесе $p > 1$ болса, онда $(1 + x)^p \geq 1 + px,$ (6)

Егер $0 < p < 1$ болса, онда $(1 + x)^p \leq 1 + px,$ (7), мұндағы $x > -1$.

$x = 0$ болғанда (6) және (7) теңдікке айналады. Кері ұйғарым да дұрыс болады.

Коши-Буняковский теңсіздігі

Еркінше алынған $x_1, x_2, ..., x_n$ және $y_1, y_2, ..., y_n$ сандары үшін $(x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n) \leq \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right) \cdot \left(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2\right)$ (8) теңсіздігі орындалады, мұндағы $n \geq 2$.

(8) теңсіздігі x_k және y_k сандары пропорционал, яғни барлық $k = 1,2..., n$ үшін $x_k = a y_k$ теңдігі орындалатын a ($a \neq 0$ тұрақты саны) болғанда ғана теңдікке айналады.

(8) Коши-Буняковсий теңсіздігін пайдалану негізінде еркін $a(a \geq 0),$ b(b ≥ 0) және натурал n сандары үшін

$(a + b)^n \leq 2^{n-1}\left(a^n + b^n\right),$ (9) теңсіздігін дәлелдеуге болады.

Барлық теңсіздіктердің қасиеттерін сан теңсіздіктері арқылы көрсетуге болады.

Теңсіздіктерді дәлелдеуге көбінесе теңсіздік ұғымының анықтамасын (теңсіздік мүшелерінің айырмасын) пайдалану, белгілі теңсіздіктердің көмегімен дәлелдеу, оң

сандардың арифметикалық ортасы мен геометриялық ортасының өзара байланысын теңсіздіктерді шешуде қолдану, кері жору әдісі бойынша дәлелдеу және т.б. әдістері қолданатындығы белгілі. Біз жоғарыда атап өткен Коши, Бернулли, Коши-Буняковский теңсіздіктерін пайдаланып теңсіздіктерді дәлдеу және теңсіздіктер мен теңдеулерді шешу әдістерін, яғни математикалық есептерді стандартты емес әдістермен шешуді мысалдар арқылы қарастырамыз.

1-мысал. $a \geq 0,\ \ \mathrm{b} \geq 0$ болса, $(a+2)(b+2)(a+b) \geq 16ab$ (10) теңсіздігін дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. (1) Коши теңсіздігін пайдаланып, $a+2 \geq 2\sqrt{2a}$, $\mathrm{b}+2 \geq 2\sqrt{2\mathrm{b}}$ және $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ жазуға болады, бұлардың оң және сол бөліктерін мүшелеп көбейтсек, дәлелдеуге тиісті теңсіздік $(a+2)(b+2)(a+b) \geq 2\sqrt{2a} \cdot 2\sqrt{2b} \cdot 2\sqrt{ab} = 16ab$ шығады

2-мысал. $a \geq 0,\ \ \mathrm{b} \geq 0,\ \ \mathrm{c} \geq 0,\ \mathrm{d} \geq 0$ және $a+b+c+d > 0$ болса,

$abcd \leq \dfrac{a^5+b^5+c^5+d^5}{a+b+c+d}$ (11) теңсіздікті дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі: $a \geq 0,\ \ \mathrm{b} \geq 0,\ \ \mathrm{c} \geq 0,\ \mathrm{d} \geq 0$ болғандықтан $n=5$ болғанда (1) Коши теңсіздігін пайдалануға болады. Сонда

$$a^5+a^5+b^5+c^5+d^5 \geq 5 \cdot \sqrt[5]{a^5 \cdot a^5 \cdot b^5 \cdot c^5} \cdot d^5 = 5a^2bcd,$$

$$a^5+b^5+b^5+c^5+d^5 \geq 5ab^2cd,\ \ \mathrm{a}^5+b^5+c^5+c^5+d^5 \geq 5abc^2d$$

және $a^5+b^5+c^5+d^5+d^5 \geq 5abcd^2$ жазып осы теңсіздіктердің сол және оң бөліктерін мүшелеп қоссақ

$$5(a^5+b^5+c^5+d^5) \geq 5\left(a^2bcd+ab^2cd+abc^2d+abcd^2\right) \text{ немесе}$$

$a^5+b^5+c^5+d^5 \geq abcd(a+b+c+d),$ (12) шығады.

$a+b+c+d > 0$ болғандықтан, (12) теңсіздігінен (11) теңсіздігін аламыз.

3-мысал. $a>0,\ \mathrm{b}>0,\ \mathrm{c}>0$ болса, $\left(\dfrac{a+b}{c}\right)^n+\left(\dfrac{b+c}{a}\right)^n+\left(\dfrac{c+a}{b}\right)^n \geq 3 \cdot 2^n$

теңсіздігін дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. (1) Коши теңсіздігі бойынша $n=3$ болғанда

$$\left(\frac{a+b}{c}\right)^n+\left(\frac{b+c}{a}\right)^n+\left(\frac{c+a}{b}\right)^n \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{a+b}{c}\right)^n \cdot \left(\frac{b+c}{a}\right)^n \cdot \left(\frac{c+a}{b}\right)^n} = 3\left(\sqrt[3]{\frac{(a+b)\cdot(b+c)(c+a)}{abc}}\right)^n \geq$$

$$\geq 3\left(\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}}{abc}}\right)^n = 3\left(\sqrt[3]{\frac{8abc}{abc}}\right)^n = 3 \cdot 2^n.$$

4-мысал. $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} < 2\sqrt{2},$ (13) теңсіздігін дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. (8) Коши-Буняковский теңсіздігін пайдаланып, (13) теңсіздіктің сол бөлігін бағалаймыз, яғни

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^2 = \left(1\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+1\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^2 \leq \left(1^2+1^2\right)\cdot$$

$$\cdot\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}+2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) = 2\cdot 4 = 8$$

Бұдан $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \leq 2\sqrt{2}$ (14) теңсіздігі шығады.

(13) қатаң теңсіздікті дәлелдеу үшін (14)-те теңдік болуы мүмкін емес екенін көрсетуіміз қажет.

$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}$ болсын делік, бұл (8) Коши-Буняковский теңсіздігі теңдікке айналғанда ғана орындалады. Ал, ол

$\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ болған жағдайда ғана мүмкін. Теңсіздік дұрыс емес (өйткені бөлшектің алымдары сәйкес, ал бөлімдері сәйкес емес). Олай болса (13) теңсіздігі дәлелденді.

5-мысал. $a>0,\ \mathrm{b}>0, \mathrm{c}>0$ және $abc=1$ болса, $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1,$ (15) теңсіздігін дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. $abc=1$ болса, онда а, в, с айнымалыларды $a=\frac{x}{y},\ \mathrm{b}=\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{z}},\ \mathrm{c}=\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{x}}$ түрінде өрнектеуге болады. Осы жағдайда (15) теңсіздігі келесі $(x-y+Z)(y-Z+x)(Z-x+y)\le xyz,$ (16) $(x>0, y>0, Z>0)$ теңсіздігімен мәндес болады.

Жаңа айнымалылар: $u=x-y+Z, \vartheta=\mathrm{y}-\mathrm{z}+\mathrm{x},\ \omega=\mathrm{z}-\mathrm{x}+\mathrm{y},$ енгіземіз, сонда $x=\frac{u+\vartheta}{2},\ \mathrm{y}=\frac{\mathrm{V}+\omega}{2},\ \mathrm{Z}=\frac{\mathrm{U}+\omega}{2}$ және (16) теңсіздігі $(U+\vartheta)\ (\vartheta+\omega)(U+\omega)^2\ge 8u\vartheta\omega,$ (17) $(U>0,\ \vartheta>0, \omega>0)$ түріне келеді.

(17) теңсіздігінің дұрыстығы (2) Коши теңсіздігінен алынады, өйткені $U+\vartheta\ge 2\sqrt{U\vartheta},\ \vartheta+\omega>2\sqrt{\vartheta\cdot\omega},\ U+\omega\ge 2\sqrt{U\omega}.$

Демек, (15) теңсіздігі дәлелденді.

6-мысал. Егер $3a+b=1$ болса, онда

$3a^2+b^2\ge 1/4,$ (18)

$3a^3+b^3\ge 1/6,$ (19)

$3a^4+b^4\ge 1/64,$ (20)

теңсіздіктерін дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. (18), (19), (20) теңсіздіктерін (8) Коши-Буняковский теңсіздігін пайдалану негізінде дәлелдейміз.

$1=(3a+b)^2=(1\cdot a+1\cdot a+1\cdot a+1\cdot b)^2\le\left(1^2+1^2+1^2+1^2\right)\left(a^2+a^2+a^2+b^2\right)=4(3a^2+b^2).$

Осылайша, (18) теңсіздігінің дұрыстығы дәлелденді.

Дәлелденген $3a^2+b^2\ge 1/4$ теңсіздігін пайдаланып,

$1/16\le\left(3a^2+b^2\right)^2=\left(a^{1/2}\cdot a^{3/2}+a^{1/2}\cdot a^{3/2}+a^{1/2}\cdot a^{3/2}+b^{1/2}\cdot b^{3/2}\right)^2\le(a+a+a+b)\left(a^3+a^3+a^3+b^3\right)=$

$=(3a+b)\left(3a^3+b^3\right)$ жазамыз.

$3a+b=1$ болғандықтан, бұдан (19) теңсіздігі орындалады. Әрі қарай (18) теңсіздігін ескерсек,

$1/16\le\left(3a^2+b^2\right)^2=\left(1\cdot a^2+1\cdot a^2+1\cdot a^2+1\cdot b^2\right)^2\le 4\left(a^4+a^4+a^4+b^4\right)=4\left(3a^4+b^4\right)$ яғни (20) теңсіздігінің дұрыстығы дәлелденді.

7-мысал. $\sqrt[5]{5-\sqrt[5]{a}}+\sqrt[5]{5+\sqrt[5]{a}}\le 2\sqrt[5]{5}$ (21) теңсіздігін дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. (7) Бернулли теңсіздігін пайдаланамыз, сонда

$$\sqrt[5]{5-\sqrt[5]{a}}+\sqrt[5]{5+\sqrt[5]{a}}=\sqrt[5]{5}\cdot\left(1-\frac{\sqrt[5]{a}}{5}\right)^{1/5}+\sqrt[5]{5}\cdot\left(1+\frac{\sqrt[5]{a}}{5}\right)^{1/5}\le\sqrt[5]{5}\cdot\left(1-\frac{\sqrt[5]{a}}{25}\right)+\sqrt[5]{5}\cdot\left(1+\frac{\sqrt[5]{a}}{25}\right)=2\cdot\sqrt[5]{5},$$

(21) теңсіздігі дәлелденді.

8-мысал. $\left(16x^{200}+1\right)\cdot\left(y^{200}+1\right)=16(xy)^{100}$, (22) теңдеуін шешу керек.

Шешуі. (2) Коши теңсіздігін пайдаланып, $16x^{200}+1\ge 2\sqrt{16x^{200}}=8x^{100}$ және $y^{200}+1\ge 2\sqrt{y^{200}}=2y^{100}$ жазуға болады, яғни

$\left(16x^{200}+1\right)\cdot\left(y^{200}+1\right)\ge 16(xy)^{100}$ теңсіздігін жазамыз. Осы келтірілген Коши теңсіздігін және (22) теңдеуді салыстырсақ, Коши теңсіздігі теңдікке айналады. Ал, бұл $16x^{200}=1$ және $y^{200}=1$ болғанда ғана мүмкін. Олай болса, $x=\pm\frac{1}{\sqrt[50]{2}}$ және $y=\pm 1$ тең.

Жауабы: $x_1=1/\sqrt[50]{2},\ \mathrm{y}_1=1;\ \mathrm{x}_2=1/\sqrt[50]{2},\ \mathrm{y}_2=-1;\ \mathrm{x}_3=-1\sqrt[50]{2};\ \mathrm{y}_3=1$ және $x_4=-1/\sqrt[50]{2},\ \mathrm{y}_4=-1.$

9-мысал. $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{1-x}^{\,2}+\sqrt[4]{1+x^2}=4,$ (23) теңдеуін шешу керек.

Шешуі. (7) Бернулли теңсіздігін теңдеудің сол бөлігіне пайдаланамыз:

$$(1-x)^{1/2}+(1+x)^{1/2}+\left(1-x^2\right)^{1/4}+\left(1+x^2\right)^{1/4}\le 1-\frac{x}{2}+1+\frac{x}{2}+1-\frac{x^2}{4}+1+\frac{x^2}{4}=4.$$

Алынған теңсіздікті (23) теңдеуімен салыстырсақ, Бернулли теңсіздігінің теңдікке айналғанын байқаймыз, ал бұл, $x=0$ болған жағдайда ғана болуы мүмкін. Тікелей орнына қою арқылы $x_1=0$ (23) теңдеуінің түбірі екеніне көз жеткіземіз.

Жауабы: $x_1=0.$

10-мысал. Кез келген х үшін $\left(\frac{1}{2}+\sin^2 x\right)^n+\left(\frac{1}{2}+\cos^2 x\right)^n\ge 2,$ **(24)** теңсіздігін дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі: $\left(a^n+b^n\right)\ge 2^{1-n}\cdot(a+b)^n$ (9) теңсіздігін пайдаланамыз: $\left(\frac{1}{2}+\sin^2 x\right)^n+\left(\frac{1}{2}+\cos^2 x\right)^n\ge 2^{1-n}\cdot\left(\frac{1}{2}+\sin^2 x+\frac{1}{2}+\cos^2 x\right)^n=2,$ яғни (24) теңсіздігі дәлелденді.

11-мысал. $-\frac{3}{2}\le\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos z+\sin z\cdot\cos x\le\frac{3}{2},$ (25) теңсіздігін дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. (8) Коши-Буняковский теңсіздігінің көмегімен

$$\left(\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos z+\sin z\cdot\cos x\right)^2\le\left(\sin^2 x+\sin^2 y+\cos^2 x\right)\left(\cos^2 y+\cos^2 z+\sin^2 z\right)=$$

$$=\left(1+\sin^2 y\right)\left(1+\cos^2 y\right)=2+\sin^2 y\cdot\cos^2 y=2+\frac{\sin^2 2y}{4}\le\frac{9}{4}$$

Осыдан (25) қос теңсіздігінің дұрыстығы шығады.

12-мысал. $\sqrt{1-\frac{x}{3}}+\sqrt[6]{1+x}=\left(1-\frac{x}{24}\right)^4+\left(1+\frac{x}{36}\right)^6,$ (26) теңдеуін шешу керек.

Шешуі. (26) теңдеудің сол бөлігіне (7), оң бөлігіне – (6) Бернулли теңсіздігін пайдаланамыз:

$\sqrt{1-\frac{x}{3}}+\sqrt[6]{1+x}=\left(1-\frac{x}{3}\right)^{1/2}+(1+x)^{1/6}\le 1-\frac{x}{6}+1+\frac{x}{6}=2$ және

$\left(1-\frac{x}{24}\right)^4+\left(1+\frac{x}{36}\right)^6\ge 1-\frac{x}{6}+1+\frac{x}{6}=2$

Сонда, берілген теңдеудің екі бөлігіне қолданылған Бернулли теңсіздігі теңдікке айналды, ал бұл $x_1=0$ болғанда ғана мүмкін.

Жауабы: $x_1=0$.

13-мысал. $\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{14x^2+23x+8}\le\sqrt{17x^2+25x+8},$ (27) теңсіздігін шешу керек.

Шешуі. $\left(3x^2+2x\right)+\left(14x^2+23x+8\right)=17x^2+25x+8$ екендігін байқаймыз.

Демек, (27) теңсіздіктегі айнымалы х-тің мүмкін мәндерінің облысын анықтау үшін келесі теңсіздіктер жүйесін қарастырамыз:

$\begin{cases}3x^2+2x\ge 0\\14x^2+23x+8\ge 0\end{cases}\Rightarrow x\le -\frac{8}{7}$ немесе $x\ge 0$

(27) теңсіздіктің сол бөлігіне $(a+b)^2\ge a^2+b^2,$ (а) теңсіздігін пайдаланамыз, сонда $\left(\sqrt{3x^2+2x}++\sqrt{14x^2+23x+8}\right)^2\ge 17x^2+25x+8$ немесе $\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{14x^2+23x+8}\ge\sqrt{17x^2+25x+8}$.

Алынған теңсіздікті (27) теңсіздігімен салыстырсақ қолданылған (а) теңсіздігі теңдікке айналғанын байқауға болады, ал бұл өз кезегінде $\left(3x^2+2x\right)\cdot\left(14x^2+23x+8\right)=0$ екенін білдіреді. Осы теңдеуді $\left(3x^2+2x\right)=0$ және $4x^2+23x+8=0$ шешіп, $x_1=-2/3,\ x_2=0,\ x_3=-8/7,\ x_4=-1/2$ табамыз.

Берілген теңсіздіктегі айнымалы х-тің мүмкін мәндерінің облысын ескеріп, шешімін жазамыз: $x_2=0$ және $x_3\ -8/7$.

Жауабы: $x_2=0$ және $x_3\ -8/7$.

14-мысал. Егер $xy<z^2$ болса, $\log_z x<\log_y z$ (28) теңсіздігін (мұндағы $x>0,\ y>0,\ y\ne 1$ және $z>1$) дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. Үш x,y,z айнымалылы функция, яғни $f(x,z,y)=\frac{\log_z x}{\log_y z}=\log_z x\cdot\log_z y$ түріндегі функцияны қарастырамыз.

(2) Коши теңсіздігін пайдаланып

$f(x,z,y)\le\left(\frac{\log_z x+\log_z y}{2}\right)^2=\frac{\log_z{}^2(xy)}{4}$ (29) теңсіздігін аламыз.

Есептің шарты бойынша $xy<z^2$ және $z>1$ болса, онда $\log_z(xy)<\log_z z^2=2$

Мұнан және (29) теңсіздігінен $f(x,y,z)<1$ екені шығады. Олай болса, (28) теңсіздігі дәлелденді.

15-мысал. $\left(\sin^2 x\right)^{\cos^2 x}+\left(\cos^2 x\right)^{\sin^2 x}\le 1+\frac{1}{2}\sin^2 2x$ (30) теңсіздігін дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. Егер $x=\frac{\pi}{2}k,\ \ \mathrm{k}\in Z$ болса, (30) теңсіздіктің екі бөлігі де 1-ге тең болады, яғни теңсіздік дұрыс.

Енді $x\neq\frac{\pi}{2}k$ болсын, сонда $0<\sin^2 x<1$ және $0<\cos^2 x<1$.

(30) теңсіздігіне (7) Бернулли теңсіздігін пайдаланып, жоғарғы жағынан бағалаймыз:

$$\left(\sin^2 x\right)^{\cos^2 x}+\left(\cos^2 x\right)^{\sin^2 x}=\left(1-\cos^2 x\right)^{\cos^2 x}+\left(1-\sin^2 x\right)^{\sin^2 x}\le 1-\cos^4 x+1-\sin^4 x=$$
$$=\left(1-\cos^2 x\right)\cdot\left(1+\cos^2 x\right)+\left(1-\sin^2 x\right)\cdot\left(1+\sin^2 x\right)=\sin^2 x\cdot\left(1+\cos^2 x\right)+\cos^2 x\cdot\left(1+\sin^2 x\right)=$$
$$=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin^2 x\cdot\cos^2 x=1+\frac{1}{2}\sin^2 2x$$

Осылайша (30) теңсіздігін дәлелдедік.

16-мысал. Егер $x^2+y^3\ge x^3+y^4$ болса, онда $x^3+y^3\le 2$ (31) теңсіздігін (мұндағы $x\ge 0,\ \ \mathrm{y}\ge 0$) дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі. x^3+y^3 өрнегін жоғарыдан бағалай үшін (8) Коши – Буняковский теңсіздігін пайдаланамыз, яғни

$$\left(x^3+y^3\right)^2=\left(x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}}+y^2\cdot y\right)^2\le\left(x^3+y^4\right)\cdot\left(x^3+y^2\right)\quad(32)$$

Есептің шарты бойынша $x^3+y^4\le x^2+y^3$ болса, онда (32)-ден $\left(x^3+y^3\right)^2\le\left(x^2+y^3\right)\cdot\left(x^3+y^2\right)$ жазамыз. Енді (2) Коши теңсіздігін пайдаланамыз, сонда $\left(x^3+y^3\right)^2\le\left(\frac{x^2+y^3+x^3+y^2}{2}\right)^2$ алынады.

Осыдан $x^3+y^3\le x^2+y^2$ теңсіздігі шығады.

Әрі қарай (8) Коши – Буняковский теңсіздігі бойынша $\left(x^2+y^2\right)^2=\left(x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}+y^{3/2}\cdot y^{1/2}\right)^2\le\left(x^3+y^3\right)(x+y)$ (33) жазамыз.

Ал, $x^3+y^3\le x^2+y^2$ болса, онда (33) теңсіздігінен $x^2+y^2\le x+y$ алынады.

Тағы да (8) Коши – Буняковский теңсіздігін пайдаланамыз:

$$(x+y)^2=\left(1\cdot x+1\cdot y\right)^2\le\left(1^2+1^2\right)\cdot\left(x^2+y^2\right)=2\left(x^2+y^2\right).\quad(34)$$

Бірақ, $x^2+y^2\le x+y$ және $x+y\ge 0$, демек (34)-тен $x+y\le 2$ шығады. Сондай-ақ $x^3+y^3\le x^2+y^2,\ \ \mathrm{x}^2+y^2\le x+y$ және $x+y\le 2$,олай болса, (31) теңсіздігі дәлелденді.

17-мысал. $\sqrt[4]{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[4]{1-\sqrt{1-x^2}}=2$ (35) теңдеуін шешу керек.

Шешуі. (35) теңдеудің сол бөлігіндегі қосылғыштарына (7) Бернулли теңсіздігін пайдаланамыз:

$$\sqrt[4]{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[4]{1-\sqrt{1-x^2}}=\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^{1/4}+\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^{1/4}\le 1+\frac{\sqrt{1-x^2}}{4}+1+\frac{\sqrt{1-x^2}}{4}=2$$

Егер алынған теңсіздікті (35) теңдеуімен салыстырсақ, (7) Бернулли теңсіздігін пайдаланған теңсіздік теңдікке айналатынын байқаймыз, олай болса , $\sqrt{1-x^2}=0$ немесе $x=\pm 1$ болады.

Жауабы: $x_1 = 1,\ \mathrm{x}_2 = -1$

18-мысал. $\sin x + 2\sin x = 3 + \sin 3x$ (36) теңдеуін шешу керек.

Шешуі. (36) теңдеуін келесі түрде түрлендіреміз:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 2x - \sin 3x = 3,\ \ 2\sin\frac{3}{2}x \cdot \cos\frac{x}{2} + 2\cos\frac{5}{2}x \cdot \sin\left(-\frac{x}{2}\right) = 3$$

$$\sin\frac{3}{2}x \cdot \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{5}{2}x \cdot \sin\frac{x}{2} = \frac{3}{2}. \qquad (37)$$

(37) теңдеудің сол бөлігін бағалаймыз, ол үшін (8) Коши – Буняковский теңсіздігін пайдаланамыз.

$$\left(\sin\frac{3}{2}x \cdot \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{5}{2}x \cdot \sin\frac{x}{2}\right)^2 \le \left(\sin^2\frac{3}{2}x + \cos^2\frac{5}{2}x\right) \cdot \left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) \le 2 \cdot 1 = 2$$

Осыдан, $\sin\frac{3}{2}x \cdot \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{5}{2}x \cdot \sin\frac{x}{2} \le \sqrt{2}$ шығады. Ал, $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$, олай болса, (37) сонымен бірге (36) теңдеудің түбірі болмайды.

Теңдіктер теңсіздіктерден жасалады, оларды теңсіздіктердің дербес бір түрі деуге болады. Теңсіздікті теңдікке айналдыру үшін екі шаманың айырмасын дәл бағалау керек.

Теңсіздіктер теориясы оқушылардың логикалық ойлау қабілетін дамыта алатындай өз алдына ғылыми – педагогикалық маңызы бар мектептегі негізгі оқу материалы болып есептеледі. Ол оқушыларды айқын және дербес ойлауға шамаларды салыстыра білуге дағыдаландырады. Сондықтан болашақ математика пәнінің мұғалімдерін кәсіби маман ретінде даярлауда студенттерге арнайы курстарда математика есептерін шешуге үйрету пәндерін оқыту барысында қиындығы жоғары (күрделі) есептерді шығартып, оның әдіс-тәсілдерін үйретудің мәні зор.

1. Азаров А.И., Барвенов С.А., Федосенко В.С. Математика для старшеклассников. Мн., 2003
2. Алексеев А.Б., Климова А.А. Математика СПб., 2004 – 94с.
3. Кушнир И.А. Шедевры школьной математики. В 2т. Киев, 1995.
4. Асқарова М. Математика есептерін шешу практикумы. Алматы, 2007. 2 бөлім.

УДК 528.36

С.А. Атанбаев, А.А. Кожабекова

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ СУШИ ПО ДАННЫМ ДИСТАНЦИОННОГО ИЗМЕРЕНИЯ

(*г.Алматы, КазЭУ имени Т. Рыскулова*)

Жер бетінің жылуын ғарыштан алынған деректерді пайдалану арқылы математикалық жолмен қалай анықтауға болатыны негізделген. Қазіргі заманға сай проблема жағдайларын талдау және топырақтың белсенді қабатындағы жылу өткізгіштік процестері теңдестіріліп, математикалық сипаттама беріліп, алгоритмді жүйелейтін программалар кешені құрылған. Топырақтың температуралық жылу өткізу коэффициентін анықтау үшін, температуралық өрістерді есептеуге шекті айырымдар әдісін, жылу ағындарын анықтау үшін жұқа қабаттық қыздыру әдісін, жылу өрістерін қалпына келтіру үшін кері

бағыт әдісін қолданып тиімділігі тексерілген. Жылу өткізгіштік теңдеуіне қойылған кері есепті шешуге алып келуге болатыны көрсетілген. Сондай-ақ есептеу алгоритмі құрылған. Осыған байланысты техникалық жағдайларда яғни физикалық жылу таралуына ақпаратты өңдеу, ақпараттық жүйесін құру көзделіп отыр.

How to calculate the heat on the earth using the dates in mathematical way. Up to date problems analysis and heat conduct balance mathematical description, information system of algorithms have been arranged. To find out the percent of ground head conduction, the way to calculate the temperature field, to determine head flow, to reset head flow efficiency have been researched. The possibility to use reconstruction of heat flow has been proved, calculation algorithm has been set, also concerning that there is a necessity to renew heat distribution machine and to set information system. For evolution equations, the decisions of the tasks of modeling and identifications of the heat processes in ground and in soils introduced in the from of the problem Koshi. For recovering ratio is used the algorithm method of the warm-up waves.

В настоящее время наблюдается устойчивая тенденция к переходу от дистанционных измерений температуры подстилающей поверхности (ТПП) [1,2] к одновременной оценке ТПП и излучательной способности [3-5], некоторых компонент энергетического баланса поверхности суши [6], а также к определению суточного хода температуры активного слоя почв и грунтов [5,6,7] по данным дистанционного зондирования и контактным подспутниковым измерениям температуры [11,12].

Для калибровки данных спутниковых измерений и задания граничных условий на поверхности почвы используются данные, приведенные, например, в работах [2,9,10]. Достаточно подробные ссылки на зарубежные источники приведены в работах [5,6,7].

Известен метод восстановления суточного хода ТПП по значениям, измеряемым дважды в сутки со спутника, имеющего полярную орбиту. Предполагается, что нормализованное по максимальной разности температур отклонение от минимальной температуры – известная функция времени суток.

Момент достижения максимальной температуры определяет местоположение этой функции. Конкретный вид функции зависит от параметров, значения которых подбираются для рассматриваемого времени года, широты местности, типа растительности и т.д.

Привлечение для анализа уравнения теплопроводности, описывающего температурный режим почвенного слоя существенно повышает информативность данных дистанционного зондирования.

Такого рода методика предложена в [6]. Она может быть использована для определения температурных профилей неоднородно увлажненного активного слоя почвы.

В работе [7] получено решение уравнения теплопроводности, описывающее установившийся процесс теплопереноса в приповерхностном слое почвы. Найденное решение представлено в виде ряда Фурье и зависит от трех параметров, отражающих условие энергетического баланса на поверхности почвы. Эти параметры могут быть определены по двум дистанционным измерениям температуры при известном времени достижения ее максимального значения. Восстановленный по дистанционным измерениям суточный ход температуры сопоставляется с результатами наземных экспериментов для сухих и влажных почв [9].

В работе [4] предложен метод восстановления суточного хода температуры в активном слое почвогрунтов при условии, что на поверхности почвы задан суточный ход температуры и плотности теплового потока.

В дальнейшем будем следовать методикам, представленным в [4] и [7]. По методике, изложенной в [4] можно определить суточный ход температуры

поверхности $T(1,t)$. По формуле, приведенной в [5], можно определить также и тепловой поток:

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial z}=(1-A_s)Q\cos Z-[a+bT(0,t)], \quad (1)$$

где λ - коэффициент теплопроводности; A_s - альбедо подстилающей поверхности; Q - суммарная солнечная радиация; Z - зенитное расстояние солнца; a,b - коэффициенты, полученные при линеаризации уравнения теплового баланса.

Дальнейшие вычисления производятся по методике, изложенной в [4].

Динамика изменения температуры в пределах активного слоя почвы зависит от температурапроводности a. В свою очередь коэффициент температурапроводности a зависит от влажности W. Влажность почвы с глубиной может существенно изменяться. Поэтому коэффициент a зависит от расстояния от поверхности почвы x. Для определенности примем, что это зависимость является кусочно – постоянной и рассматриваемый слой почвы состоит из K слоев, имеющих температурапроводности a_k на границе между слоями выполняется условие идеального теплового контакта. Считаем также, что нам известны из эксперимента температура и градиент температуры на поверхности. При вычисленном тепловом потоке по формуле (1) и известном коэффициенте теплопрводности λ можно определить градиент температуры.

Задача о восстановлении температурного поля для приповерхностного слоя почвы формулируется следующим образом: по вычисленным с учетом данных дистанционного определения температуры суточному ходу температуры и ее градиенту на поверхности почвогрунта [5] рассчитать температурное поле всего приповерхностного активного слоя почвы путем решения следующей задачи коши [4]:

$$\frac{\partial T_k}{\partial x}=-a_k\frac{\partial q_k}{\partial t}, 0<x<x_1, t_{k-1}<t<t_k, 1<k<K, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_k}{\partial x}=-q_k, 0<x<x_1, t_{k-1}<t<t_k, 1<k<K, \quad (3)$$

$$T_1=T_0(x), \frac{\partial T_1}{\partial t}=-q_0(x), t=t_0, 0\prec x<x_1, \quad (4)$$

где t_k - заданная глубина, $T_k(t,x)$ - искомое температурное поле, $q_k(t,x)$ - градиент температуры, $T_0(x)$ и $q_0(x)$ - заданные функции (рассчитанные на поверхности температура и ее градиент), x_1 - время протекания исследуемого процесса. В уравнениях (2)-(4) названия осей изменены для удобства применения МКО. Используя алгоритм метода квазиобращения [1,4,11,12], имеем:

$$\frac{\partial q_{ka}}{\partial t}=-\frac{1}{a_k}\frac{\partial T_{ka}}{\partial x}-\alpha q_{ka}, t_{k-1}<t<t_k, 0<x<x_1, 1<k<K, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T_{ka}}{\partial t}=-\frac{\alpha}{a_k^2}\frac{\partial^2 T_{ka}}{\partial x^2}-q_a, t_{k-1}<t<t_k, 0<x<x_1, 1<k<K, \quad (6)$$

$$q_{ka}=q_0, T_{ka}=T_0, t=0, 0<x<x_1\ . \quad (7)$$

Здесь α - параметр регуляризации. Применяя для нахождения приближенного решения задачи (5)-(7) метод конечных разностей, получаем следующие уравнения:

$$q_{i+1}^1=-\frac{\tau}{ah}(T_i^2-T_i^1)-(\alpha\tau-1)q_i^1, j=1, \quad (8)$$

$$q_{i+1}^{j} = -\frac{\tau}{2ah}(T_i^{j+1} - T_i^{j-1}) - (\alpha\tau - 1)q_i^j, j = 2,...,M-1, \quad (9)$$

$$q_{i+1}^{M} = -\frac{\tau}{ah}(T_i^{M} - T_i^{M-1}) - (\alpha\tau - 1)q_i^M, j = M, \quad (10)$$

$$T_{i+1}^{j} = \frac{\alpha\tau}{a^2h^2}(T_i^{j+1} - 2T_i^{j} + T_i^{j-1}) + T_i^j - \tau q_i^j, j = 2,...,M-1, \quad (11)$$

$$T_{i+1}^{1} = \frac{\alpha\tau}{a^2h^2}(T_i^{3} - 2T_i^{2} + T_i^{1}) + T_i^1 - \tau q_i^1, \quad (12)$$

$$T_{i+1}^{M} = \frac{\alpha\tau}{a^2h^2}(T_i^{M} - 2T_i^{M-1} + T_i^{M-2}) + T_i^M - \tau q_i^M, \quad (13)$$

Производя вычисления по формулам (8) – (13) последовательно для каждого i, находим регуляризованное решение, зависящее от параметра α .

1. Атанбаев С.А. Метод квазиобращения и его применение. – Алматы: Университет “Кайнар”, 1999. – 208с.
2. Горный В.И.: Шилин Б.В., Ясинский Г.И. Тепловая аэрокосмическая сьемка. – М. : Недра, 1983.-128с.
3. Султангазин У.М., Атанбаев С.А., Кожабекова А.А., Шерышев В.П. восстановление температуры подстилающей поверхности и излучательной способности по спектру уходящей длинноволновой радиации// Тезисы докладов Международной конференции “Математическое моделирование экологических систем” (9-12 сентября 2003г., Алматы).- С. 84.
4. Султангазин У.М., Атанбаев С.А., Кожабекова А.А., Шерышев В.П. Расчет температурных полей по данным дистанционных наблюдений // В кн. “Космические исследования в Казахстане”. Алматы, РОНДО, 2002. – С. 324-330.
5. Успенский А.Б., Щербина Г.Н. Оценка температуры и излучательной способности суши по данным измерений уходящего теплового излучения с ИСЗ NOAA // Иссл. Земли из космоса. – 1996. - №5.
6. Реутов Е.А., Шутко А.М. Оценка профиля температуры почвы по данным дистанционных СВЧ и ИК- ихмерений // Исследование Земли из космоса. – 1987.-№4.- С. 78-85.
7. Сагалович В.Н., Фальков В.Я., Царева Т.И. определение суточного хода температуры в почве по данным дистанционного зондирования// Исследование Земли из космоса. – 2001.-С. 79-84.
8. Покровский О.М., Королевская И.П. Восстановление компонентов теплового баланса по данным спутниковых наблюдение // Исследование Земли из космоса. – 2001. – №5. – С.85-93.
9. Царева Т.И. Моделирование температурного режима дерново-подзолистой почвы с использованием метода случайного поиска // Современные проблемы опытного дела / Под ред. В.П. Якушева. – Т.2. – СПб., 2000.-С.119-124.
10. Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. – М.: Наука, 1976. – 352с.
11. Шерышев В.П., Атанбаев С.А., Жалмухамедова Ж.Д., Ермолдина Г.Д. Мониторинг температуры поверхности почвы// Материалы IV Междунар. Симп. “Контроль и реабилитация окружающей среды”. Томск, 21-23 июля, 2004г.-С. 51-52.
12. Шерышев В.П., Атанбаев С.А., Кожабекова А.А. Восстановление температуры поверхности суши при проведении синхронного подспутникового эксперимента методом обратных задач теплопроводности// обратные задач и информационные технологии. -2002. - №1.

УДК 517.946

М.А. Бектемесов, А.Н. Алимова

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(г. Алматы, КазНПУ имени Абая)

Мақалада екіөлшемді толқын теңдеуі үшін Дирихленің кері есебі қарастырылады. Фурье түрлендіруінің көмегімен екіөлшемді есептен бірөлшемді есепке өту әдісі келтірілген. Есеп операторлық түрге келтіріледі. Есепті шығару үшін Ландвебер әдісі қолданылады. Есептің сандық шешімінің нәтижелері келтірілген.

In this paper we consider the inverse Dirichlet problem for a two-dimensional wave equation. The method of transition from two-dimensional problem to the one using the Fourier transform. The problem is reduced to an operator form. Landweber method is applied to solve the problem. The results of the numerical solution of the problem.

Работа посвящена численному исследованию задачи Дирихле для волнового уравнения. Задача рассматривается в прямоугольной области. Задача Дирихле для гиперболического уравнения в круге исследована в работах В.П. Бурского[1]. Обзор некоторых результатов в исследовании краевых задач для гиперболических уравнений приведен в работах Б.И. Пташникова[2]. В данной работе рассматривается классически некорректная задача Дирихле для волнового уравнения в двухмерном пространстве[3-5]. Рассмотрим прямую задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad x, y \in (0,\pi),\ t \in (0,T) \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = q(x,y), \qquad u_t\big|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=\pi} = 0, \tag{3}$$

$$u_y\big|_{y=0} = u_y\big|_{y=\pi} = 0. \tag{4}$$

Теперь обратную задачу сформулируем следующим образом: найти $q(x,y) = u(x,y,0)$, используя соотношения (1), (2), (3), (4) и дополнительную информацию

$$u(0,y,t) = f(y,t), \quad y \in (0,\pi),\ t \in (0,T) \tag{5}$$

Используя преобразование Фурье

$$q(x,y) = \sum_{k=1}^{n} q_{(k)}(x)\cos ky \quad \text{где} \quad q_{(k)}(x) = \int_0^{2\pi} q(x,y)\cos ky$$

ищем решение (1)-(4) в виде

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{n} u_{(k)}(x,t)\cos ky$$

Тогда получим

$$u_{(k)tt} = u_{(k)xx} - k^2 u_{(k)}, \quad x \in (0,\pi),\ \ t \in (0,T), \tag{6}$$

$$u_{(k)}(0,t) = u_{(k)}(\pi,t) = 0, \qquad t \in (0,T), \tag{7}$$

$$u_{(k)}(x,0) = 0, \ \ x \in (0,\pi), \tag{8}$$

$$u_{(k)t}(x,0) = q_{(k)}(x), \quad x \in (0,\pi), \tag{9}$$

где по заданной функции $q_{(k)}(x)$ надо определить функцию $u_{(k)}(x,t)$.

Сформулируем следующую обратную задачу к прямой задаче (6) - (9): определить функцию $q_{(k)}(x)$ по дополнительной информации

$$u_{(k)}(x,T) = f_{(k)}(t) \tag{10}$$

где $u_{(k)}(x,T)$ - решение прямой задачи (6) - (9) при $t = T$.

Таким образом, обратная задача (6) - (10) имеет следующий операторный вид $A_{(k)}q_{(k)} = f_{(k)}$.

При каждом натуральном k мы решаем обратную задачу (6) - (10) при помощи минимизации целевого функционала $J_{(k)}(q) = \left\langle A_{(k)}q_{(k)} - f_{(k)}, A_{(k)}q_{(k)} - f_{(k)} \right\rangle$ минимизировать который будем методом итераций Ландвебера

$$q_{(k)_{n+1}}(x) = q_{(k)_n}(x) - \alpha J'_{(k)}q_{(k)_n} \tag{11}$$

$$\alpha \in (0, \|A\|^{-2})$$

Вычисление градиента функционала $J_{(k)}(q)$

$$J_{(k)}(q) = \left\langle A_{(k)}q_{(k)} - f_{(k)}, A_{(k)}q_{(k)} - f_{(k)} \right\rangle = \int_0^{\pi} \left[u_{(k)}(x,T;q) - f_{(k)}(x) \right]^2 dx \tag{12}$$

Найдем приращение функционала

$$J_{(k)}(q + \delta q) - J_{(k)}(q) =$$

$$= \int_0^{\pi} \left\{ [u_{(k)}(x,T;q+\delta q) - f_{(k)}(x)]^2 - [u_{(k)}(x,T;q) - f_{(k)}(x)]^2 \right\} dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \left[u_{(k)}(x,T;q+\delta q) - u_{(k)}(x,T;q) \right] \cdot 2 \left[u_{(k)}(x,T;q) - f_{(k)}(x) \right] dx + o(\|\delta q\|)$$

Ставим сопряженную задачу

$$\psi_{(k)tt} = \psi_{(k)xx} - k^2\psi_{(k)}, \qquad x \in (0,\pi), \qquad t \in (0,T), \tag{13}$$

$$\psi_{(k)}(0,t) = \psi_{(k)}(\pi,t) = 0, \qquad t \in (0,T), \tag{14}$$

$$\psi_{(k)}(x,T) = 0, \; x \in (0,\pi), \tag{15}$$

$$\psi_{(k)t}(x,T) = 2\left[u_{(k)}(x,T;q) - f_{(k)}(x) \right], \tag{16}$$

Описание численных расчетов

Расчеты проводились для $T = \frac{3}{4}\pi$, $N = 100$, $h = \frac{\pi}{N}$, $\alpha = 1$

Для решения прямой задачи применялась явная разностная схема

$$\frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{h^2} = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} - k^2 \frac{u_{i+1}^k + u_{i-1}^k}{2h}$$

Переходим к рекуррентной формуле

$$u_i^{k+1} = u_{i+1}^k + u_{i-1}^k - u_i^{k-1} - k^2 \cdot 0{,}5 \cdot h \cdot (u_{i+1}^k + u_{i-1}^k).$$

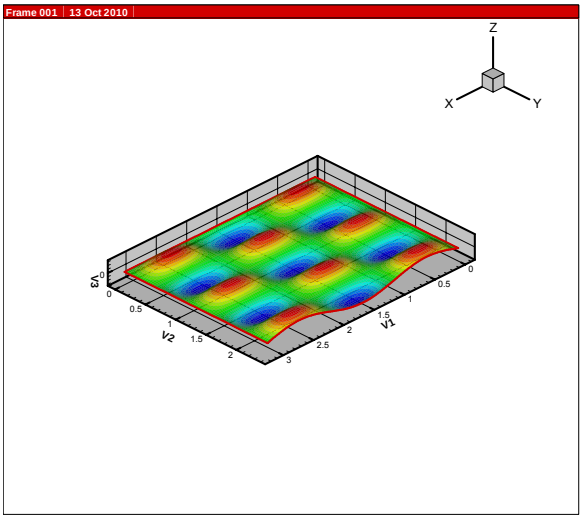
Условие на нулевом и первом слоях

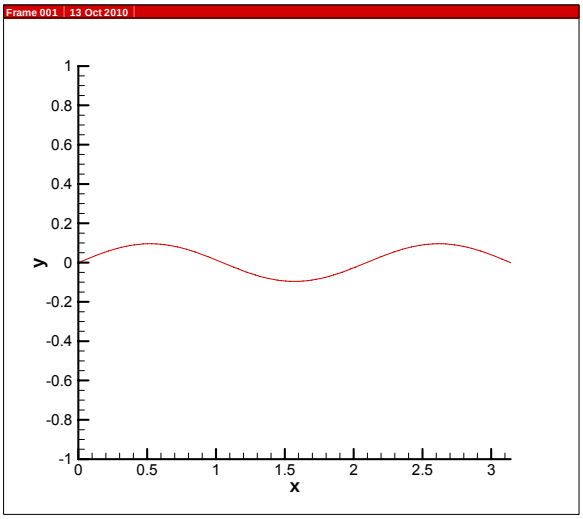
$$u_i^0 = 0,$$

$$u_i^1 = h * q_i$$

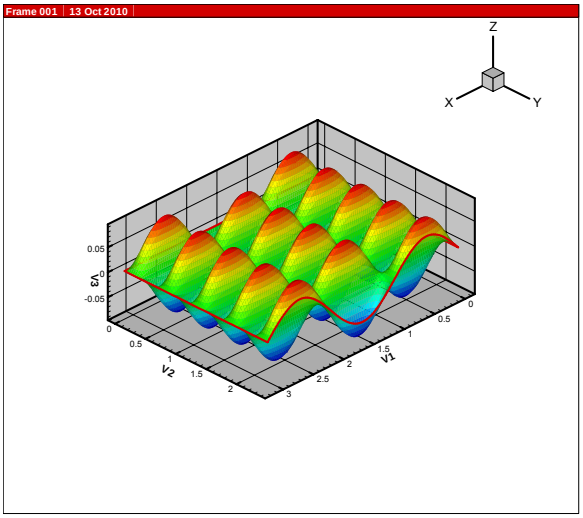
Здесь $q_i = q(ih)$, где функция выбрана $q(x) = \sin(3x)$, в результате расчетов прямой задачи получаем при разных значениях *k* соответствующие графики.

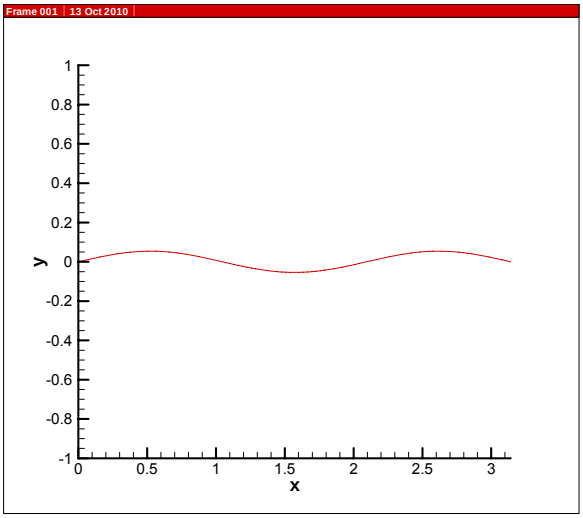
При k=1



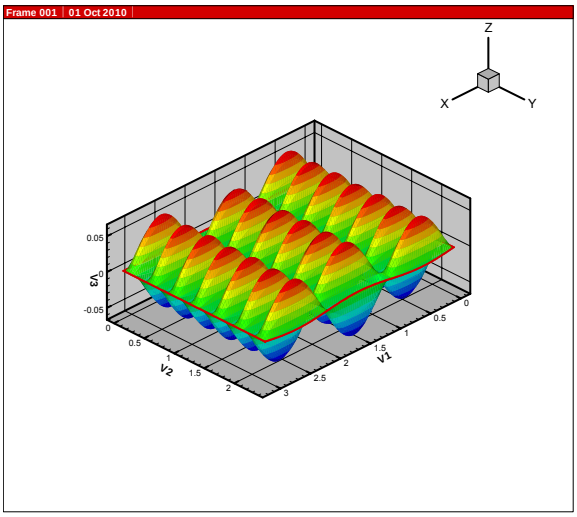


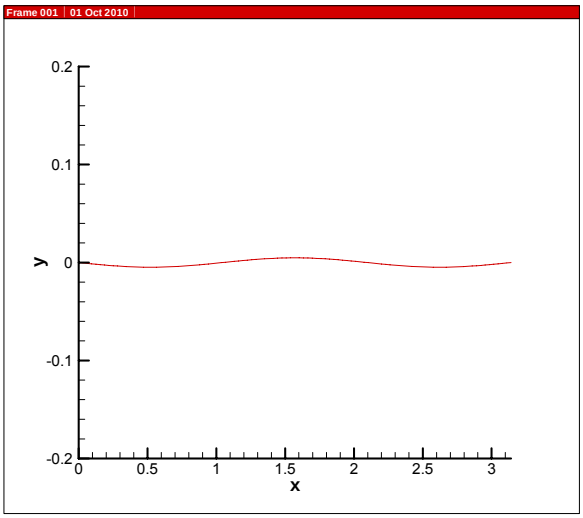
При k=2



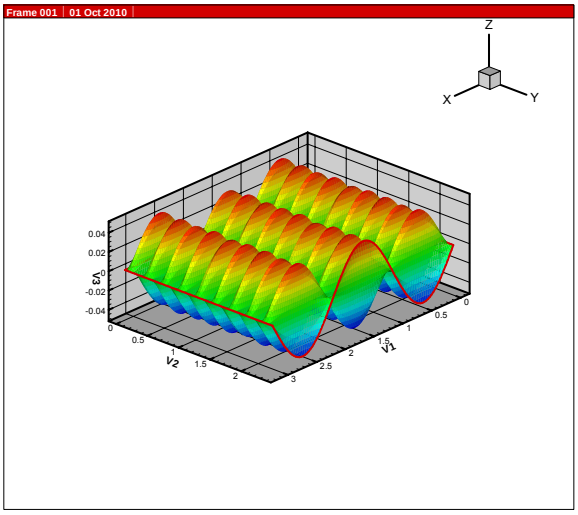


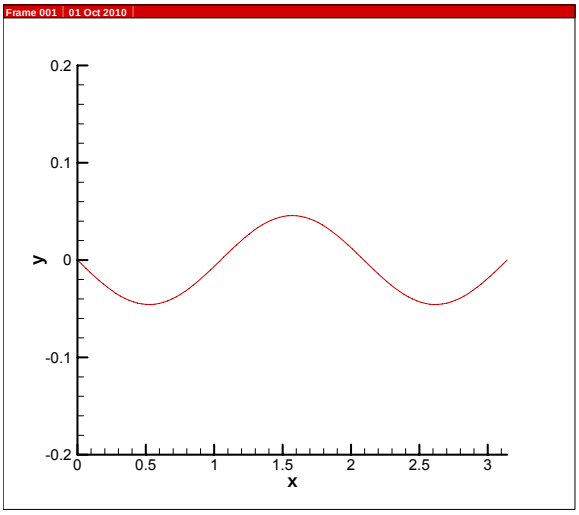
При k=3



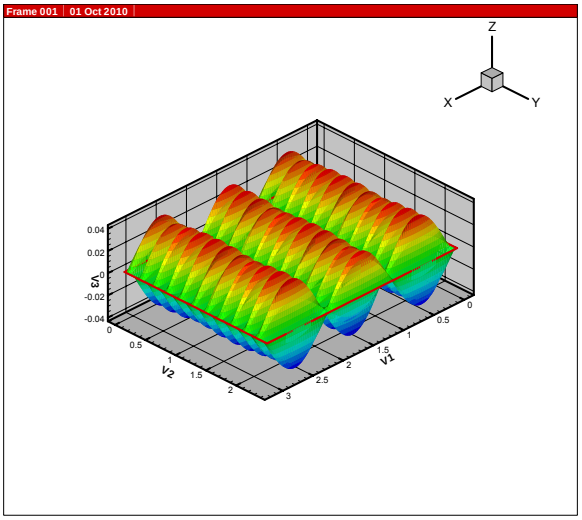


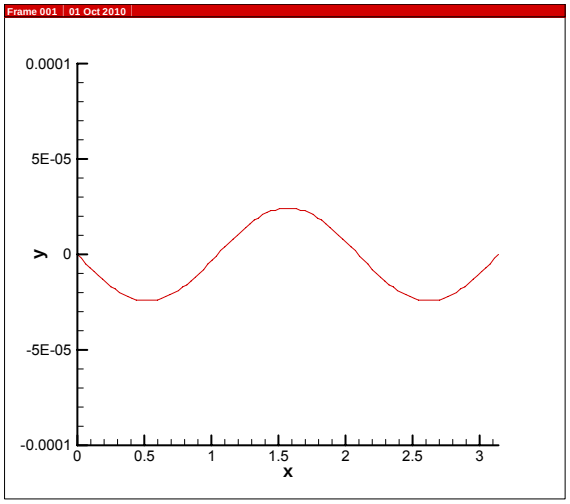
При k=4



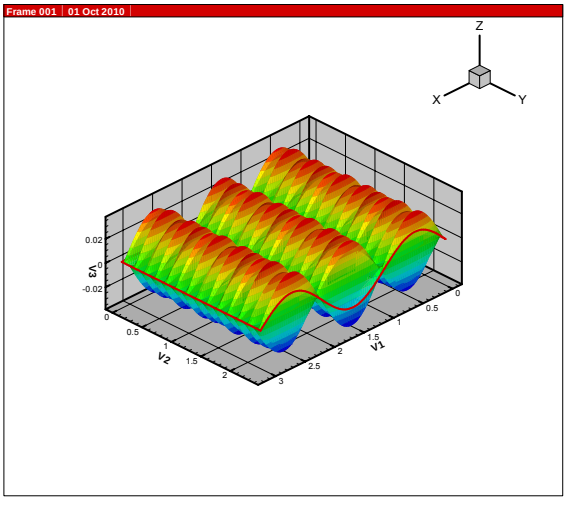


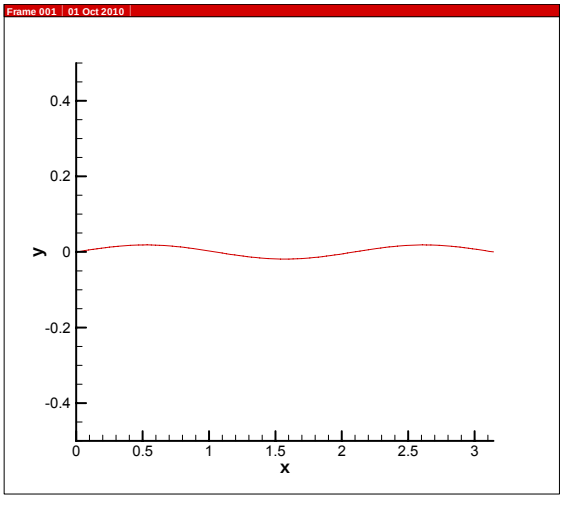
При k=5



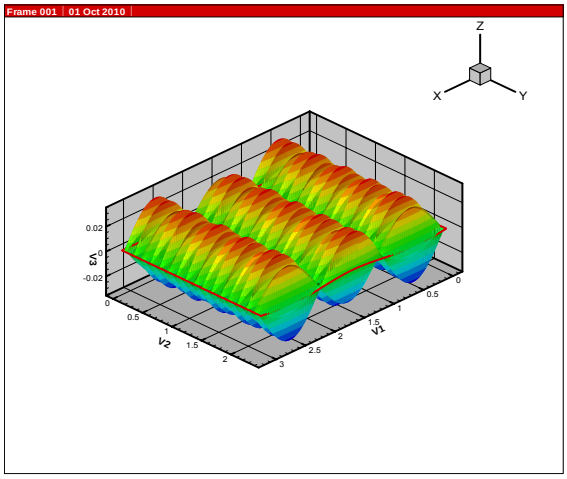


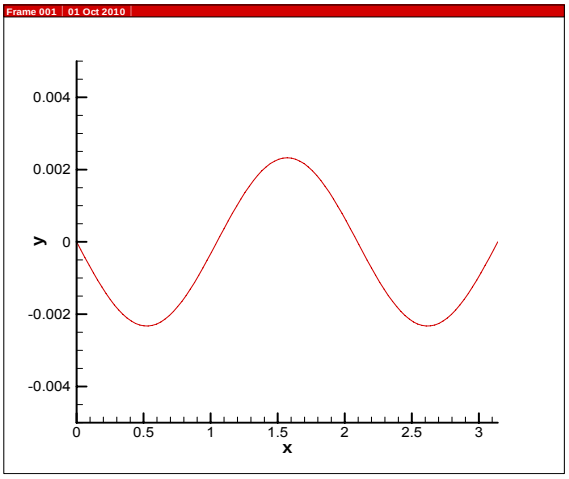
При k=6



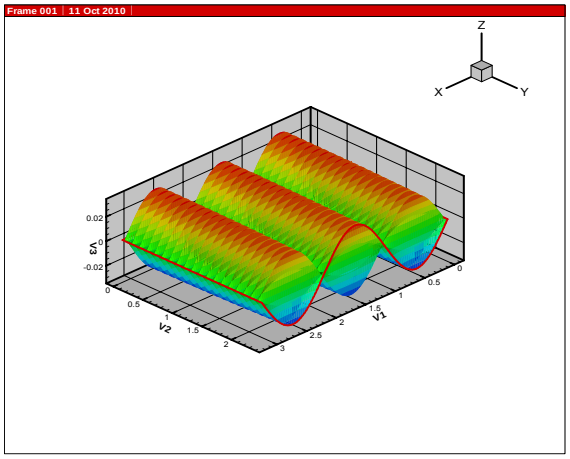


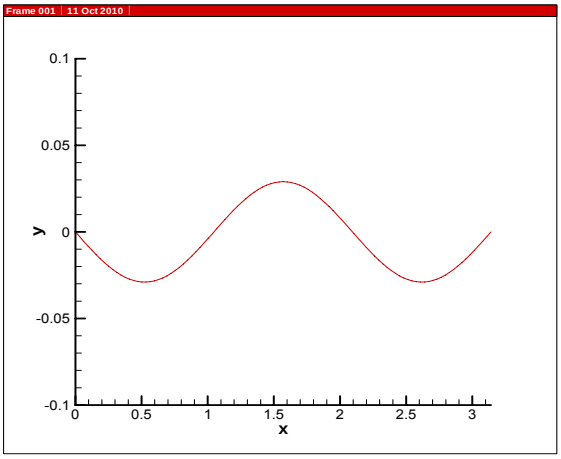
При k=7





При k=8





Для численного решения обратной задачи применялся метод Ландвебера при $\alpha = 1$, при разных значениях *k* итерационного процесс сходился с точностью 0,01

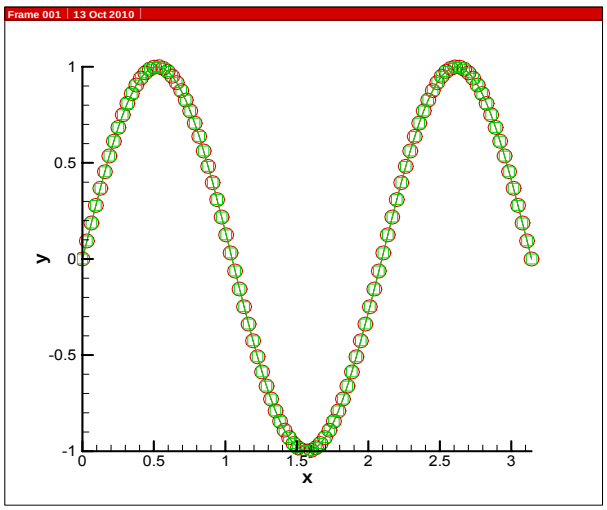


График 1. Сходимость функций q_T, q_0

1. Бурский В.П. Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка, 2002.

2. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наукова думка, 1984.
3. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, Сибирское Научное издательство, 2009, 457с.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М. «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1988, 512с.
5. Тихонов А.Н., Самарский А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1972.

ӘОЖ 519.443

А. Бөлен, Ш.М. Бердиева*

КУБТЫҚ ЦИКЛДЫҚ АБСОЛЮТ АБЕЛЬДІК ӨРІСТЕРДІҢ КОМПОЗИТТЕРІНІҢ КОНСТРУКТИВТІК СИПАТТАМАЛАРЫ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ КЕЙБІР ҚОЛДАНЫЛУЛАРЫ

(*Алматы қ., Абай атындағы ҚазҰПУ, *-магистрант*)

В работе даются описания ведущего дивизора кубических циклических полей. Также даются описания ведущего дивизора элементарно абелевых полей степени 3^r. Даются конструктивные описания элементарно абелевых полей степени 3^r,. с заданным ведущим дивизором. Вычислены дискриминант элементарно абелевых полей степени 3^r, с заданным ведущим дивизором. На этой основе произведены подсчет элементарно абелевых полей степени 3^r, с заданным дискриминантом.

This article gives descriptions of the leading divisor of the cubic cylclic fields. Also there is gives descriptions of the leading divisor of the elementary Abelian fields to 3^r degree. There is gives constructive descriptions of the elementary Abelian fields to 3^r degree with the given leading divisor. There is computed discriminant of the elementary Abelian fields to 3^r degree with the given leading divisor. On this base has made calculate of the elementary Abelian fields to 3^r degree with the given discriminant.

Рациональ сандар өрісінің $K = Q(\theta)$-үшінші дәрежелі нормаль кеңейтпесін, кубтық циклдық абсолют абельдік өріс деп айтады. $\theta \in C$, үш дәрежелі алгебралық санының минимал көпмүшесі $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \in Q[x],\ \theta = \theta_0, \theta_1, \theta_2$ оның түбірлері дейік. Онда $K = Q(\theta)$ нормаль кеңейтпе болғандықтан, $Q(\theta_0) = Q(\theta_1) = Q(\theta_2)$, демек $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ нақты сандар. Реті 3-ке тең кубтық примитивті характерінің жетекші модулінің $F(\chi) = f$, канондық жіктелуі мынадай болады: $f = 3^a p_1 p_2 ... p_k$, мұндағы $a = 0 \vee a = 2$, $p_i \equiv 1 (\mathrm{mod} 3)$ қос-қосынан әртүрлі жай сандар. Кубтық циклдық абсолют абельдік өрістер, реті 3-ке тең примитивтік характерлер арқылы эффективті түрде конструктивтік сипатталалатындығы белгілі [1,2].

Біз бұдан былай $\chi \in X_3(f)$, кубтық примитивті характерінің жетекші модулінің $F(\chi) = f$ канондық жіктелуі тұрақталынған $f = p_1 \ldots p_n$, саны болатын жағдайды ғана қарастыратын боламыз, мұндағы $p_i \equiv 1(\mathrm{mod}3)$, $i = 1,2,\ldots,n$ қос-қосынан әртүрлі жай сандар. Мұдағы ой тұжрымдар жалпы жағдайда да елеулі өзгеріске түсе қоймайды.

3^r дәрежелі $(3,3,\ldots,3-r \quad pem)$ типті элементар абелдік өріс анықтама Галуа группасы 3^r ретті элементар абелдік группа болатын рациональ сандар өрісінің нормаль кеңейтпесін айтады.

Егер 3^r дәрежелі $(3,3,\ldots,3-r \quad pem)$ типті K элементар абелдік өрісінің жетекші модулі $F(\chi) = f = p_1 \ldots p_n$, $Z/(f)$ қалындылар сақинасының $U(f) = U(Z/(f))$ қайтымды элементтер группасының өзінің ішкі группаларының тура көбейтіндісіне эффективті жіктелеуі $U(f) = (g_1)(g_2)\ldots(g_n)$, $g_i \in U(f)$ және $X(f) = (\chi_1)(\chi_2)\ldots(\chi_n)$, $\chi_i \in X_3(p_i)$, $\chi_i(g_i) = \zeta_{p_i - 1}$ дейік. Онда f модулі бойынша $\chi \in X_3(f)$, кубтық примитивті характерінің канондық жіктелуі $\chi(k) = \chi_1(k)\chi_2(k)\ldots\chi_n(k)$, $k \in Z$, $F(\chi_i) = p_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, болады.

Жетекші дивизоры f санының бөлгіші болатын барлық кубтық циклдық абсолют абельдік өрістердің жиынын $P_3(f) = \{K \quad | K \le Q(\zeta_f), [K:Q] = 3, F(K) = d, f \vdots d\}$ арқылы, реті 3-ке тең жетекші модулі f санының бөлгіші болатын барлық примитивті характерлердің жиынын $X_3(f) = \{\chi \quad | \chi \in X(f), |\chi| = 3, F(\chi) = d, f \vdots d\}$ арқылы, $X_3(f)$ жиынындағы характерлердің эквиваленттік қатынасы бойынша фактор жиынды $X_3(f)/\sim$ арқылы белгілейік. $F_3 = Z/(3)$, 3 модулі бойынша қалындылар өрісіндегі $1 \times n$ өлшемді $F_3^{1\times n}$ матрицалар кеңістігінің кеңістігінің нөлден өзгеше векторларының жиынын $\left(F_3^{1\times n}\right)^* = F_3^{1\times n} \setminus \{0\}$ арқылы белгілейік. $F_3 = Z/(3)$, 3 модулі бойынша қалындылар өрісіндегі рангі r–ге тең, $r \times n$ өлшемді $A = (\delta_{ij}) \in \left(F_3^{r\times n}\right)^*$ бағандары тек нөлден өзгеше $A_j = [\delta_{1j},\ldots,\delta_{nj}] \in \left(F_3^{n\times 1}\right)^*$ векторларынан тұратын жиынды $\left(F_3^{r\times n}\right)^* = \left\{(\delta_{ij}) \quad | (\delta_{ij}) \in F_3^{n\times 1}, [\delta_{1j},\ldots,\delta_{nj}] \in \left(F_3^{n\times 1}\right)^*\right\}$ арқылы белгілейік. Жетекші дивизоры f болатын барлық 3^r дәрежелі $(3,3,\ldots,3-r \quad pem)$ типті K элементар абелдік өрістердің жиынын $P_3^{(r)}(f) = \{K \quad | K \le Q(\zeta_f), [K:Q] = 3^r, K = K_1 \times \ldots \times K_r, [K_i : Q] = 3\}$ арқылы белгілейік.

1-теорема. Егер $f = p_1 \ldots p_n$, $p_i \equiv 1(\mathrm{mod}3)$, $i = 1,2,\ldots,n$ қос-қосынан әртүрлі жай сандар болса, онда $\psi_r : \left(F_3^{r\times n}\right)^* \to P_3^{(r)}(f)$, $A = (\delta_{ij}) \in \left(F_3^{r\times n}\right)^*$,

$\psi_r(A) = Q(\theta(\chi_1),...,\theta(\chi_r)) \in P_3^{(r)}(f)$, $\chi_i = \chi_1^{\frac{p_1-1}{2}\delta_{i1}} ... \chi_n^{\frac{p_n-1}{2}\delta_{in}} \in X_3(f)$, $i = 1,2,...,r$ формуласы арқылы анықталған бейнелеу суръективтік бейнелеу және оған сәйкес ядролық эквиваленттік қатнас $\left(F_3^{r\times n}\right)^*$ матрицалар жиынындағы әдеттегі солэквиваленттік қатынас болады.

Дәлелдеу. Реті 3-ке тең жетекші модулі f санының бөлгіші болатын барлық примитивті характерлердің жиыны төмендегі түрде $X_3(f) = \left\{ \chi_1^{\frac{p_1-1}{2}\delta_1} ... \chi_n^{\frac{p_n-1}{2}\delta_n}, \quad \left|(\delta_1,...\delta_n) \in F_3^{1\times n}, (\delta_1,...\delta_n) \neq 0 \right. \right\}$ сипатталады.

$\chi = \chi_1^{\frac{p_1-1}{2}\delta_1} ... \chi_n^{\frac{p_n-1}{2}\delta_n} \in X_3(f)$ характерінің жетекші модулі $F(\chi) = p_1^{\varepsilon_1} ... p_n^{\varepsilon_n}$ болады, мұндағы $\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & егер \quad \delta_i \neq 0 \quad болса \\ 0, & егер \quad \delta_i = 0 \quad болса \end{cases}$, $i = 1,2,...,n$.

Жетекші дивизоры f санының бөлгіші болатын барлық кубтық циклдық абсолют абельдік өрістердің жиыны төмендегі түрде $P_3(f) = \left\{ Q(\theta(\chi)), \quad \left| \chi \in X_3(f) \right. \right\}$ сипатталады, мұндағы $\theta(\chi) = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2} \tau_1(\chi^i)$, $\tau_1(\chi^i) = \sum_{g\in U(f)} \chi^i(g)\zeta_f^{\,g}$, $i = 0.1,2$, Гаусс қосындылары. Әрбір $0 \neq (\delta_{i1}, \delta_{i2},..., \delta_{in}) \in F_3^{1\times n}$, $i = 1,2,...,3^n - 1$, векторына $F_3^{\,n}$ арифметикалық кеңістігінің $(n-1)$-өлшемді $G(\delta_{i1},...,\delta_{in}) = \left\{ (x_1, x_2,..., x_n) \quad \left| (x_1, x_2,..., x_n) \in F_3^{\,n}, (\delta_{i1}x_1 + ... + \delta_{in}x_n) = 0 \right. \right\}$ дәл бір ғана ішкі кеңістігі сәйкес болады. Сонымен, $F_3^{\,n}$ кеңістігінің 3^{n-1} ретті барлық аддитивтік ішкі группаларының жиыны $L_3(f) = \left\{ G(\delta_{i1},...,\delta_{in}) \quad \left| 0 \neq (\delta_{i1},...,\delta_{in}) \in F_3^{\,n}, G(\delta_{i1},...,\delta_{in}) \leq F_3^{\,n} \right. \right\}$ болады, $\left|L_3(f)\right| = \frac{3^n-1}{2}$. $F_3^{\,n}$ арифметикалық кеңістігінің ішкі кеңістігінің кез келген $(n-r)$-өлшемді ішкі кеңістігі $V(A)$ рангі r–ге тең, $r\times n$ өлшемді матрицасы $A = (\delta_{ij}) \in F_3^{r\times n}$ болатын n белгісізі бар әйтеуір біртектес сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімдер кеңістігі болғандықтан, $V(A) = \bigcap_{i=1}^{k} G(\delta_{i1},...,\delta_{in})$, $0 \neq (\delta_{i1}, \delta_{i2},..., \delta_{in}) \in F_3^{1\times n}$, $0 \neq (\delta_{i1}, \delta_{i2},..., \delta_{in}) \in F_3^{1\times n}$ болады. Ендеше Галуа сәйкестігі бойынша оған $Q(\zeta_f)$- дөңгелек өрісінің $K_i = Q(\theta(\chi_i)) \in P_3(f)$ кубтық ішкі өрістерінің композиті $K = Q(\theta(\chi_1),...,\theta(\chi_r)) \in P_3^{(r)}(f)$, $\chi_i = \chi_1^{\frac{p_1-1}{2}\delta_{i1}} ... \chi_n^{\frac{p_n-1}{2}\delta_{in}} \in X_3(f)$, $i = 1,2,...,r$, сәйкес болады. *K* элементар абелдік өрісінің жетекші дивизоры $K_i = Q(\theta(\chi_i)) \in P_3(f)$ кубтық өрістерінің жетекші дивизорының ең кіші ортақ еселігіне тең $F(K) = \left[F(K_1), F(K_2),..., F(K_k)\right]$

болғандықтан, $F(K)=f=p_1...p_n$ болуы үшін $A=(\delta_{ij})\in F_3^{r\times s}$ матрицасының бағандары нөлден өзгеше болуы қажетті. Сонымен қатар $A=(\delta_{ij})\in F_3^{r\times s}$ матрицасының рангісі мен $K=Q(\theta(\chi_1),...,\theta(\chi_r))\in P_3^{(r)}(f)$ өрісінің дәрежесі тең болатындығы $rang(A)=(K:Q)$ түсінікті. Егер $A,B\in F_3^{r\times s}$ солэквивалентті матрицалар болса, онда $V(A)=V(B)$ болады.

1-теореманы қолданып төмендегі тұжырымды дәлелдейік.

2-теорема. Жетекші дивизоры $f=p_1...p_n$, $p_i\equiv 1(\mathrm{mod}3)$, $i=1,2,...,n$ қос-қосынан әртүрлі жай сандар болатын 3^r, $1\le r\le n$ дәрежелі $(3,3,...,3-r\quad rem)$ типті элементар абелдік өрістің дискриминанты $D=f^{3^{r-1}}$, ал дискриминанты $D=f^{3^{r-1}}$ болатын 3^r, $1\le r\le n$ дәрежелі $(3,3,...,3-r\quad rem)$ типті барлық элементар абелдік өрістердің саны $N_3^{(r)}(n)$,

$$N_3^{(r)}(n)=\begin{cases}0, & егер\quad r\succ n\quad болса\\ \sum\limits_{x_1+x_2+...+x_r=n-r}(3-1)^{x_1}(3^2-1)^{x_2}...(3^r-1)^{x_r}, & егер\quad 1\le r\le n\quad болса\end{cases}$$ болады,

мұндағы $N_3^{(r)}(n)$ қосындысы $x_1+x_2+...+x_r=n-r$, теңдеуінің теріс емес бүтін сан болатын барлық $x_1,x_2,...,x_r\in N$ шешімдері бойынша жүргізіледі.

Дәлелдеу. 1-теорема бойынша $\psi_r:\left(F_3^{r\times n}\right)^*\to P_3^{(r)}(f)$, $A=(\delta_{ij})\in\left(F_3^{r\times n}\right)^*$, $\psi_r(A)=Q(\theta(\chi_1),...,\theta(\chi_r))\in P_3^{(r)}(f)$, $\chi_i=\chi_1^{\frac{p_1-1}{2}\delta_{i1}}...\chi_n^{\frac{p_n-1}{2}\delta_{in}}\in X_3(f)$, $i=1,2,...,r$ формуласы арқылы анықталған бейнелеу, ядролық эквиваленттілігі $\left(F_3^{r\times n}\right)^*$ жиынындағы әдеттегі матрицалардың сол эквиваленттілігі қатынасы болатын суръективтік бейнелеу болады. Кез келген $A=(\delta_{ij})\in\left(F_2^{r\times n}\right)^*$ матрицасына элементар түрлендірулер жасағанда оған мәндес өрісіндегі $r\times n$ өлшемді, рангісі r индексі $(1,n_2,...,n_r)$, $1=n_1<n_2<...<n_r\le n$, болатын $r\times n$-өлшемді бір және тек қана бір төмендегі $A^*=(\delta^*{}_{ij})\in\left(F_3^{r\times n}\right)^*$ «канондық» матрицасын алуға болатындығы түсінікті:

$$A^*=\begin{pmatrix}1...,\delta^*{}_{1,n_1},0, & \delta^*{}_{1,(n_2+1)},... & \delta^*{}_{1,(n_3-1)},0, & \delta^*{}_{1,(n_3+1)},..., & 0,\delta^*{}_{1,(n_r+1)}, & ...,\delta^*{}_{1,n}\\ 0,.....,0,1, & \delta^*{}_{1,(n_2+1)},... & \delta^*{}_{2,(n_3-1)},0, & \delta^*{}_{1,(n_3+1)},..., & 0,\delta^*{}_{2,(n_r+1)}, & ..,\delta^*{}_{2,n}\\ 0,.....,0,0, & 0,..... & 0,1, & \delta^*{}_{1,(n_3+1)},..., & 0,\delta^*{}_{3,(n_r+1)}, & ..,\delta^*{}_{3,n}\\ 0,.....,0,0, & 0,..... & 0,0, & 0,.....,0, & 0,\delta^*{}_{4,(n_r+1)}, & ..,\delta^*{}_{4,n}\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 0,.....,0,0, & 0,..... & 0,0, & 0,.....,0, & 0,\delta^*{}_{r-1,(n_r+1)}, & ..,\delta^*{}_{r-1,n}\\ 0,.....,0,0, & 0,..... & 0,0, & 0,.....,0, & 1,\delta^*{}_{1,(n_r+1)}, & ..,\delta^*{}_{r,n}\end{pmatrix}.$$

Ал $A^* = (\delta^*_{ij}) \in \left(F_3^{r\times n}\right)^*$ «канондық» матрицасы, екінші индексі $j = n_k$, $1 \le k \le r$, болатын баған векторының кординатасы 1-ге тең, ал қалған кординаталары 0-ге тең болады және индексі $j = n_k$, $1 \le k \le r$, болатын баған векторларынан кейін тұрған $1\times(n_2 - 1 - n_1), 2\times(n_3 - 1 - n_2)$, ..., $r\times(n - n_r)$, өлшемді, тек нөлден тұратын баған кездеспейтін төмендегі r матрицалар клеткалары арқылы құрастырылады:

$$A_1^* = \left(\delta^*_{1,2},..., \delta^*_{1,n_1}\right) \in F_3^{1\times x_1}, x_1 = n_2 - 2;$$

$$A_2^* = \begin{pmatrix} \delta^*_{1,n_2+1}, & \dots & \delta^*_{1,n_3-1} \\ \delta^*_{2,n_2+1} & \dots & \delta^*_{2,n_3-1} \end{pmatrix} \in F_3^{2\times x_2},\ x_2 = (n_3 - 1) - n_2,...;$$

$$A_r^* = \begin{pmatrix} \delta^*_{1,n_r+1}, & \dots, & \delta^*_{1n}, \\ \delta^*_{2,n_r+1}, & \dots, & \delta^*_{2n} \\ \delta^*_{3,n_r+1}, & \dots, & \delta^*_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta^*_{r,n_r+1}, & \dots, & \delta^*_{rn} \end{pmatrix} \in F_3^{r\times x_r},\ x_r = n - n_r.$$

Ал индексі $(n_1, n_2,..., n_r)$, $1 \le n_1 < n_2 < ... < n_r \le n$,, болатын $A^* = (\delta^*_{ij}) \in \left(F_3^{r\times n}\right)^*$ «канондық» матрицасы $A_i \in F_q^{i\times x_i}$, $i = 1,2,..., r, i\times x_i$ өлшемді, тек нөлден тұратын баған кездеспейтін r матрицалар клеткалары арқылы құрастырылатын болғандықтан, индексі $(n_1, n_2,..., n_r)$, болатын $A^* \in \left(F_3^{r\times n}\right)^*$, «канондық» матрицалардың саны $(p-1)^{x_1}(p^2-1)^{x_2}\cdots(p^r-1)^{x_r}$ болады, мұндағы $x_1 = n_2 - 2$, $x_2 = (n_3 - 1) - n_2$, $x_3 = (n_4 - 1) - n_3$, ..., , $x_{r-1} = (n_r - 1) - n_{r-1}$, $x_r = n - n_r$, $x_1 + x_2 + ... + x_r = n - r$, $x_1, x_2,..., x_r \in N$.

Енді жетекші дивизоры $f = p_1...p_n$, $p_i \equiv 1(\mathrm{mod}3)$, $i = 1,2,..., n$, болатын $A^* = (\delta^*_{ij}) \in \left(F_3^{r\times n}\right)^*$ «канондық» матрицасына сәйкес 3^r, $1 \le r \le n$ дәрежелі $(3,3,...,3-r \quad рет)$ типті кезкелген элементар абелдік өрістің дискриминантын, өрістің дискриминантының жетекші дивизорлары туралы теореманы пайдаланып есептейік:

$$|D| = \prod_{i=1}^{3^r-1} d_i = \prod_{i=1}^{3^r-1} p_1^{\delta^*_{i1}} \cdots p_n^{\delta^*_{in}} = (p_1,..., p_n)^{3^{r-1}} = f^{3^{r-1}}.$$

Салдар. Кез келген r,n∈N, 1<r<n, натурал сандары үшін $N_3^{(r)}(n) = (3^r - 1)N_3^{(r)}(n-1) + N_3^{(r-1)}(n)$.

Дәлелдеуі 2-теоремадан тікелей шығады.

1. Болен А. Конструктивное описание абсолютно примарных циклических полей. Материалы 10-ой Межвузовской конференции по математике и механике. – Алматы: Издательство «ЭВЕРО», 2005. Том 1, с.147-153.
2. Болен А. Конструктивная реализация теоремы Кронекера-Вебера и ее приложения. Алматы, 2008, Материалы 12-ой межвузовской конференции по математике и механике.

ӘОЖ 37. 026. 9: 51-8

С. А. Джанабердиева, Ш. Абдураимова*

ТАРИХИ МӘЛІМЕТТЕРДІ МАТЕМАТИКА САБАҚТАРЫНДА ПАЙДАЛАНУ

*(Алматы қ, Абай атындағы ҚазҰПУ, *-студент)*

В работе рассматриваются некоторые актуальные проблемы развития профессионального мастерства будущих учителей математики современной школы с учетом внедрения исторических элементов на уроках математики. В статье говорится о методике применение исторических сведений для развития математико-логического, интеллектуального мышления учащихся средних школ на уроках математики. Применение исторических сведений на уроках математики развивает интеллект обучающихся, приближает математику к природе. Авторы, на основе исследования, приводят свою методику табличного решения задачи Б.Э.Ульямса, которая называется: «Задача о кокосовых орехах». Применение исторических сведений на уроках математики основывается на новых информационных технологиях и следующих методических концепциях: формирование математического мировоззрения, математической грамотности; внимание к психолого-педагогическим аспектам и привлечение интереса к математике учащихся, не любящих математику и др.

This work explores the problem of developing professional skills of the future mathematics teachers in modern schools with consideration of implementing historical elements in the mathematics lessons. The article discusses an application of historical data to develop mathematical and logical, intellectual thinking of secondary school students at the mathematics lessons. The use of historical data in the mathematics lessons develops an intellect of the students and brings mathematics closer to nature. The authors, based on the research, conduct their own methods of table solution of William's problem called "The Problem of coconuts". The usage of historical data in the mathematics lessons is based on new information technologies and the following methodological concepts: formation of mathematical comprehension, mathematical literacy, attention to psycho-pedagogical aspects and rising of interest to mathematics of the students who do not like math, etc.

Қазіргі заман мектеп математикасын оқыту үрдісінде тарихи элементтерді қосу мәселесі болашақ мұғалімдердің кәсіби шеберліктерін шыңдаудың көкейкесті мәселелерінің бірі болып табылады. Оқулықтармен қатар тарихи материалдар, қызықты есептер, әдеби кітаптар, сөздіктер, дидактикалық, энциклопедиялық материалдар, зерттеулердің нәтижелері, жаңа ақпарат құралдары, әдістемелік технологиялар, компьютерлік анимациялар, оргами т.б. қосымша материалдарды сабақ үрдісінде пайдалану қазіргі заман сабағының дәстүрлік сабақтан айырмашылықтарының бірі болып табылады. Көптеген классикалық, тарихи, қызықты есептер білім алушылардың логикалық ойлау қабілетін дамытумен қатар, олардың математикалық сөйлемдерді оңай түсінуіне жағдай жасайды және оларды қиын ситуацияларда дұрыс шешім қабылдауға үйретеді, математиканы табиғатпен байланыстырады.

«Философия көз алдымызда әрқашан ашық тұратын ұлы кітапқа жазылған (мен әлем жөнінде айтып отырмын), бірақ оны, ол жазылған тілді үйренбейінше және ол белгіленген белгілерді ажырата білмейінше, түсінуге болмайды. Ал, ол математика тілінде жазылған және оның белгілері үшбұрыштар, дөңгелектер және басқа математикалық фигуралар» – деп жазды орта ғасырдың ұлы ойшылы Галилео Галилей.

Оқушыларды есеп шығаруға қызықтырудың бір жолы оларды есептердің шығу тарихымен таныстыру болып табылады.

Мысал келтірейік. Физика-математикалық «Алгорифм» [1] журналында Шығыс Қазақстан облысы, Жарма ауданынан М.Мұқажановтың «Жұмбақ есеп жауабы» атты мақаласы жарияланған. Осы қызықты мақаласында автор Б.Э.Ульямстің «Кокос жаңғақтары» атты жұмбақ есебі жайында өте қызық мәліметтер келтірген. Ол, бұл есеппен айналысып жүрген қазақстандық зейнеткер ұстаз Балқаш Нақанов пен қарағандылық Серік Сағынтайдың және Қарағанды облысы Ақтоған ауылының Сәуле ауылының қойшысы Ермекбай Жолдыбеков ақсақалдың, қарапайым есептеулермен есептің $n-413$ үшін жауабын «Алаш үні» газетінде жариялағандығы жөнінде жазып, есептің қысқаша шешуі мен шығу тарихын келтірген.

Мектеп оқушысына осы қысқаша шешімді түсіну қиын болғандықтан Абай атындағы Қазақ ҰПУ-нің әдіскер-математигі, С.А.Джанабердиева есепті оңай түсінудің кестелік шешімін берген [2].

1-есептің тарихы. 1926 жылы 9-қарашада американдық «Сатедей ивнинг пост» газетінде Б.Э.Ульямстің «Кокос жаңғақтары» атты шағын әңгімесі жарияланған.

Мақаланың мақсаты тендер үшін жарыста қарсыластардың бірі екіншісінің осал жерлерін зерттеп, олардың «қызықты есептерді» шешуден есі кететіндіктерін байқаған да, газетке осы қиын есепті жариялаған. Газетке есептің жауабын талдау хаттары 20 жыл бойы толастамаған. Америка математигі Мартин Гарднер кезінде бұл есепті теріс сандарды қолдану арқылы шешіпті де, оны «Теріс жаңғақ әдісі» деп атайды [3].

1-есеп. Теңізде апатқа ұшыраған кемеден тірі қалған бес теңізші мен бір маймыл елсіз аралға жетіп, қоныстайды. Олар күндіз кокос жаңғақтарын жинап, кешке оларды бір жерге төгеді де, таңертең теңбе-тең бөліп алуға келісіп, ұйқыға кетеді. Түн ортасында бір теңізші оянып, жаңғақтардың үйіндісін беске бөлгенде бір жаңғақ артық қалады. Ол бір жаңғақты маймылға беріп, қалған жаңғақтар үйіндісінің өзіне тиісті бестен бір бөлігін тығып қояды да, қайтадан ұйқыға кетеді. Біраз уақыттан соң екінші ұры-теңізші оянып, қалған жаңғақтар үйіндісінің бестен бір бөлігін тығып, артылған бір жаңғақты маймылға беріп, ол да қайтадан ұйқыға кетеді. Осылай қалған үш теңізші де кезегімен оянып, сәйкесінше қалған жаңғақтар үйіндісінің бестен бірін тығып, артылған бір жаңғақтан маймылға беріп, содан соң қайтадан ұйқыға жатып отырады.

Таңертең оянған теңізшілер кішірейіп қалған жаңғақтардың үйіндісін көріп, дауласпай оны беске теңдей бөлісіп алады да, тағы да артылып қалған бір жаңғақты маймылға береді.

Теңізшілер жинаған жаңғақтардың жалпы санын және әр теңізші мен маймылға тиген жаңғақтар санын есептеңіз.

Шешуі. Жиналған жаңғақтардың жалпы санын n, бірінші теңізші ұрлаған жаңғақтар санын x және таңертең әділ бөлісуде әрбір теңізшіге тиесілі жаңғақтарды y деп белгілейік [2. – 67-69 бб.].

Сонда әрбір теңізшіден кейін қалған жаңғақтар санын қарастырайық (1,2,3,4,5-кестелер)

1-кесте – Бірінші теңізшінің жаңғақтарды бөлуі

Барлығы $n=5x+1$					
Маймылға берілген жаңғақ	Бірінші теңізші тыққан жаңғақтар саны	Қалғаны $4x$			
1	x	x	x	x	x

2-кесте – Екінші теңізшінің жаңғақтарды бөлуі

Барлығы $4x$					
Маймылға берілген жаңғақ	Екінші теңізші тыққан жаңғақтар саны	Қалғаны $4\cdot\frac{4x-1}{5}=\frac{16x-4}{5}$			
1	$\frac{4x-1}{5}$	$\frac{4x-1}{5}$	$\frac{4x-1}{5}$	$\frac{4x-1}{5}$	$\frac{4x-1}{5}$

3-кесте – Үшінші теңізшінің жаңғақтарды бөлуі

Барлығы $\frac{16x-4}{5}$					
Маймылға берілген жаңғақ	Үшінші теңізшінің тыққан жаңғақтарының саны	Қалғаны $4\cdot\frac{16x-9}{25}=\frac{64x-36}{25}$			
1	$\frac{\frac{16x-4}{5}-1}{5}=\frac{16x-9}{25}$	$\frac{16x-9}{25}$	$\frac{16x-9}{25}$	$\frac{16x-9}{25}$	$\frac{16x-9}{25}$

4-кесте – Төртінші теңізшінің жаңғақтарды бөлуі

Барлығы $\frac{64x-36}{25}$					
Маймылға берілген жаңғақ	Төртінші теңізші тыққан жаңғақтарының саны	Қалғаны $4\cdot\frac{64x-61}{125}=\frac{256x-244}{125}$			
1	$\frac{\frac{64x-36}{25}-1}{5}=\frac{64x-61}{125}$	$\frac{64x-61}{125}$	$\frac{64x-61}{125}$	$\frac{64x-61}{125}$	$\frac{64x-61}{125}$

5-кесте – Бесінші теңізшінің жаңғақтарды бөлуі

Барлығы $\frac{256x-244}{125}$					
Маймылға берілген жаңғақ	Бесінші теңізші тыққан жаңғақ саны	Қалғаны $4\cdot\frac{256x-369}{625}=\frac{1024x-1476}{625}$			
1	$\frac{\frac{256x-244}{125}-1}{5}=\frac{256x-369}{625}$	$\frac{256x-369}{625}$	$\frac{256x-369}{625}$	$\frac{256x-369}{625}$	$\frac{256x-369}{625}$

Бес ұры-теңізшіден кейін қалған жаңғақтар санын қарастырайық (6-кесте).

6-кесте – Бес ұры-теңізшіден кейін қалған жаңғақтар санын бөлу

Барлығы $\frac{1024x-1476}{625}$					
Маймылға	y	y	y	y	y
1	$\frac{\frac{1024x-1476}{625}-1}{5}=\frac{1024x-2101}{3125}$	$\frac{1024x-2101}{3125}$	$\frac{1024x-2101}{3125}$	$\frac{1024x-2101}{3125}$	$\frac{1024x-2101}{3125}$

Сонымен $\frac{1024x-2101}{3125}=y.$ Осыдан $1024x-2101=3125y,$ немесе $1024x-3125+1024=3125y,$ яғни $1024x+1024=3125y+3125.$ Ортақ көбейткіштерді

жақша сыртына шығарсақ: $1024(x+1)=3125(y+1)$. Енді $1024=2^{10}$, $3125=5^5$ екенін ескерсек 1024 мен 3125 өзара жай сандар болатынын көреміз. Ендеше $1024(x+1)=3125(y+1)$ теңдеуі орындалуы үшін $1024(k\cdot 3125)=3125(k\cdot 1024)$ орындалуы тиіс. Осыдан $\begin{cases} x+1=3125k \\ y+1=1024\cdot k \end{cases}$ яғни $\begin{cases} x=3125k-1 \\ y=1024\cdot k-1 \end{cases}$, (мұндағы $k\in N$) екені шығады. ($x=3125k-1$)-ді жаңғақтардың жалпы саны $(n=5x+1)$-ге апарып қойсақ: $n=5(3125\ k-1)+1=15625k-5+1=15625\,k-4$, яғни $n=15625k-4;\ k\in N$ және $y=1024\cdot k-1;\ k\in N$ шығады. Сонымен, жаңғақтардың мүмкін болатын ең аз жалпы саны $k=1$ болғанда: $n=15625\cdot 1-4=15621$ (жаңғақ), ал $y=1024\cdot 1-1=1023;\ k\in N$ болады екен.

Осыдан бірінші теңізшінің ұрлап алған жаңғақтарының саны: $\frac{15621-1}{5}=\frac{15620}{5}=3124$ (жаңғақ). Одан қалғаны: $15621-3124-1=12496$ (жаңғақ). Басқаша есептесек те: $3124\cdot 4=12496$ (жаңғақ). Ал екінші теңізшінің ұрлап алған жаңғақтарының саны: $\frac{12496-1}{5}=2499$ (жаңғақ). Екіншіден қалғаны: $4\cdot 2499=9996$ (жаңғақ). Енді үшінші теңізшінің ұрлап алған жаңғақтарының саны: $\frac{9996-1}{5}=1999$ (жаңғақ). Үшіншіден қалғаны: $4\cdot 1999=7996$ (жаңғақ). Төртінші теңізшінің ұрлап алған жаңғақтарының саны: $\frac{7996-1}{5}=1599$ (жаңғақ). Төртіншіден қалғаны: $4\cdot 1599=6396$ (жаңғақ). Бесінші теңізшінің ұрлап алған жаңғақтарының саны: $\frac{6396-1}{5}=1279$ (жаңғақ). Бесіншіден қалғаны: $4\cdot 1279=5116$ (жаңғақ).

Таңертең қалған жаңғақтарды тең бөліскенде әрбір теңізшіге тиген жаңғақтар саны: $\frac{5116-1}{5}=1023$ (жаңғақ). Яғни $y=1023$ (жаңғақ) екенін жоғарыда басқаша есептеп те көрсеткен едік.

Осыдан теңізшілердің ұрлап және «әділ» бөлісіп алған жаңғақтарның саны төмендегідей болады. Бірінші теңізші $3124+1023=4147$ (жаңғақ); екінші теңізші: $2499+1023=3522$ (жаңғақ); үшінші теңізші: $1999+1023=3022$ (жаңғақ); төртінші теңізші: $1599+1023=2622$ (жаңғақ) және бесінші теңізші: $1279+1023=2302$ (жаңғақ) алды. Ал маймылға барлығы 6 жаңғақ тиді.

Жауабы: Жаңғақтардың мүмкін болатын ең аз жалпы саны: 15621. Теңізшілердің сәйкес алған жаңғақтарының сандары: 4147, 3522, 3022, 2622, 2302. Маймылға жалпы 6 жаңғақ берілді.

2-есептің тарихы. Американың белгілі математигі Морис Клайн өзінің «Математика. Шындықты іздеу» [4] кітабында адамның интуициясының пайдалы және пайдасыздығы жөнінде көптеген мәліметтер келтірген. Психологияда интуицияға сенуге болатын жағдайлар көп. Ал, математикалық жағынан келгенде сенуге болмайтын интуицияның да болатынын айта кету керек. М.Клайнің мысалдарын біз тест түрінде құрып келтірейік.

2-есеп. Еркін түсіп бара жатқан нысанаға (мысалы алмаға) атылатын оқты нысанаға тигізу үшін

A) тура көздеу керек B) сәл төмен көздеу керек C) сәл жоғары көздеу керек
D) сәл солға көздеу керек E) сәл оңға көздеу керек

Шешуі: Еркін түсіп бара жатқан нысанаға (мысалы алмаға) атылатын оқты нысанаға тигізу үшін көбінесе, инструкторлар сәл төмен көздеуді ұсынады. Бірақ оқтың да нысанаға жеткенше еркін түсетінін ескерсек: тура көздеу керек.

Жауабы: А.

3-есептің тарихы. Төмендегі сұрақты кезінде атақты физик ғалым А.Эйнштейн ортаға қойған. А.Эйнштейн осы сұраққа әлемдегі 98% адам дұрыс жауап бере алмайды деп ойлаған. Енді сіз өзіңізді сынап көріңіз, мүмкін қалған 2% ішінде сіз бар боларсыз [5].

4-есеп. 1. 5 түрлі түске боялған 5 үй бар. 2. Әр үйдің иелері әр мемлекеттің адамдары. 3. Бұл 5 адамның әрқайсысы әртүрлі сусын ішеді, әртүрлі темекі шегеді, әртүрлі жануар асырайды. 4.Олардың сусындары, темекілері және бағатын жануарлары бір біріне ұқсамайды. *Белгілері:*

1.Ағылшын қызыл үйде тұрады.2.Швейцарлық бір ит асырайды. 3.Даниялық шай ішеді. 4. Жасыл үй ақ үйдің сол жағында. 5. Жасал үйдің иесі кофе ішеді. 6. PALL MALL маркалы темекі шегетін адам бір құс асырайды.7. Сары үйдің иесі DUNHILL темекісін шегеді. 8. Ортада орналасқан үйдің иесі сиыр сүтін ішеді. 9. Норвегиялық бірінші үйде тұрады. 10. Махорка шегетін адам мысық асырайтын адамның үйінің қасында. 11. Ат асырайтын адам DUNHILL темекісін шегетін адамның көршісі. 12. BLUE MASTER темекісін шегетін адам сыра ішеді. 13. Неміс PRINCE темекісін шегеді. 14.Норвегиялық көк үйдің көршісі. 15. Махорка шегетін адамның көршісі минералды су ішеді.

(Эйнштейн бұл есепті ересек адамдар үшін құрастырған. Метеп оқушыларына бергенде темекі орнына шоколадтардың атауын алған жөн)

Тапсырма: кім балық асырайтынын анықтаңыз.

Шешуі: Егер жасал үй мен ақ үйдің арасында үй жоқ десек, онда неміс балық асырайды (1-кесте). Ал, егер жасыл үй ақ үйдің сол жағында бола тұрып, арасында үй болса, онда даниялық (есептің басқа да шешулері бар) балық асырайтын болып шығады (2-кесте).

1-кесте - I Шешу нұсқасы

Мемлекет адамдары	Норвегиялық	Даниялық	Ағылшын	Неміс	Швейцариялық
Үйлерінің түсі	Сары	Көк	Қызыл	Жасыл	Ақ
Асырайтын жануары	Мысық	Ат	Құс	*Балық*	Ит
Сусындары	Мин. су	Шай	Сүт	Кофе	Сыра
Темекілері	DUNHILL	Махорка	PALL MALL	PRINCE	BLUE MASTER

2-кесте - II Шешу нұсқасы

Мемлекет адамы	Норвегиялық	Неміс	Швейцариялық	Ағылшын	Даниялық
Үйлерінің түсі	Жасыл	Көк	Ақ	Қызыл	Сары
Асырайтын жануарлары	Құс	Мысық	Ит	Ат	*Балық*
Сусындары	Кофе	Мин. су	Сүт	Сыра	Шай
Темекілері	PALL MALL	PRINCE	Махорка	BLUE MASTER	DUNHILL

Басқа шешімін табу білім алушылардың өздеріне ұсынылады. Сонымен балық асырайтындар: неміс немесе даниялық.

Жауабы: Неміс немесе даниялық.

Елімізде математика сабағын оқытатын кадрлардың кәсіптік құзіреттілігігін қалыптастыру – олардың пән бойынша білімін шыңдаумен қатар, жалпы интеллектуалдық ойлау кеңістігін кеңейтуді де талап етеді. Математика сабақтарында мектеп оқушыларының математикалық-логикалық, интеллектуалдық ойлауын дамыту үшін, тарихи, классикалық есептерді, ұлы математикатердің және басқа пән ғалымдарының маематика жөніндегі немесе адамгершілік т.б. адам бойындағы жағымды қасиеттері, фәлсафалық тұрғыдағы қанатты сөздері, математика тарихындағы қызықты оқиғалар, парадокстар мен шешімі жоқ есептерді, тарихи мәліметтерді пайдалану әдістемесінің осы орайда маңызы зор.

Математиканың мектептік курсында ғылым тарихының элементтерін жүйелі пайдалану оқушылардың пәнге деген ынтасын дамытуға, математиканы неғұрлым терең де берік игеруге, мектеп оқушыларының диалектикалық-материалистік дүниетанымын қалыптастыруға жәрдемдеседі. Сондай-ақ өз ұлтымыздан шыққан математиктер туралы әңгімелер оқушылардың өз еліне, Отанына мақтаныш сезімін тудырады.

1.Ж.Мұқажанов. Жұмбақ есеп жауабы // Республикалық ғылыми-көпшілік физика-математикалық «Алгорифм» журналы – № 4, 2008 – 20-22 бб.
2. Джанабердиева С.А. Қызықты математика – Алматы: Әрекет-принт, 2009 – 67-69 бб.
3. Гарднер М. Математические досуги / Пер. с англ. – М., 1972. – 100 с.
4. М.Клайн. Математика Поиск истины. – М.: РИМИС, 2007. – С.: 53-55.
5. Джанабердиева С.А. Қызықты математикадан тестер жинағы – Алматы: Әрекет-принт, 2009 – 61-106 бб.

ӘОК 37. 026. 9: 51-8

С.А. Джанабердиева, А.Ө. Ташкенбаева*

ТЕРЕҢДЕТІЛГЕН МЕКТЕПТЕРДЕ МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУДА ҚЫЗЫҚТЫ МАТЕМАТИКАНЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІН ПАЙДАЛАНУ

*(Алматы қ, Абай атындағы ҚазҰПУ, *-студент)*

В работе рассматривается применение элементов занимательной математики в процессе преподавания математики в углубленных школах. В статье говорится о необходимости внедрения в повседневный процесс урока в современной школе занимательных задач и задач повышенной сложности ведущих на поисковые, творческие работы, которые влияют на углубление учебного материала. А также в статье говорится о необходимости развития у детей интереса к математике посредством организации специальных, математических кружков по занимательной математике во внеурочное время. В статье еще говорится о необходимости поднятия уровня логического мышления талантливых детей, применяя элементы занимательной математики и развития их личности. Применение элементов занимательной математики в углубленных школах в процессе преподавания математики основываются на новых информационных технологиях и следующих методических концепциях: формирование математического мышления; обеспечение углубленной программы для способных учеников.

In this paper the application of entertaining mathematics' elements in the teaching of mathematics of advanced-learning schools is discussed.

The article speaks of the need to introduce entertaining tasks and tasks of high complexity leading to the search, creative works that affect the deepening of the educational material into the routine lesson of modern schools. Also the article highlights the need to develop children's interest in mathematics by providing special, mathematical circles for entertaining math after school. And the article speaks of the need to raise the level of logical thinking of the talented children, using elements of mathematics and development of their personality. Application of mathematic elements in the teaching of mathematics in advanced schools is based on new information technologies and the following methodological concepts: the formation of mathematical thinking, providing in-depth programs for outstanding students.

Қазіргі кезде білім беру саласында болып жатқан ауқымды өзгерістер түрлі ынталы бастамалар мен түрлендірулерге кеңінен жол ашуда. Осы тұрғыдан алғанда, ұрпақ тәрбиесімен айналысатын әлеуметтік-педагогикалық қызметтің тиімділігін арттыру, оны жаңа сапада ұйымдастыру қажеттігі туындайды. Сондықтан да, қазір мұғалімдердің алдындағы тұрған ең негізгі мәселе – білім беру үрдісін сапалы түрде ұйымдастыру. Математиканы сапалы түрде оқыту, одан терең білім беру –математика пәнінің әрбір ұстазының міндеті. Математика арнайы білім беру пәні ғана емес, сонымен қатар оқушының логикалық, интеллектуалдық ойлау қабілеттерін шыңдай түсетін, дүниетанымын кеңейтетін мықты құрал. Математика пәні мұғалімдерінің алдындағы тұрған басты міндет – оқушыларды математикаға қызықтыру. Мұндай мәселелер тереңдетілген мектептерге де қатысты.

Тереңдетілген мектептерде математиканы оқытуда қызықты математика элементтерін қолдану әдістемесінің бағыттарын қарастырайық.

1) Күнделікті сабақ барысында өтіліп жатқан материалды тереңдетуге ықпалын тигізетін ізденушілік, шығармашылық жұмыстарға жетелейтін қызықты да, күрделілігі жоғары есептерді енгізу.

2) Сабақтан тыс уақытта, арнайы, қызықты математикадан үйірмелер ұйымдастырып, балалардың математикаға деген қызығушылығын арттыру.

3) Қызықты математикадан тақырыптық, шығармашылық, ізденушілік жұмыстарын жүйелі түрде жүргізу – бұл қызықты математикадан ғылыми жоба жазу, ғылыми – практикалық, ғылыми теориялық конференцияларға қатысу.

4) Саралап және даралап оқыту нәтижесінде аса дарынды балаларды қызықты математика элементтерін пайдалана отырып, олардың логикалық ойлау дәрежесін жоғары дәрежеге жеткізу және тұлғаны дамыту.

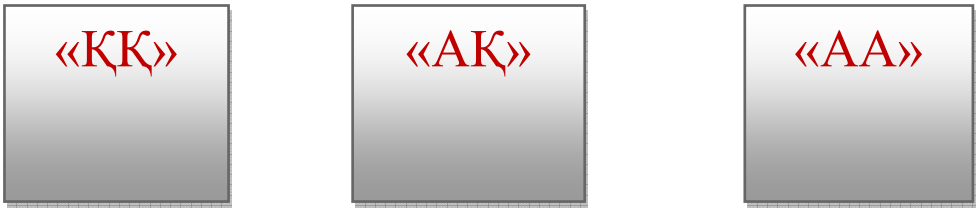
Оқушыларды мектеп қабырғасынан шығырмашылыққа, өздігінен ізденуге дағдыландырсақ, ол баланың келешегі үшін өте маңызды болып саналады. Біз оқушыларға қызықты математикалық есептерді беру нәтижесінде олардың логикасын ғана дамытып қоймай, өз өмірлерінде дұрыс шешім қабылдауға үйретеміз (қызықты деген сөздің өзі – сананы оятатын, зейін тудыратын, үйіріп әкететін дегенді білдіреді [1]). Ол үшін мұғалімдер арнайы уақыт бөліп, үйірмелер, элективті (таңдаулы) курстар ұйымдастыруы керек. Онда оқушылардың деңгейіне байланысты есептер таңдап алынуы керек. Тереңдетілген мектептердің оқушыларына қызықты математикадан Мартин Гарднердің [2] кітабынан есептер таңдап алуға болады. Сол кітаптан бірнеше мысалдар келтірейік.

Бірінші есеп ықтималдықтар теориясына негізделген логикалық есеп,

Жаңылыс кестелер. Сізде төменде үш қорапша бар деп елестетіңіз. Біреуінде екі қара шар,екіншісінде екі ақ шар,үшіншісінде бір ақ шар және бір қара шар орналасқан. Шарлардың түсіне байланысты сәйкес қорапшаларға «ҚҚ», «АҚ», «АА» жазулары жазылған, бірақ оны біреу шатастырып алғандықтан, қораптағы шарлар сыртындағы жазуға сәйкес болмай қалды (шатастырып алушы қорапшалардағы шарлардың бірін бірімен араластырмай, тек қорапшадан алып қорапшаға салады). Кез

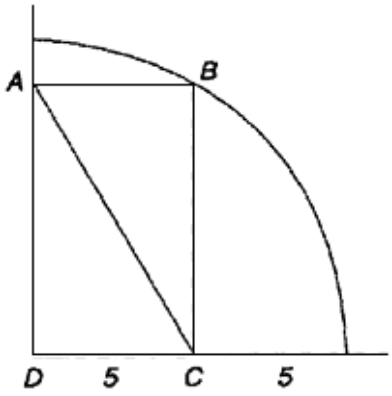
келген үш қорапшаның біреуінде қандай шар орналастырылғанын білу үшін, қорапшалардан бір-бір шардан суырып алып, көруге рұқсат, бірақ шарды қайтадан орнына орналастыру керек. Қорапшада орналасқан шарлардың қандай түсте екенін дәл айту үшін, ең аз дегенде қанша шар суырып алу керек екенін анықтаңыз (1-сурет).

Шешуі: Қорапшалардағы шарлардың түсін дәл айту үшін небары бір шар суырып алу жеткілікті. Мұндағы шешімнің кілті, сіздің қорапшалардағы шарлардың қорапша сыртындағы жазумен сәйкес келмейтінін білетіндігіңізде. Айталық, сіз «ҚА» деп жазылған қорапшадан бір шар суырып алдыңыз дейік. Онда екінші шар мүлдем ақ емес. Себебі, қорапша сыртындағы жазу мен шарлардың түсі сәйкес келмейді. Ондағы екінші шар қара. Екі қара шар орналасқан қорапшаны тапқаннан кейін, қалғандарын табу оңай. «ҚҚ» деп жазылған қорапшада екі ақ шар орналасқан, ал «АА»деп жазылған қорапшада бір қара, бір ақ шар орналасқан.



1-сурет – Қорапшалар

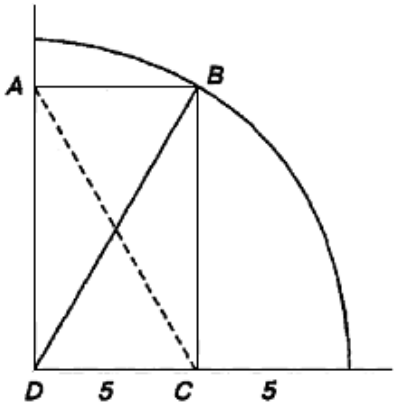
Екінші есеп геометрия курсына негізделген логикалық есеп. Тік бұрышты үшбұрыштың тік төбесін қамтитын шеңбермен шектелген дөңгелектің төрттен бір бөлігіне осы үшбұрыш салынған. Тек қана 2-суретте көрсетілген мәліметтерді пайдалану арқылы ғана AC гипотенузасының ұзындығын табыңыз. Ойлауға бір минут ғана уақыт беріледі.



2-сурет

Шешуі. AC кесіндісі ABCД тіктөртбұрышының диагоналі болып табылады. Ал ВД диагоналі радиусы 10 болатын шеңбердің радиусы. Тіктөртбұрыштың диагоналдары өзара тең болатындықтан, AC (3-сурет) да 10-ға тең болады [1].

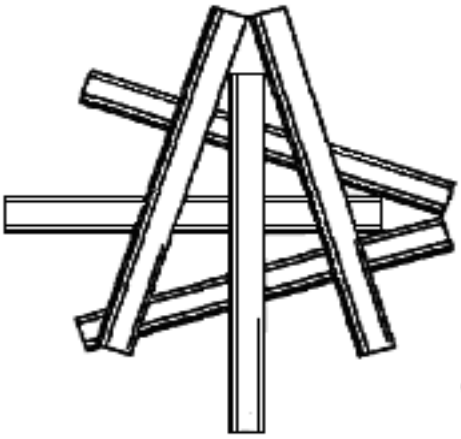
Үшінші есеп таза логикаға негізделген. *Жанасқан темекілер.* Төрт шардың кез келген біреуі қалған үшеуін жанайтындай етіп орналастыруға болады. Бес тиынның кез келген біреуі қалған төртеуін жанайтындай етіп орналастыруға болады. Алты темекінің кез келген біреуі қалған бесеуін жанайтындай етіп орналастыруға болатынын анықтаңыз.

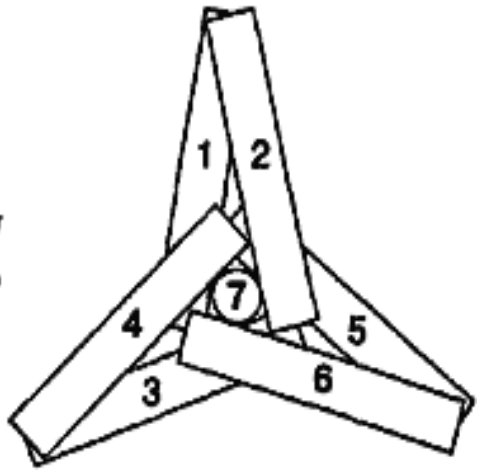


3-сурет

Шешуі. Есептің бірнеше шешімі бар (4-сурет). 5-суретте жеті темекінің кез келген біреуі қалған алтауын жанайтындай етіп орналастырылған. Суреттегі ортада тұрған жетінші темекіні алып тастасақ, онда есептің шешімі шығады. Яғни қалған алты темекі бірін-бірі жанайды.

Төртінші есеп физикамен тығыз байланысты. *Ерте келген жолаушы*. Қолында мезгілдік билеті бар жолаушы күн сайын станцияға сағат бесте келіп жетуге дағдыланған. Оның әйелі күйеуін машинамен алып кету үшін поезды күтіп алады. Бір күні жолаушы күндегі уақыттан бір сағат ерте жетіп, ауа райы тамаша болып тұрған соң әйеліне қоңырау шалмай жаяу жүруге бел буады. Ол үнемі әйелі жүретін жолмен жүріп келе жатып, әйелін кездестіріп, екеуі машинаға отырады. Жұбайлар күндегі уақыттан үйлеріне 10 минут ерте келеді. Жолаушының әйелі сағат бестегі поездға үлгеру үшін күнде сол жолмен және бірдей жылдамдықта жүреді. Жолаушы әйелін кездестіргенше қанша уақыт жаяу жүргенін анықтаңыз.

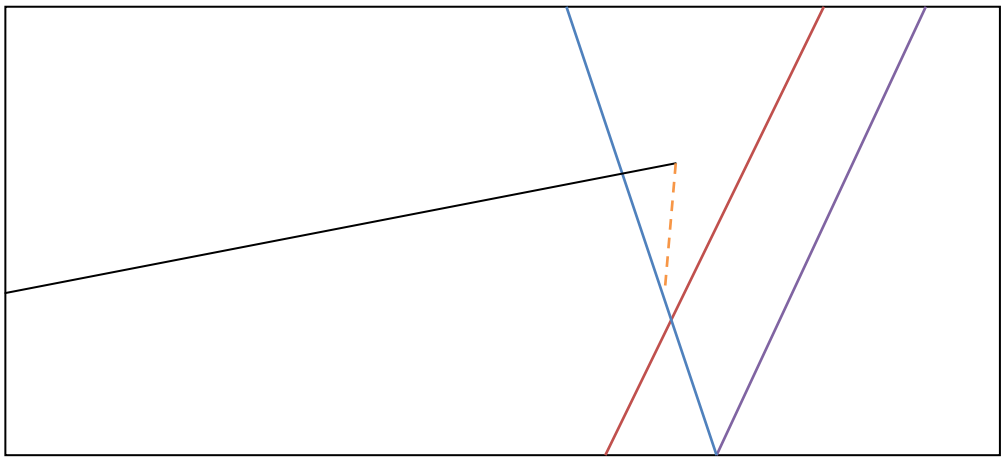

4-сурет



5-сурет

Шешуі. Жолаушының жылдамдығы, машинаның жылдамдығы, үй мен вокзалдың ара қашықтығы есептің шешімін табу үшін қажет емес. Егер осы шамаларды қарастыратын болсақ, онда есеп өте күрделі болып көрінеді, ал егер қозғалыстың суретін пайдалансақ, онда есептің шешімі жеңілдейді (6-сурет).

Станцияға ерте келіп жеткен жолаушы әйелін кездестіргенше 55 минут жаяу жүрді. Егер жұбайлар күндегі уақыттан 10 минут ерте келіп жетсе, онда жолаушының әйелі станцияға барып қайтқаннан 10 минут уақыт ұтады. Бұдан жолаушының әйелі күйеуін күнделікті уақыттан 5 минут ерте кездестіретіні, яғни ол күйеуін сағат 4-тен 55 минут кеткенде машинаға отырғызатыны шығады. Жолаушы станциядан сағат 4-те шығып кеткендіктен 55 минут жаяу жүрді.



6-сурет

Қызықты математика элементтерін қолдану оқушылардың қызығушылығын, логикалық ойлауын арттырады, оларды өз бетімен жұмыс істеуге үйретеді; білім, білік, дағдыларын қалыптастырады.

Оқушылардың өз күшіне сенімін арттыру, шығармашылық қабілетін дамыту үшін математика сабақтарының үрдісінде қызықты математика элементтерін пайдаланудың маңызы зор.

1. Словарь русского языка: в 4 томах / Акад. Наук СССР. Ин-т рус. яз. – М.: «Русский язык», 1985. – Т. I. – С.: 55-56.
2. Гарднер М. Математические досуги. – М.: «Мир», 1971. – С.: 105-125.

УДК 517.988.68+517.968.22

А.А. Ерденеева

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ОПТИМИЗАЦИОННОГО МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ГЕОЭЛЕКТРИКИ В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА

(*г.Алматы. КазНПУ имени Абая*)

Мақалада электромагниттік шегеннің өтімділігін анықтау есебі қарастырылады. Цилиндрлік координат жүйесіндегі Максвелдің теңдеулеріне арналған есеп қарастырылады. Кері коэффициентті есепті шешу үшін тиімділік әдісі құрастырылған. Градиент функционалды есептеу үшін формулалардың дискретті аналогы алынды. Сызықтық түйін жағдайындағы түйіндес есепті шешудің дискретті аналогы құралды.

The problem of determining the dielectric constant of the electromagnetic logging. We consider the formulation of the problem for Maxwell's equations in cylindrical coordinates. To solve the inverse conductivity problem using optimization method. Obtain a discrete analog of the formula for calculating the gradient of the functional. Constructed a discrete analog for solving the dual problem in the case of a line source.

Постановка задачи в случае линейного источника.

В качестве модели среды рассматривается цилиндрически-слоистая среда, электромагнитные параметры которой зависят только от расстояния до оси скважины-координаты r цилиндрический системы координат $\{r, \varphi, x_3\}$. Значение ε и σ считаем

постоянными в каждом цилиндрическом слое, окружающих скважину, но могут меняться от слоя к слою. Ось x_3 расположена по центру скважины и направлена вниз.

В качестве источника рассмотрим длинный кабель, направленный вдоль оси Ox_3. В момент времени $t=0$ включается ток, описывающейся функцией $q(t)$, например,

$$q(t)=0, t<0; \quad q(t)=1, t\geq 0.$$

Распространение тока в кабеле описывается функцией $\eta(r)$. Полагая, что кабель имеет большую длину и измерения в скважине происходят достаточно глубоко, можно пренебречь влиянием земной поверхности.

Процесс распространение электромагнитных волн в среде описывается системой уравнений Максвелла [1]:

$$rotH=\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}+\sigma E+j^{cm},\ rotE=-\mu\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Вектор плотности сторонних токов j^{cm}, при наших предположениях равен:

$$j^{cm}=(0,0,1)^T q(t)\eta(\sqrt{x_1^2+y_2^2})=(0,0,\gamma_3).$$

Считаем до момента времени $t=0$ ток в кабеле отсутствует, т.е

$$E\big|_{t<0}=0, \quad H\ \big|_{t<0}=0.$$

При такой постановке задачи функции $\varepsilon,\sigma,j^{cm}$ не будут зависеть от координаты x_3, поэтому E и H не зависит от x_3, тогда $E=(0,0,E_3)$, $H=(H_1,H_2,0)$.

$$\varepsilon\upsilon_{tt}+\sigma\upsilon_t=\frac{1}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\right)-g(r,t), \quad 0<t\leq T, 0<r<R, \tag{1}$$

$$\upsilon\big|_{t=0}=0, \quad \upsilon_t\big|_{t=0}=\frac{1}{\varepsilon}\eta q(0), \tag{2}$$

$$\upsilon_r\big|_{r=0}=0, \quad \upsilon\big|_{r=R}=0. \tag{3}$$

Дополнительная информация:

$$\upsilon(0,t;\varepsilon)=f(t), \quad 0<t\leq T. \tag{4}$$

Обратная задача состоит в определении коэффициента $\varepsilon(r)$ и $\upsilon(r,t;\varepsilon)$ из соотношений (1)-(4) по известной дополнительной информации (4).

Оптимизационный метод решения обратной задачи на дифференциальном уровне.

Пусть $p(r)$ - приближенное решение обратной задачи.

Рассмотрим функционал:

$$J(p)=\int_0^T[\upsilon(0,t;\varepsilon)-f(t)]^2\,dt. \tag{5}$$

Градиент функционала, имеет вид:

$$\nabla J(p^{(k)})=\int_0^T\upsilon_{tt}(r,t;p^{(n)})\cdot\psi(r,t;p^{(n)})dt, \quad n=1,2,..., \tag{6}$$

где: $\varphi(r,t)$ решение сопряженной задачи, вида:

$$p(r)\psi_{tt}-\sigma(r)\psi_t=\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\varphi\right), \tag{7}$$

$$\psi_r\big|_{r=0}=2[\upsilon(0,t;p)-f], \quad \psi(R,t)=0, \tag{8}$$

$$\psi\big|_{t=T}=0, \quad \psi_t\big|_{t=T}=0. \tag{9}$$

Далее получим формулы (5)-(9) на дискретном уровне. Для этого поступим следующим образом [2, 3]:

а) Область непрерывного изменения аргументов $Q=[0,T]\times[0,R]$ заменим сеточной $\Omega_h=\{(i\,h,\tau\,j),\ i=0,N,\ j=0,M,\ h=R/N,\ \tau=T/M\}$.

Аппроксимируем задачу (4)-(6) разностной схемой:

$$p_i y_{\overline{t}tt}+\sigma_i\, y_t=\frac{1}{\mu}\frac{1}{r_i}\left(r_{i-1/2}\,y_{\overline{r},i}\right)_{r,i}-g_i^j \quad i=\overline{1,N-1};\ j=\overline{2,M}\ .$$

$$y_i^0=0,\ \ y_{t,i}^0=\varepsilon^{-1}\eta^j q_0,\ \ y_0^j=y_1^j,\ \ y_N^j=0,\ \ j=2,M\ .$$

Дополнительная информация:

$$y_0^j=f^j,\ \ j=\overline{2,M}\ .$$

б) Рассмотрим дискретный аналог функционала (5), например следующего вида:

$$J[p]=\tau\sum_{j=1}^{M}\left[y_0^j\{p_i\}-f^j\right]^2\ .$$

в) Зададим приращение $p_i+\delta\,p_i$ и $\delta\,y_i=y_i^j(p_i+\delta p_i)-y_i^j\{p_i\}$. Относительно приращения $\delta\,y_i$, получим разностную задачу:

$$p\,\delta\,y_{\overline{t}tt}+\sigma\,\delta y_t=\frac{1}{\mu}\frac{1}{r_i}\left(r_{i-1/2}\,\delta\,y_{\overline{r},i}\right)_{r,i}-\delta\,p\,y_{\overline{t}tt}\,. \tag{10}$$

$$\delta\,y_i^0=0,\quad \delta\,y_i^1=0,\quad \delta\,y_0^j=\delta\,y_1^j,\quad \delta\,y_N^j=0\,. \tag{11}$$

г) Умножим обе части разностного соотношения (10) на сеточную функцию $\varphi_i^{\,j}$ и суммируем по j от 1 до M-1 и по индексу i от 1 до N-1 получим

$$\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=1}^{N-1}\left\{p_i\left(\delta\,y_{\overline{t}tt}\right)_i^j\varphi_i^j+(\sigma_i\,\delta\,y_t)\varphi_i^j\right\}=\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{\mu}\frac{1}{r_i}\left(r_{i-1/2}\,\delta\,y_{\overline{r},i}\right)_{r,i}\cdot\varphi_i^j-\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=1}^{N-1}\left(\delta\,p\,y_{\overline{t}tt}\right)\varphi_i^j\ . \tag{12}$$

Обозначим слагаемые через S_1 в левой части и S_2,S_3 в правой части в этом соотношении и преобразуем их в отдельности.

$$S_1=\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left\{p_i\left(\frac{\delta\,y_i^{j+1}-\delta\,y_i^j}{\tau}-\frac{\delta\,y_i^j-\delta\,y_i^{j-1}}{\tau}\right)\varphi_i^j+\sigma_i\,\frac{\delta y_i^{j+1}-\delta y_i^j}{\tau}\varphi_i^j\right\}=$$

$$=\frac{1}{\tau^2}\sum_{i=1}^{N-1}\{p_i(\varphi,\Delta\delta y)-p_i(\varphi,\nabla\delta y)+\sigma_i(\varphi,\Delta\delta y)\}.$$

Здесь обозначено:

$$\Delta\,y^j=y^{j+1}-y^j,\quad \nabla y^j=y^j-y^{j-1},$$

Далее применим к соотношению для S_1, разностные аналоги интегрирования по частям:

$$(y,\Delta\upsilon)=-(\upsilon,\nabla y)+y^M\upsilon^M-y^0\upsilon^1$$

$$(y,\nabla\upsilon)=-[\upsilon,\Delta y)+y^M\upsilon^{M-1}-y^0\upsilon^0$$

$$(y,\upsilon)=\sum_{j=1}^{M-1}y^j\upsilon^j,\ (y,\upsilon]=\sum_{j=1}^{M}y^j\upsilon^j$$

Учитывая условие (11) и полагая, что $\varphi_i^M=0,\quad \varphi_{\overline{t}t}^M=0$, получим

$$S_1=\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1}\delta\,y^i\,p_i\varphi_{\overline{t}t}+\sigma_i\delta\,y_i p_t\ . \tag{13}$$

Проведем преобразование для выражения S_2, раскрыв разностные производные имеем

$$S_2 = \sum_{j=1}^{M-1}\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{r_i}\left(r_{i+1/2}\frac{\delta y_{i+1}^{j+1}-\delta y_i^{j+1}}{h} - r_{i-1/2}\frac{\delta y_i^{j+1}-\delta y_{i-1}^{j-1}}{h}\right)\cdot\varphi_i^j =$$

$$= \sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{h^2 r_i}\left(r_{i+1/2}\cdot\Delta\delta y_i^{j+1}\varphi_i^j + r_{i-1/2}\cdot\nabla\delta y_i^{j+1}\varphi_i^j\right)$$

Используя разностные аналоги интегрирования по частям, имеем:

$$S_2 = \frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{M-1}\left\{-\frac{1}{r_i}r_{i+1/2}\left(\delta y_i^{j+1},\nabla\varphi_i^j\right] + \varphi_N\delta y_N^{j+1} - \varphi_0\delta y_1^{j+1} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{r_i}r_{i-1/2}\left(\delta y_i^{j+1},\Delta\varphi_i^j\right] - \delta y_{N-1}^{j+1}\varphi_M^j + \varphi_0\delta y_0^{j+1}\right\}$$

Раскрыв скалярные произведения, получим

$$S_2 = \frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{M-1}\left\{\left[-\sum_{i=1}^{N-1}\delta y_i^{j+1}\frac{1}{r_i}\left(r_{i+1/2}\nabla\varphi_i^j - r_{i-1/2}\Delta\varphi_i^j\right) - \varphi_0^j\delta y_1^{j+1} - \delta y_{N-1}^{j+1}\varphi_N^j +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \varphi_{N-1}^j\delta y_N^{j+1} + \delta y_0^{j+1}\varphi_1^j\right]\right.$$

Введем замену $j' = j+1$, имеем

$$S_2 = \frac{1}{h^2}\sum_{j'=1}^{M}\left[-\sum_{i=1}^{N-1}\delta y_i^{j'}\frac{1}{r_i}\left(r_{i+1/2}\nabla\varphi_i^{j'-1} - r_{i-1/2}\Delta\varphi_i^{j'-1}\right) -\right.$$

$$\left. - \varphi_0^{j'-1}\delta y_1^{j'} - \delta y_{N-1}^{j'}\varphi_N^{j'-1} + \varphi_{N-1}^{j'-1}\delta y_N^{j'} + \delta y_0^{j'}\varphi_1^{j'-1}\right] \qquad (14)$$

Рассмотрим оставшиеся выражении для S_3: $S_3 = \sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=1}^{N-1}\left(y_{\bar{t}t}\delta p_i\right)\varphi_i^j$.

Введем замену $j' = j+1$, получим

$$S_3 = \sum_{j'=2}^{M}\sum_{i=1}^{N-1}\delta p_i y_{\bar{t}t}^{j'}\varphi_i^{j-1} \qquad (15)$$

Запишем вспомогательную задачу (разностную сопряженную):

$$p_i\varphi_{\bar{t}t} - \sigma_i\varphi_t = \frac{1}{\mu}\left(r_{i-1/2}\left(\frac{1}{r_i}y\right)_{\bar{r}r}\right)_{r,i}, \quad j = \overline{M-2,1},\ i = \overline{1,N-1}, \qquad (16)$$

$$\varphi_i^M = 0, \quad \varphi_i^{M-1} = 0, \quad 0 \le i \le N, \qquad (17)$$

$$\frac{1}{\mu}\varphi_{r,0}^j = 2\left[y_0^j\{p_i\} - f^j\right], \quad j = M-2,\ldots,1. \qquad (18)$$

$$\varphi_N^j = 0, \quad j = M-2,\ldots,1 \qquad (19)$$

Подставляя (13), (14), (15) в (12) и учитывая условие (11), а также (16)-(19), получим, что

$$\nabla J(p_i) = \tau \sum_{j=1}^{M} y_{tt}^{j} \varphi_i^{j-1} .$$

1. В.Г.Романов, С.И.Кабанихин. Обратные задачи геоэлектрики. Москва: Наука, 1991. 304.
2. К.Т.Искаков, Ж.О.Оралбекова. Дискретный аналог оптимизационного метода решения обратной задачи для параболического уравнения. Караганда: Серия математика №2(58).2010.
3. А.А.Ерденеева, Г.А.Тюлепбердинова. Дискретный аналог оптимизационного метода для обратной задачи электродинамики в квазистационарном приближении. Караганда: Серия математика №2(58).2010.

УДК 517.988.68+517.968.22

А.А. Ерденеева

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ОПТИМИЗАЦИОННОГО МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОВОДИМОСТИ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ГЕОЭЛЕКТРИКИ

(*г.Алматы, КазНПУ им. Абая*)

Мақалада электромагниттік шегеннің өткізгіштігін анықтау есебі қарастырылады. Электромагниттік өрісі үшін катушкалық түйіннің аз өлшемі қолданылады. Модель ретінде цилиндрлік-қабатты орта қарастырылады. Кері есепті шешу үшін дискреттік деңгейдегі тиімділік әдісі құрастырылған. Түйіндес есептің дискретті аналогы және градиент функционалды есептеу үшін формулалардың дискретті аналогы алынады.

The problem of determining the conductivity for electromagnetic logging. To excite the electromagnetic field coil used source of small size. As a model of the environment is considered a cylindrically layered medium. To solve the inverse optimization method developed at the discrete level. Obtain a discrete analog of the formula for calculating the gradient of the functional and the discrete analogue of the dual problem.

Постановка задачи в случае кругового источника.

В качестве модели среды рассмотрим цилиндрически – слоистые среды, электромагнитные параметры которой зависят от расстояния до оси скважин координаты r - цилиндрической системы координат $\{r, \varphi, x_3\}$. Значение ε и σ - считаем постоянными в каждом цилиндрическом слое, окружающих скважину, но могут меняться от слоя к слою. Ось x_3 - расположена по центру скважины и направлена вниз.

Процесс распространения электромагнитных волн в среде описывается системой уравнения Максвелла [1]:

$$rotH = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E + j^{cm},\ rotE = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} . \qquad (1)$$

В качестве источника, рассмотрим: $j^{cm} = (0,\ 1,\ 0)^T g(x_1)\delta(x_3)\theta(t)$, где, $g(x_1)$, $\theta(t)$ - функции, описывающие распределение источника по переменным x_1, t - соответственно.

При этих предположениях в системе уравнений (1) ненулевыми останутся только три компоненты E_2, H_1, H_3. Далее исключив компоненты H_1, H_3, запишем исследуемое уравнение в цилиндрической системе координат:

$$\varepsilon \upsilon_{tt} + \sigma \upsilon_t = \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\upsilon)}{\partial r}\right) - \frac{1}{\mu}\left(\frac{\pi k}{R}\right)^2 \upsilon - F(r,t), \quad 0 < t \le T, 0 < r < R, \qquad (2)$$

$$\upsilon\big|_{t=0} = 0, \quad \upsilon_t\big|_{t=0} = 0, \qquad (3)$$

$$\upsilon_r\big|_{r=0} = 0, \quad \upsilon\big|_{r=R} = 0. \qquad (4)$$

Здесь: $\lambda^2 = \left(\frac{\pi k}{R}\right)^2$, $F = \eta(r) q'(t)$, $\upsilon(r,\varphi,t) = E_2(x_1, x_3, t)$, число R - максимальное расстояние, на которое может распространиться за время T от источника, сосредоточенного в области $|r| \le c_1$; $R = \frac{T}{\sqrt{\varepsilon \min \mu}} T c_1$.

Пусть относительно решения прямой задачи (2)-(4) известна дополнительная информация:

$$\upsilon(0,t;\sigma) = f(t). \qquad (5)$$

Обратная задача: По известной дополнительной информации (5) найти $\sigma(r)$ и $\upsilon(r,t;\sigma)$ из соотношений (2)-(4). Полагаем что, известны: $\varepsilon, \mu, g, \lambda^2$.

Оптимизационный метод решения обратной задачи на дифференциальном уровне.

Пусть $p(r)$ - приближенное решение обратной задачи. Введем в рассмотрение квадратичный функционал:

$$J(p) = \int_0^T [\upsilon(0,t;p) - f(t)]^2 dt. \qquad (6)$$

Минимизируем функционал (6) методом наискорейшего спуска:

$$p^{(n+1)}(r) = p^{(n)}(r) - \alpha_n \nabla J(p^{(n)}).$$

Здесь α_n - коэффициент спуска, $\nabla J(p^{(n)})$ - градиент функционала, которой имеет вид:

$$\nabla J(p) = \int_0^T \upsilon_t(r,t)\varphi(r,t) dt. \qquad (7)$$

Где: $\varphi(r,t)$ есть решение вспомогательной задачи, вида:

$$\varepsilon(r)\varphi_{tt} - p(r)\varphi_t = \frac{r}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\varphi\right) - \frac{1}{\mu}\lambda^2 \varphi(r,t), \quad (r,t) \in Q, \qquad (8)$$

$$\varphi(r,T) = 0, \quad \varphi_t(r,t)\big|_{t=T} = 0, \ 0 \le r \le R, \qquad (9)$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}\varphi\big|_{r=0} = 2[\upsilon(0,t;p) - f(t)], \ \varphi(R,t) = 0, \quad 0 < t \le T. \qquad (10)$$

Дискретный аналог оптимизационного метода.

Получим градиент (7) и сопряженную задачу (8)-(10) на дискретном уровне, по аналогии как в работах [2, 3]. Для этого поступим следующим образом:

а) Область непрерывного изменения аргументов $Q = [0,T] \times [0,R]$ заменим сеточной $\Omega_h = \{(i\,h, \tau\, j), \ i = 0, N, \ j = 0, M, h = R/N, \tau = T/M\}$.

Аппроксимируем задачу (2)-(4) разностной схемой:

$$\varepsilon_i y_{\overline{t}tt} + p_i\, y_t = \frac{1}{\mu}\frac{1}{r_i}\left(r_i y_{\overline{r},i}\right)_{r,i} - \frac{1}{\mu}\lambda^2 y_i^j - g_i^j \quad i=\overline{1,N-1};\ j=\overline{1,M-1}. \tag{11}$$

$$y_i^0 = 0,\ y_{t,i}^0 = 0,\ y_0^j = y_1^j,\ y_N^j = 0,\ j = 1, M-1. \tag{12}$$

Дополнительная информация:

$$y_0^j = f^j,\ j=\overline{1,M}. \tag{13}$$

б) Рассмотрим дискретный аналог функционала (6), например следующего вида:

$$J[p] = \tau\sum_{j=1}^{M}\left[y_0^j\{p_i\} - f^j\right]^2. \tag{14}$$

в) Зададим приращение $p_i + \delta p_i$ и $\delta y_i = y_i^j\left(p_i + \delta p_i\right) - y_i^j\{p_i\}$. Относительно приращения δy_i, получим разностную задачу:

$$\varepsilon\delta y_{\overline{t}tt} + p\,\delta y_t = \frac{1}{\mu}\frac{1}{r_i}\left(r_i\delta y_{\overline{r},i}\right)_{r,i} - \frac{1}{\mu}\lambda^2\delta y_i - \delta p\, y_t. \tag{15}$$

$$\delta y_i^0 = 0,\quad \delta y_i^1 = 0,\quad \delta y_0^j = \delta y_1^j,\quad \delta y_N^j = 0. \tag{16}$$

г) Умножим обе части разностного соотношения (15) на сеточную функцию φ_i^j и суммируем по j от 1 до M-1 и по индексу i от 1 до N-1 получим

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=1}^{N-1}\left\{\varepsilon_i\left(\delta y_{\overline{t}tt}\right)_i^j\varphi_i^j + \left(p_i\,\delta y_t\right)\varphi_i^j\right\} &= \sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{\mu}\frac{1}{r_i}\left(r_i\delta y_{\overline{r},i}\right)_{r,i}\cdot\varphi_i^j - \\ -\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=1}^{N-1}&\left\{\left(\delta p\, y_t\right)\varphi_i^j - \frac{1}{\mu}\lambda^2\delta y_i\varphi_i^j\right\}.\end{aligned} \tag{17}$$

Обозначим слагаемые через S_1 в левой части и S_2, S_3 в правой части в этом соотношении и преобразуем их в отдельности, имеем:

$$S_1 = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left\{\varepsilon_i\left(\frac{\delta y_i^{j+1} - \delta y_i^j}{\tau} - \frac{\delta y_i^j - \delta y_i^{j-1}}{\tau}\right)\varphi_i^j + p_i\,\frac{\delta y_i^{j+1} - \delta y_i^j}{\tau}\varphi_i^j\right\} =$$

$$= \frac{1}{\tau^2}\sum_{i=1}^{N-1}\left\{\varepsilon_i\left(\varphi, \Delta\delta y\right) - \varepsilon_i\left(\varphi, \nabla\delta y\right) + p_i\left(\varphi, \Delta\delta y\right)\right\}.$$

Здесь обозначено: $\Delta y^j = y^{j+1} - y^j$, $\nabla y^j = y^j - y^{j-1}$.

Далее применим к соотношению для S_1, разностные аналоги интегрирования по частям:

$$\left(y, \Delta\upsilon\right) = -\left(\upsilon, \nabla y\right) + y^M\upsilon^M - y^0\upsilon^1,\ \left(y, \nabla\upsilon\right) = -\left[\upsilon, \Delta y\right) + y^M\upsilon^{M-1} - y^0\upsilon^0,$$

где: $\left(y,\upsilon\right) = \sum_{j=1}^{M-1} y^j\upsilon^j$, $\left(y,\upsilon\right] = \sum_{j=1}^{M} y^j\upsilon^j$.

Учитывая условие (16), полагая, что $\varphi_i^{M-1} = 0,\quad \varphi_t^{M-1} = 0$, получим:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1}\delta y^i\varepsilon_i\varphi_{\overline{t}t} + p_i\delta y_i\varphi_t. \tag{18}$$

Проведем преобразование для выражения S_2, раскрыв разностные производные, имеем:

$$S_2 = \sum_{j=1}^{M-1}\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{r_i}\left(r_{i+1}\frac{\delta y_{i+1}^{j+1}-\delta y_i^{j+1}}{h}-r_{i-1}\frac{\delta y_i^{j+1}-\delta y_{i-1}^{j-1}}{h}\right)\cdot\varphi_i^j =$$

$$=\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{h^2 r_i}\left(r_{i+1}\cdot\Delta\delta y_i^{j+1}\varphi_i^j + r_{i-1}\cdot\nabla\delta y_i^{j+1}\varphi_i^j\right)$$

Используя разностные аналоги интегрирования по частям, имеем:

$$S_2 = \frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{M-1}\left\{-\frac{1}{r_i}r_{i+1}\left(\delta y_i^{j+1},\nabla\varphi_i^j\right]+\varphi_N\delta y_N^{j+1}-\varphi_0\delta y_1^{j+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r_i}r_{i-1}\left(\delta y_i^{j+1},\Delta\varphi_i^j\right]-\delta y_{N-1}^{j+1}\varphi_M^j+\varphi_0\delta y_0^{j+1}\right\}$$

Раскрыв скалярные произведения, получим

$$S_2 = \frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{M-1}\left\{\left[-\sum_{i=1}^{N-1}\delta y_i^{j+1}\frac{1}{r_i}\left(r_{i+1}\nabla\varphi_i^j - r_{i-1}\Delta\varphi_i^j\right)-\varphi_0^j\delta y_1^{j+1}-\delta y_{N-1}^{j+1}\varphi_N^j+\varphi_{N-1}^j\delta y_N^{j+1}+\delta y_0^{j+1}\varphi_1^j\right]\right.$$

Введем замену $j' = j+1$, имеем

$$S_2 = \frac{1}{h^2}\sum_{j'=1}^{M}\left[-\sum_{i=1}^{N-1}\delta y_i^{j'}\frac{1}{r_i}\left(r_{i+1}\nabla\varphi_i^{j'-1}-r_{i-1}\Delta\varphi_i^{j'-1}\right)-\right.$$

$$\left.-\varphi_0^{j'-1}\delta y_1^{j'}-\delta y_{N-1}^{j'}\varphi_N^{j'-1}+\varphi_{N-1}^{j'-1}\delta y_N^{j'}+\delta y_0^{j'}\varphi_1^{j'-1}\right]. \tag{19}$$

Рассмотрим оставшиеся выражении для S_3 $S_3 = \sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=1}^{N-1}\left\{\left(y_t\delta p_i\right)\varphi_i^j-\frac{1}{\mu}\lambda^2\delta y_i^j\varphi_i^j\right\}$.

Введем замену $j' = j+1$, получим

$$S_3 = \sum_{j'=2}^{M}\sum_{i=1}^{N-1}\left\{\delta p_i y_t^{j'}\varphi_i^{j-1}-\frac{1}{\mu}\lambda^2\delta y_i^j\varphi_i^j\right\}. \tag{20}$$

Запишем вспомогательную задачу (разностную сопряженную):

$$\varepsilon_i\varphi_{\bar{t}t}-p_i\varphi_t = \frac{r_i}{\mu}\left(\frac{1}{r_i}\varphi_{\bar{r}}\right)_{r,i}-\frac{1}{\mu}\lambda^2\varphi_i^{j-1},\quad j=\overline{M-2,1},\ i=\overline{1,N-1}\ , \tag{21}$$

$$\varphi_i^{M-1}=0,\quad \varphi_t^{M-1}=0,\quad 0\le i\le N, \tag{22}$$

$$\frac{1}{\mu}\varphi_{r,0}^j = 2\left[y_0^j\{p_i\}-f^j\right],\quad j=M-2,...,1. \tag{23}$$

$$\varphi_N^j=0,\quad j=M-2,...,1 \tag{24}$$

Подставляя (18), (19), (20) в (17) и учитывая условие (16), а также (21)-(24), получим, что дискретный аналог градиента, имеет вид: $\nabla J\left(p_i\right)=\tau\sum_{j=1}^{M}y_t\varphi_i^{j-1}$.

1. В.Г.Романов, С.И.Кабанихин. Обратные задачи геоэлектрики. Москва: Наука, 1991. 304.
2. К.Т.Искаков, Ж.О.Оралбекова. Дискретный аналог оптимизационного метода решения обратной задачи для параболического уравнения. Караганда: Серия математика №2(58).2010.

3. А.А.Ерденеева, Г.А.Тюлепбердинова. Дискретный аналог оптимизационного метода для обратной задачи электродинамики в квазистационарном приближении. Караганда: Серия математика №2(58).2010.

УДК 517.9

Б. Жакашбаев, С.А. Исаев

ПОЧТИ МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

(*г.Алматы, КазГосЖенПУ*)

Белгілі бір бос бөлігі бірдей елеулі сызықсыз бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер системасының көп периодты дерлік шешімі бар екен дәлелдеген. Сонымен бірге оның жалғыз болуының жеткілікті шарттары алынған.

Бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің үзіліссіз жалғыз шешімінің бар болуының теоремасы дәлелденген және осы теңдеуге байланысты баға алынғаны көрсетілген. Леммалар дәлелденіп, қолданылатын жерлері көрсетілген.

This article is about uninterrupted dependence almost many periodical on the system equalization in private of derivative vector determined of operator. The theorem of existence is proved and the estimation almost multiperiodic systems of the equations in private derivatives is received. The proof of a lemma specifies a scope. The sufficient condition is received. Existence of the unique decision of systems of the differential equations in private derivatives is proved. Estimations are received.

Рассмотрим векторно-матричное линейное уравнение

$$Dx = P(t,\varphi,\psi)x \tag{1}$$

где $x-n-$вектор $P(t,\varphi,\psi)$- квадратная матрица размерности $n\times n$.

Матирцант уравнение (1), при $t=t_0$ обращающийся в единичную $n\times n$ матрицу E, будем искать как решение матричного интегрального уравнения

$$X(t_0,t,\varphi,\psi)=E+\int_{t_0}^{t}P[S,\lambda(s,t,\varphi,\psi,\varepsilon),\xi(s,t,\varphi,\psi,\varepsilon)]\chi[t_0,s,\lambda(s,t,\varphi,\psi,\varepsilon),\xi(s,t,\varphi,\psi,\varepsilon)]ds. \tag{2}$$

Пусть матрица $P(t,\varphi,\psi)$ удовлетворяет условиям (S_2):

1) ограничена и равномерно непрерывна при всех $(t,\varphi,\psi)\in R^{1+m+k}$.

2) имеет ограниченные и равномерно непрерывные частные производные первого порядка по координатам векторов

$$\varphi\in R^m,\quad \psi\in R^{\kappa};$$

3) относительно t,φ почти много периодичны с $\eta-$вектор – почти периодом (τ,v) равномерно по $\psi\in R^{\kappa}$.

При выполнение условий (S_2) имеют место неравенства

$$\|P(t,\varphi,\psi)\|\le P_0,\quad \|P(t,\overline{\varphi},\overline{\psi})-P(t,\varphi,\psi)\|\le P_1(\|\overline{\varphi}-\varphi\|+\|\overline{\psi}-\psi\|), \tag{3}$$

где P_0,P_1- положительные постоянные.

Матирцант $X(t_0,t,\varphi,\psi)$ можно представить в виде суммы ряда

$$X(t_0,t,\ ,w)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}X^{(\kappa)}(t_0,t,\ ,w), \tag{4}$$

члены которого определяются из следующих рекуррентных соотношений:

$$X^0(t_0,t,\quad,ш)=E^n$$

$$X^{(k)}(t_0,t,\ \varphi,\psi)=\int_{t_0}^{t}P[S,\lambda(s,t,\varphi,\psi,\varepsilon),\xi(s,t,\varphi,\psi,\varepsilon)]\times X^{(k-1)}[t_0,s,\lambda(s,t,\varphi,\psi,\varepsilon),\xi(s,t,\varphi,\psi,\varepsilon)]ds$$

$$(\kappa=1,2,3,\ldots) \qquad (5)$$

Из рекуррентных соотношений (5) имеем

$$\left\|X^0(t_0,t,\quad,ш)\right\|=1,$$

$$\left\|X^1(t_0,t,\quad,ш)\right\|=P|t-t_0|$$

$$\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left\|X^0(t_0,t,\quad,ш)\right\|\le\frac{P^k|t-t_0|^k}{k!}$$

$$\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

При условии $|t-t_0|\le N$ *где* $N-$ достаточное большое положительное число, получим можарантный ряд

$$1+PN+\frac{P^2N^2}{2!}+\ldots+\frac{P^kN^k}{k!}+\ldots=e^{PN}$$

Отсюда заключаем, что матричный ряд (4), представляющий собой матрицент уравнения (1), сходится абсолютно и равномерно при

$$|t-t_0|\le N\ .$$

Предположим, что матрицант $X(t_0,t,\ \varphi,\psi\ )$ допускает расцепление в виде

$$X=X^-+X^+$$

где X^- *и* X^+ являются частными решениями векторно-матричного аналога уравнения (1), удовлетворяющие условиями

$$\begin{aligned}&\left\|X^-=(t_0,t,\quad,ш)\right\|\le Be^{-г(t-t_0)}\quad при\quad t>t_0;\\&\left\|X^+=(t_0,t,\quad,ш)\right\|\le Be^{г(t-t_0)}\quad при\quad t<t_0;\end{aligned}\qquad(6)$$

с постоянными $B\ge1,\ \gamma>0.$

Составим матрицу

$$X^*(t_0,t,\quad,ш)=\begin{cases}X^-=(t_0,t,\quad,ш) & при\quad t>t_0;\\X^+=(t_0,t,\quad,ш) & при\quad t<t_0;\end{cases}\qquad(7)$$

Кроме того, положим, что

$$X^*(t-0,t,\ \varphi,\psi\ )-X^*(t+0,t,\ \varphi,\psi\ )=E\ ,\qquad(8)$$

где $E-$ единичная матрица размерности, *n*. Очевидно, что матрица X^* при $t\ne t_0$ удовлетворяет уравнению (1).

При выполнении условий (7) и (8) векторно-матричное уравнение (1) называется некритическим относительно класса $H_n(\Delta,\partial)$. Объединив условия (7), (8), можно написать условия некритичности более компактно следующим образом

$$\left\|X^*(t_0,t,\quad,ш)\right\|\le Be^{-г|t-t_0|}\quad при\quad t\ne t_0,\qquad(9)$$

$$X^*(t-0,t,\quad,ш)-X^*(t+0,t,\quad,ш)=E.$$

<u>Замечание</u> I. Для линейной неоднородной системы задача Коши

$$Dx=P(t,\ \varphi,\psi\ )x+W(t,\ \varphi,\psi\ ),\qquad(10)$$

$$x(t_0,\ \varphi,\psi) = x^0(\varphi,\psi)$$

где $W(t,\ \varphi,\psi\ ) \in C^{(0,1,1)}_{(t,\ \varphi,\psi\ )}\left(R^{(1+m+k)}\right)$, имеет решение, которое представляется формулой

$$x(t,\ \ ,ш) = X^0(t_0,t,\ \ ,ш)x^0\left[л(t_0,t,\ \ ,ш), o(t_0,t,\ \ ,ш)\right] +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} X^{*}(s,t,\ \ ,ш)W\left(S, л(s,t,\ \ ,ш)\right), o(s,t,\ \ ,ш)]ds\ .$$

Замечание 2. Если матрица $P(t,\ \varphi,\psi\ ) \equiv P$ постоянна то из (4) следует что

$$X(t_0,t,\varphi,\psi) = e^{p(t-t_0)}$$

и некритичность уравнения (1) означает, что все собственные значения матрицы P имеют отличные от нуля вещественные части

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i(P) \neq 0 \qquad \left(\forall i = \overline{1,m},\ m \le n\right).$$

Рассмотрим некоторые свойства матрицанта линейного уравнения (1) при выполнении условий (S_1) $и$ (S_2).

Лемма 1. Если матрицант уравнения (1) удовлетворяет условию некритичности $(8),(9)$, то при $0 < \varepsilon < \dfrac{\gamma}{4\beta B} < \varepsilon_0$ имеет место оценка

$$\left\|\frac{\partial X^*}{\partial \varphi}\right\| + \left\|\frac{\partial X^*}{\partial \psi}\right\| \le B^* e^{-\frac{\gamma}{2}|t-t_0|} \qquad (11)$$

для всех $\varphi,\psi \in R^{m+k}$ где $B^* = \dfrac{2B^2}{\gamma} \cdot P_1,\ L = 2B \cdot \gamma^{-1}$, а норма левой части (11) означает сумму норм производных матрицы X^* по всем координатам вектора φ,ψ.

Теорема 1. Если линейная система (1) некритическая и выполнены условия (S_1) $и$ (S_2) то для всех $\varepsilon \in \left[0,\bar{\varepsilon}\right],\ \mu \in \left[0,\bar{\mu}\right]$

Система (10) допускает единственное почти многопериодическое по части переменных решение $f^*(t,\ \ ,ш)$ из класса $H_n(\Delta,\partial)$.

1. Митропольский Ю.А , Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике.М.,1973.512с
2. Боголюбов Н.Н, Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.М.,1968.408с
3. Умбетжанов.Д.У. Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных.Алма-Ата,1979.211с.

УДК 511.348

Т.Т. Исмагамбетов

О БИНАРНОЙ ПРОБЛЕМЕ ГОЛЬДБАХА И ЭЙЛЕРА

(*г. Алматы, ТОО «Respect LLC»*)

"Гольдбах және Эйлер бинарлы проблемасы туралы" атты мақаласында a және b қосындыларының үйлесім қолданылды, мұнда a және b жай сандары болып табылады. Сонымен қатар, 4 пен 6 қоса, жұп сандарында $a + a = 2p$ теңдік бар. $2p = a_{min} + b_{max}$, $2p = a_{min + x} + b_{max}$, $2p = a_{max} + b_{max}$ теңдіктерінің бірі болса, $2p \geq 10$ жұп сандары нәтижесінде болып шығады. a және b үйлесім қолданылғанда Лемма 1 дәлелденді: Әр $2p > 6$ жұп саны кем дегенде C^2_n біреуінің $2p = a + b$ үйлесуінде болып шығады.

Лемма 2 анықтамасы бойынша, әр $2p \geq 14$ жұп саны екі жай санды бір мәрте қосуынан артық болып шығады. Екіден көп әр жұп саны екі жай сан қосуынан болып шығатынынды көрсете аламыз. Осы жолмен Гольдбах және Эйлер бинарлы проблемасы дәлелі ұсынылды.

In the article "On Goldbach and Euler's binary problem" combinations $a + b$, where a and b are prime numbers, are applied. In addition, some even numbers $2p$, including 4 and 6, satisfy the equality $a + a = 2p$. Even numbers $2p \geq 10$ are obtained if one of the equalities $2p = a_{min} + b_{max}$, $2p = a_{min + x} + b_{max}$, $2p = a_{max} + b_{max}$ holds. The application of combinations $a + b$ leads to proving of the Lemma 1: any even number $2p > 6$ is obtainable in at least one combination $a + b$ in one of $C2(n)$. The 2nd Lemma defines more exactly that every even number $2p \geq 14$ can be obtained in more than one case of addition of primes. Thus, any even number $2p \geq 4$ can be represented as a sum of two prime numbers. Therefore, the proof of Goldbach and Euler's binary problem is proposed.

Известно открытие пифагорейцев: «Четное число равно сумме двух нечетных чисел». «Каждое четное число большее двух можно представить в виде суммы двух простых чисел» - формулировка бинарной проблемы Гольдбаха и Эйлера исключает сложение с составными нечетными и псевдопростыми числами. Доказательство бинарной проблемы будет представлено исследованием сочетаний двух разных простых чисел и случаев, когда таковое сочетание невозможно. Тем самым будет определена возможность иметь один и более чем один случай сложения двух простых чисел.

Условия. Единственное четное число, являющееся простым, есть число 2. Наименьшим составным нечетным числом является 9. Существуют псевдопростые числа, наименьшее из которых число 341 (частное от деления 341 на 11 есть число 31), открытое Ф.Саррусом в 1820 г. Хотя каждое четное число можно представить суммой четных чисел, но не все нечетные числа есть простые числа.

Сочетания простых чисел *a* и *b* в качестве слагаемых. Сложение числа 2 с другим простым числом имеет результатом нечетное число, исключая $2 + 2 = 4$. Поэтому слагаемыми для получения четных чисел больших 4 являются любые из простых чисел a и b, исключая число 2. Таким образом, имеет место $3 \leq a < b$. Существует множество простых чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 и т.д. до бесконечности. Помимо этого, не имеет значения порядок расположения $a + b$ или $b + a$. Важно следующее умозаключение: имеют место не перестановки (permutation) n-ного количества простых чисел по n, и не размещения в различном порядке двух простых чисел, а сочетания двух слагаемых a и b из n-ного количества простых чисел. Применима формула $C^2_n = n(n - 1) : (1 \cdot 2)$, где n есть количество простых чисел в данном сочетании.

Первым четным числом большим чем 4 является число 6.

Не относится к сочетаниям a и b получение четного числа при сложении $a + a$, например, 6 = 3 + 3, 10 = 5 + 5, 14 = 7 + 7.

Для трех первых простых нечетных чисел 3, 5, 7 имеем C^2_3 :

8 = 3 +5, 10 = 3 + 7, 12 = 5 +7.

Обозначим четное число как $2p$. Определяем сумму $2p_{max}$ на основе значений a_{max} и b_{max}, двух последних в порядке возрастания простых чисел в C^2_n.

В данном сочетании трех первых простых нечетных чисел $2p_{max}$= 5 + 7 = 12, так как a_{max} = 5 и b_{max} = 7. Подсчитаем количество сочетаний в $C^2_3 = 3{\cdot}2 : (1{\cdot}2) = 3$. Так как $a < b$, b_{max} = 7, то получая 8 = 3 + 5 имеем слагаемые a_{min} = 3, b_{min} = 5. То есть $8 = a_{min} + b_{min}$.

В случае следующих в порядке возрастания простых нечетных чисел 3, 5, 7, 11 имеем их сумму $2p_{max}$ = 7 + 11 = 18, где a_{max} = 7, b_{max} = 11 и получаем C^2_4:

8 = 3 + 5, 10 = 3 + 7, 12 = 5 + 7.

14 = 3 + 11, 16 = 5 + 11, 18 = 7 + 11.

Имеем $C^2_4 = 4{\cdot}3 : (1{\cdot}2) = 6$. Как видно, C^2_3 есть часть C^2_4.

В сочетании трех простых чисел 3, 5, 7 имели место a_{min} = 3, $b_{\max}$ = 7.

Когда имеем сочетание четырех простых чисел 3, 5, 7, 11, то a_{min} = 3, a_{max} = 7, $b_{\max}$.= 11. При этом в силу коммутативности сложения всегда имеем $a < b$. Большее слагаемое становится b, а меньшее становится a. Например, в равенстве 3 + 5 = 8 имеем, что число 5 есть b, но в равенстве 5 + 7 = 12 число 5 есть слагаемое a.

Если имеем C^2_5, то $2p_{max}$ = 24 = 11 + 13 и вышеприведенное C^2_4 дополняется:

16 = 3 + 13, 18 = 5 + 13, 20 = 7 + 13, 24 = 11 + 13.

Имеем C^2_5. = 5·4 : (1·2) = 10. Полученные в C^2_4 четные числа 16 = $a_{min\,+1}$ + $b_{\max}$ = 5 + 11, 18 = a_{max}+ $b_{\max}$ =7 + 11 дополняются в C^2_5 тем, что 16 = 3 + 13, 18 = 5 + 13. Обратим внимание, что для C^2_4 сумма 16 = 3 + 13 представляется как $2p = a_{min} + b_{max\,+\,1}$, а 18 = 5 + 13 в качестве $2p = a_{min\,+1} + b_{max\,+\,1}$, поскольку в C^2_4 имело место b_{max} = 11. Для C^2_4 простое число 13 как следующее за простым числом 11 есть $b_{max\,+\,1}$, первое из $b_{max\,+\,y}$, а число 5 для C^2_4 есть $a_{min\,+\,1}$, первое из $a_{min\,+\,x}$,

Заметим, что четные числа $2p \geq 10$ получаем, когда имеет место одно из равенств $2p = a_{min} + b_{max}$, $2p = a_{min\,+\,x} + b_{max}$, $2p = a_{\max} + b_{max}$. То есть имеет место $a + b_{max}$. В вышеприведенных сочетаниях $a + b$ получаемы четные числа, большие 6. В C^2_5 не получено число 22, так как при имеющемся b_{max} в сложении с имеющими место a не получаемо $22 = a + b$. Имеем 22 = 9 + 13, где 9 составное число.

Лемма 1. ***Для каждого четного числа $2p > 6$ имеется хотя бы одно C^2_n,*** **в которых получаем это число как $2p = a + b$.**

Пусть имеется $2p \geq 22$, удовлетворяющее условию $2p \leq a_{max} + b_{max}$, но в данном C^2_{n-2} не получено ни $2p = a_{min} + b_{max}$, ни $2p = a_{min\,+\,x} + b_{max}$, ни $2p = a_{max} + b_{max}$.

Достоверно, что данное число $2p < a_{max} + b_{max}$. Предположим: получим его в C^2_{n-1}. Доказательство: Если в C^2_{n-2} не получено какое-то $2p \geq 22$, то это четное число получаемо, когда одно из слагаемых есть составное нечетное, либо псевдопростое число.

Преобразуем слагаемое, не являющееся простым числом, в $a + d$, где a есть простое число, d есть четное число. Тогда = $a + d + b_{max} = a + b_{max} + d$.

Каждое d в $a + d$ есть «шаг» между простым числом и нечетным числом, не являющимся простым, например, d = 2 есть «шаг» от 7 до 9, d = 4 есть «шаг» от 5 до 9, а d = 6 есть «шаг» от числа 3 до 9, d = 34 есть «шаг» от 5 до 39. Согласно списка простых чисел до 6000 [1], t как своеобразные «шаги» от простого числа к большему следующему простому числу равны 2, 4, 6, 8, …, 32, 34…, где t = 32 есть «шаг» от числа 5591 до числа 5623, t = 34 есть «шаг» от числа 1327 до числа 1361.

Сравнение показывает, что d и t равны 2, 4, …, 32, 34… Поэтому для упомянутого числа $2p \geq 22$ хотя бы некоторые d в $a + d$ равны t, «шагам» от b_{max} к b_{max+y}. Например, для числа 22 = 9 + 13 имеют место d = 2, 4, 6 в преобразовании числа 9 в $a + d$ и t = 4, 6 как «шаги» от $b_{max} = 13$ к $b_{max+y} = 17$ и $b_{max+y} = 19$. Если имеет место d в $a + d$, но не существует равного ему t, «шага» от b_{max} к b_{max+y}, то предполагаемое $b_{max} + d$ есть составное нечетное, например, $b_{max} + d = 13 + 2 = 15$, либо псевдопростое число.

Поскольку лишь некоторые d в $a + d$ равны t, «шагам» от b_{max} к b_{max+y}, то следует, что именно эти $d = t$ приводят к получению простого числа $b_{max+y} = d + b_{max}$.

Пусть не существует $d = t$ для числа $2p \geq 22$, $d \neq t$. Но это предположение означает, что все предполагаемые $b_{max} + d$ есть составные нечетные, либо псевдопростые числа. Поскольку ни одно $b_{max} + d$ не есть простое число, и так как d = 2, 4, …, 32, 34…, то под вопросом бесконечность простых чисел, имеющая место в b_{max+y}. Допущение о всех $d \neq t$ неверно, ибо противоречит бесконечности простых чисел доказанной Евклидом.

Следовательно, для числа $2p \geq 22$ из имеющихся d хотя бы одно d равно t и, значит, имеет место равенство $b_{max+y} = d + b_{max}$. Тогда имея простое число a из $(a + d)$, получаем искомое четное число $2p$ в одном из равенств $2p = a_{min} + d + b_{max}$, $2p = a_{min+x} + d + b_{max}$.

В последующем сочетании C^2_{n-1} это простое число b_{max+y} может быть b_{max}. В C^2_{n-1} этому b_{max} соответствует другое чем в C^2_{n-2} число a_{max}, так как $a < b$, a_{max} и b_{max} есть два последних в порядке возрастания простых числа. Тогда в C^2_{n-1} получаем искомое четное число как $2p = a_{min} + b_{max}$, либо как $2p = a_{min+x} + b_{max}$.

Вывод: каждое четное число $2p > 6$ получаемо как $2p = a + b$ в некоторых, пусть даже в одном из сочетаний C^2_n.

Неполученное в C^2_5 число 22 получаемо как $22 = a_{min+x} + b_{max} = 5 + 17$ в сочетании C^2_6, когда $2p_{max} = a_{max} + b_{max} = 13 + 17 = 30$. Число $22 = a_{min} + b_{max} = 3 + 19$ в сочетании C^2_7, когда $2p_{max} = a_{max} + b_{max} = 17 + 19 = 36$.

Имеют место $d = t = 4$ и $d = t = 6$ в получении $a + d$ и $b_{max} + d = b_{max+y}$. По отношению к C^2_5 $22 = 5 + 17$ есть $2p = a_{min+x} + b_{max+y}$, а $22 = 3 + 19$ есть $2p = a_{min} + b_{max+y}$.

Лемма 2. ***Любое четное число $2p \geq 14$ получаемо более чем в одном случае сложения простых чисел***.

Пусть четное число $2p \geq 14$ в C^2_{n-1} получено как $2p = a_{min} + b_{max}$, либо $2p = a_{min+x} + b_{max}$, либо $2p = a_{max} + b_{max}$.

Доказательство: В последующем сочетании C^2_n имеет место большее b_{max}, поэтому для получения того же самого числа $2p \geq 14$ необходимо меньшее простое число в качестве a_{min}, либо a_{min+x}.

Заметим, что начиная с C^2_4 получение того же самого числа $2p \geq 16$ в последующем сочетании C^2_n происходит преобразованием слагаемых из одних простых чисел в другие простые числа.

Однако не получаем в C^2_n некоторые $2p \geq 16$ и $2p = 14$, если имеют место такие b_{max+y}, что не существует возможности получить это $2p$ при сложении с любым a. Такими числами являются 14 = 3 + 11 и 38 = 7 + 31, получаемое в сочетании, имеющем $a_{max} = 29$, $b_{max} = 31$. После 11 следует простое число 13. Следующим простым числом большим, чем 31 является 37. Однако при таких b нет возможности получить числа 14 и 38 при сложении с любым a, даже с $a_{min} = 3$.

Хотя некоторые $2p \geq 14$ получаемы только в одном случае сочетаний $a + b$, это не означает, что они получаемы в одном случае сложения простых чисел, поскольку $a + b_{max}$ преобразуемо в $(a + t) + (b_{max} - t)$, где $(a + t)$ и $(b_{max} - t)$ есть простые числа.

Так как четные t в $a + t$ равны t, «шагам» от b_{max} к $(b_{max} - t)$, то эти t возвращают к получению того же числа $2p \geq 16$ при других a и b, имевших место в сочетаниях до C^2_n.

Пусть при всех t получаем, что для числа $2p \geq 14$ выполняется $(a + t) + (b_{max} - t)$, но все $(a + t)$ и $(b_{max} - t)$ есть составные нечетные, либо псевдопростые числа. Поскольку получаемые $(a + t)$ и $(b_{max} - t)$ не есть простые числа, и так как $t = 2, 4, \ldots, 32, 34\ldots$, то отрицается существование уже имеющихся простых чисел и их бесконечность. Допущение неверно, ибо противоречит фактам и бесконечности простых чисел.

Следовательно, имеет место хотя бы одно t в $a + t$ и в «шагах» от простого числа b_{max} к $(b_{max} - t)$. Следует: то же самое $2p \geq 16$ может быть получено в более чем одном случае $2p = a + b$. Если же, как с числом 14, меньшим чем 16, и числом 38, невозможно получить другие a и b, где $3 \leq a < b$, то получаем $(a + t) = (b_{max} - t)$ в дополнение к имеющемуся одному случаю $2p = a + b$.

Если получено $(a + t) = (b_{max} - t)$, то это сложение простого числа с тождественным простым числом записываем как $a + a$. Поскольку для некоторых $2p$ существует более чем одно t, то эти некоторые $2p$ могут быть получены в более чем двух случаях $a + b$, либо как число $26 = 13 + 13$, $26 = 3 + 23$, $26 = 7 + 19$ и в $a + a$ и в более чем в одном случае $a + b$.

Таким образом, каждое $2p \geq 14$ получаемо в более чем одном случае суммирования простых чисел.

Примеры. $1362 = 41 + 1321$ преобразуемо в $1362 = 631 + 631$, когда $t = 590$.

Так как $t = 12$, то $38 = 7 + 31$ представимо $38 = 19 + 19$.

$10 = 3 + 7$. Так как $t = 2$, то $10 = 5 + 5$.

$14 = 3 + 11$. Так как $t = 4$, то $14 = 7 + 7$.

$28 = 5 + 23 = 11 + 17$.

$30 = 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17$.

$74 = 3 + 71 = 7 + 67 = 13 + 61 = 31 + 43$. Кроме того, $74 = 37 + 37$.

$94 = 5 + 89 = 11 + 83 = 23 + 71 = 41 + 53$. Кроме того, $94 = 47 + 47$.

$98 = 19 + 79 = 31 + 67 = 37 + 61$.

Вывод: Каждое четное число $2p \geq 14$ получаемо больше, чем в одном, а каждое из четных чисел $4 \leq 2p < 14$ получаемо хотя бы в одном случае суммирования простых чисел:

$4 = 2 + 2$, число 6 получаемо только как $a_{min} + a_{min} = 3 + 3$;
получено в C^2_3, что $8 = a_{min} + b_{min} = 3 + 5$, $10 = a_{min} + b_{max} = 3 + 7$ и $12 = a_{max} + b_{max} = 5 + 7$; но 12 не получаем в C^2_4, так как в C^2_4 получаем $a_{min} + b_{max} = 3 + 11 = 14$ и $a_{min+x} + b_{max} = 5 + 11 = 16$. Наряду с $10 = 3 + 7$, имеет место $10 = a + a = 5 + 5$, поскольку $t = 2$.

Заключение. Бинарная проблема Гольдбаха и Эйлера разрешима для каждого четного числа $2p > 6$ применением сочетаний $a + b$, где a и b есть простые числа. Кроме этого, для некоторых четных чисел $2p \geq 10$ имеет место $a + a = 2p$. При этом, суммирование $a + a$ выводимо из преобразований $a + b$. Четные числа $2p \geq 10$ получаемы, когда имеет место одно из равенств $2p = a_{min} + b_{max}$, $2p = a_{min+x} + b_{max}$, $2p = a_{max} + b_{max}$.

По Лемме 1, для каждого четного числа $2p > 6$ имеет место хотя бы одно сочетание $a + b$. Если четное число $2p \geq 22$ не получено в C^2_{n-2}, то это $2p$ получаемо в C^2_{n-1}.

Лемма 2 уточняет, что каждое из четных чисел $2p \geq 14$ получаемо более чем в одном случае суммирования двух простых чисел. Более подробно: если $2p \geq 14$

получено в C^2_{n-1}, то это же самое число получаемо либо в C^2_n, либо в $a + a$, либо и в C^2_n и в $a + a$:

некоторые $2p$ получаемы в более чем одном случае сочетаний $a + b$;

некоторые четные числа, включая 14 и 10, получаемы в двух случаях сложения простых чисел, один из которых $a + b$, другой есть $a + a$;

некоторые $2p$ получаемы в $a + a$ и более чем в одном случае $a + b$.

Каждое из чисел 4, 6, 8, 12 получаемо в одном случае сложения простых чисел, не обязательно сводимом к равенствам $2p = a_{min} + b_{max}$, $2p = a_{min + x} + b_{max}$, $2p = a_{max} + b_{max}$:
$4 = 2 + 2$, $6 = a_{min} + a_{min} = 3 + 3$, в C^2_3 имеем $8 = a_{min} + b_{min} = 3 + 5$, $12 = a_{max} + b_{max} = 5 + 7$.

Итоговый вывод: «Каждое чётное число большее двух можно представить суммой двух простых чисел».

1. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1957.- С. 48 - 49.

УДК 511.522.2

Т.Т. Исмагамбетов

Памяти физика-теоретика академика А. Мигдала

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ И ЗАГАДКА ТЕОРЕМЫ ФЕРМА

(*г. Алматы, ТОО «Respect LLC»*)

«Косинустар теоремасы және Ферма теоремасыны жұмбағы» атты мақаласында косинустар теоремасыны қолдануы натурал сандары x^n, y^n $n = 1$, $n = 2$ жағдайындағы натурал сандарды қосуын сценарийлерін анықтады. $x \le y < z$ қатар, x^n, y^n қосындысы қарастырылды, мұнда $y \ge z$. z^n орнына $(y + t)^n$ қойғанда, және $n > 2$, $x \le y < z$ жағдайында $(y + t)^n \ne x^n + y^n$ теңсіздігін келесі өзгерістері; $n \ge 1$, $y \ge z$ жағдайларындағы x^n мен y^n қосу төрт леммаларды дәлеліне келді. Осы леммаларды қолданылғанда барлық $n > 2$ жағдайларда $z^n \ne x^n + y^n$ дәлеліне келді. Бұл – Ферма теоремасының қысқаша сара дәлеліне тең.

In the article "Law of cosines and Fermat's theorem's puzzle" the application of the law of cosines defines the scenarios of addition of natural numbers $\mathbf{x^n}$, $\mathbf{y^n}$, when $\mathbf{n} = 1$, $\mathbf{n} = 2$. Together with the inequality $\mathbf{x \le y < z}$, the addition of $\mathbf{x^n}$, $\mathbf{y^n}$ satisfying the inequality $\mathbf{y \ge z}$ is examined. Substitution of $\mathbf{(y + t)^n}$ instead of $\mathbf{z^n}$ and subsequent transformation of the inequalities $\mathbf{(y + t)^n \ne x^n + y^n}$, when $\mathbf{n > 2}$, $\mathbf{x \le y < z}$; the addition of $\mathbf{x^n}$, $\mathbf{y^n}$ satisfying the inequality $\mathbf{y \ge z}$, $\mathbf{n \ge 1}$, leads to proving of four lemmas. The application of these four lemmas leads to proving of $\mathbf{z^n \ne x^n + y^n}$ for all $\mathbf{n > 2}$, which is equivalent to proving Fermat's theorem in the laconic way.

Загадочная теорема, или «великое предложение» Ферма гласит: сумма одинаковых степеней двух целых положительных чисел не может быть той же степенью любого третьего целого положительного числа. Исключение возможно только для второй степени. В 1995 г. Эндрю Уайлсом на 130 страницах было предложено доказательство того, что уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

неразрешимо в натуральных числах для $n > 2$.

Применение теоремы косинусов и бинома Ньютона приводит к более краткому доказательству. Пусть $x \le y < z$ — натуральные числа. Заметим:

Уравнение

$$x + y = z \tag{1}$$

в первой степени является разрешимым (например, 1 + 2 = 3, 2 + 3 = 5)*, но не имеет решения при* $n \ge 2$, то есть неразрешима в множестве натуральных чисел система уравнений

$$\begin{cases} x + y = z \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \tag{2}$$

Более того, если целые положительные числа x, y, z являются решением уравнения (1) и целое число $n \ge 2$, то имеем, что

$$x^n + y^n \ne z^n \tag{3}$$

Кроме того, для некоторых целых положительных чисел, удовлетворяющих неравенству $x + y > z$, равенство $x^n + y^n = z^n$ выполняется при $n = 2$.

1. Теорема косинусов и сложение комплексных чисел *x*, *y* при $n = 1$, $n = 2$. Геометрический смысл сложения комплексных чисел состоит в том, что сумма двух комплексных чисел представляется суммой векторов, изображающих отдельные слагаемые x, y. Вектора, изображающие комплексные числа x, y, отображаемы как стороны параллелограмма («правило параллелограмма»). Вектор, изображающий комплексное число z, является диагональю этого параллелограмма и разбивает его на два равных треугольника. В полученном треугольнике сторона z расположена напротив угла ψ [1]. Применима теорема косинусов для любых треугольников:

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \psi \tag{4}$$

Имеет место $y - x < z = x + y$, когда вектора, изображающие x и y, имеют одинаковое направление; неравенство $y - x < z < x + y$, когда эти вектора имеют разные направления; $y - x = z < x + y$, когда эти вектора противоположно направлены [2].

Имеем следующие варианты:

Получаем $z^2 > x^2 + y^2$, когда:

а) вектора, изображающие x и y, имеют одинаковое направление. Поскольку имеем $z = x + y$, то $z^2 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$;

b) вектора, изображающие x и y, имеют разные направления. Тогда получаем треугольник с углами α, β и ψ. Если имеет место $\psi > 90^\circ$, то знак «–» перед 2xy cos ψ меняется на «+» и имеем + 2xy cos ψ. Получили $z^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos \psi$;

с) вектор, отображающий число z, не является суммой векторов, изображающих числа x, y. Имеем $y - x < z > x + y$. При $z = x + y$ имеем $z^2 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$. Следовательно, при $z > x + y$ имеем $z^2 > x^2 + y^2 + 2xy$.

Получаем $z^2 = x^2 + y^2$, известное уравнение теоремы Пифагора, когда $\psi = 90^\circ$. Поскольку $\cos 90^\circ = 0$, то следует, что $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 90^\circ = x^2 + y^2 - 0 = x^2 + y^2$.

Получаем $z^2 < x^2 + y^2$, когда:

а) вектора x, y имеют противоположные направления. Имеем $y - x = z$.

Так как $z^2 = (y - x)^2$, то получаем $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy$;

b) $\alpha < 90^\circ$, $\beta > 90^\circ$, либо $\alpha < 90^\circ$, $\beta < 90^\circ$, $\alpha < \beta$. Угол $\psi < 90^\circ$. Имеем $0 < \cos \psi < 1$. $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \psi$. Итого $z^2 < x^2 + y^2$. Если $\psi > \beta$, то $z > y$. Если $\beta > \psi$, то тогда $y > z$. Если $\beta = \psi$, то $y = z$.

Если имеет место $y = z$, то для всех натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству $x \le z = y$, имеют место неравенства $z < x + y$, $z^2 < x^2 + y^2$. При $x < z = y$ имеем равнобедренный треугольник; при $x = z = y$ равносторонний треугольник. Неравенство $x > z$ при $y = z$ означало бы $x > y$, что неприемлемо, ибо по условию $x \le y$.

Если $y > z$, то для натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству $x \le z < y$, либо неравенству $z < x \le y$ имеем $z < x + y$, $z^2 < x^2 + y^2$. Если $x = z < y$, либо $z < x = y$, то тогда имеем равнобедренные треугольники.

Натуральные числа представимы как комплексные числа с нулевой мнимой частью. Итак, при $n = 2$ имеют место $z^2 > x^2 + y^2$, $z^2 = x^2 + y^2$ и $z^2 < x^2 + y^2$.

2. Применение бинома Ньютона к сложению натуральных чисел x, y, удовлетворяющих неравенству $x \le y < z$, при $n \ge 2$.

Если $x \le y < z$, то допустима запись: $z = y + t$ (5)

Уравнение $z = x + y$ равносильно уравнению $y + t = x + y$, где $t = x$.

Неравенство $z < x + y$ равносильно неравенству $y + t < x + y$, где $1 \le t < x$.

Неравенство $z > x + y$ равносильно неравенству $y + t > x + y$, где $t > x$.

Предположим, что $(y + t)^n > x^n + y^n$. Разложив бином Ньютона $(y + t)^n$, получили

$$y^n + ny^{n-1}t + n(n-1)y^{n-2}t^2 : (1\cdot 2) + \ldots + nyt^{n-1} + t^n > x^n + y^n \quad (6)$$

Поскольку y^n имеется в левой и правой частях неравенства, то

$$ny^{n-1}t + n(n-1)y^{n-2}t^2 : (1\cdot 2) + n(n-1)(n-2)y^{n-3}t^3 : (1\cdot 2\cdot 3) + \ldots + t^n > x^n \quad (7)$$

Если $(y + t)^n < x^n + y^n$, то $y^n + ny^{n-1}t + n(n-1)y^{n-2}t^2 : (1\cdot 2) \ldots + t^n < x^n + y^n$ (8)

Так как y^n присутствует в обеих частях неравенства, то

$$ny^{n-1}t + n(n-1)y^{n-2}t^2 : (1\cdot 2) + n(n-1)(n-2)y^{n-3}t^3 : (1\cdot 2\cdot 3) + \ldots + t^n < x^n \quad (9)$$

Лемма 1. **Если при целом положительном n достигнуто $z^n \ge x^n + y^n$, то имеем $z^{n+k} > x^{n+k} + y^{n+k}$ при любом натуральном $n + k$.**

Доказательство для $z^2 = y^2 + x^2$: Для пифагоровых чисел x, y и z имеем

$x < y < z$, $z^2 = y^2 + x^2$. Поскольку $z = y + t$, то $z^2 = (y + t)^2 = y^2 + 2yt + t^2$.

Тогда $y^2 + 2yt + t^2 = y^2 + x^2$. Следует: $2yt + t^2 = x^2$.

Предположим, что при $n = 3$ имеем $(y + t)^3 > y^3 + x^3$. Получаем неравенство $y^3 + 3y^2t + 3yt^2 + t^3 > y^3 + x^3$. Так как y^3 имеется в левой и правой частях неравенства, то следует $3y^2t + 3yt^2 + t^3 > x^3$.

Преобразуем: $x^3 = x^2 x = (2yt + t^2)\, x = 2ytx + t^2x$. Так как $y > x$, то $3y^2t = 3yyt > 2ytx$, $3yt^2 > t^2x$, $t^3 > 0$. Следовательно, $3y^2t + 3t^2y + t^3 > 2ytx + t^2x$. Значит, $3y^2t + 3t^2y + t^3 > x^3$. Верно предположение: $(y + t)^3 > y^3 + x^3$. Итого вывод: Если $z^2 = y^2 + x^2$, то при $n = 3$ имеем

$$z^n > x^n + y^n \quad (10)$$

Доказательство для $z^n > x^n + y^n$: Предположим: при каком-либо $n \ge 2$ имеем $z^n > x^n + y^n$. Так как $z = y + t$, то неравенство $z^{n+1} > x^{n+1} + y^{n+1}$ преобразуемо в неравенство $z^n(y + t) > x^nx + y^ny$. Отсюда $z^ny + z^nt > x^nx + y^ny$.

Преобразуем неравенство $z^ny + z^nt > x^nx + y^ny$ подстановкой вместо z^n левой части неравенства (6):

$(y^n + ny^{n-1}t + \ldots + nyt^{n-1} + t^n)y + (y^n + ny^{n-1}t + \ldots + nyt^{n-1} + t^n)\, t > x^nx + y^ny$.

$y^ny + (ny^{n-1}t + \ldots + nyt^{n-1} + t^n)y + (y^n + ny^{n-1}t + \ldots + nyt^{n-1} + t^n)\, t > x^nx + y^ny$. Так как из неравенства (6) следует неравенство (7), где $ny^{n-1}t + \ldots + nyt^{n-1} + t^n > x^n$, и имеем $y \ge x$, значит, $(ny^{n-1}t + \ldots + nyt^{n-1} + t^n)y > x^nx$; y^ny присутствует в левой и правой частях неравенства, $(y^n + ny^{n-1}t + \ldots + nyt^{n-1} + t^n)\, t = z^nt > 0$, то $z^{n+1} > x^{n+1} + y^{n+1}$.

Неравенство $z^n > x^n + y^n$ предшествует неравенству

$$z^{n+1} > x^{n+1} + y^{n+1} \quad (11)$$

Аналогично доказывается $z^{n+k} > x^{n+k} + y^{n+k}$ при $k = 2$, далее для $k = 3\ldots$

При помощи математической индукции получаем

$$z^{n+k} > x^{n+k} + y^{n+k} \quad (12)$$

Лемма 2. **Если при $n = 2$ имеем $z^n < x^n + y^n$, то при каком-нибудь $p \ge 3$ происходит переход от $z^n < x^n + y^n$ к $z^p > x^p + y^p$.**

А. Доказательство: Из неравенства (9) следует неравенство $ny^{n-1}t < x^n$. Преобразуем $ny^{n-1}t < x^n$ в $ny^{n-1}t < x^{n-1}x$. Поскольку $y \ge x$, то имеем $y^{n-1} \ge x^{n-1}$ и $nt < x$.

Возможность неравенства с противоположным смыслом $nt \geq x$ следует из повышения n: если $x = 25$, $y = 26$, $t = 10$, то при $n = 3$ получим $nt > x$; если $x = 3$, $y = 3$, $t = 1$, то при показателе $n = 3$ получим $nt = x$. Поскольку появилось $nt \geq x$, то вместо $ny^{n-1}t < x^n$ получаем $ny^{n-1}t \geq x^{n-1}x$. Так как существуют другие одночлены, то неравенство (9) сменяется неравенством (7).

Заметим: неравенство $z^2 < x^2 + y^2$ имеет место, если $z > y \geq x \geq 3$.

Если $y > x$, то сложение $ny^{n-1}t < x^n$ с последующими одночленами достаточно для перехода от неравенства (9) к неравенству (7) при показателе $n = 3$, либо при $n \geq 4$ (См. нижеследующее неравенство (16)). Пример: $5^3 + 6^3 < 7^3$, где $3 \cdot 6^2 \cdot 1 < 5^3$, но $3 \cdot 6^2 + 3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 1 : (1 \cdot 2) = 108 + 18 = 126$, а $126 > 5^3$.

В. Доказательство: Существуют x, кратные 4 и $z = y + t$, $x = y = 4t$, для которых при $n \leq 3$ имеет место неравенство (9), а при $n = 4$ переход в неравенство (7):

например, $4^4 + 4^4 < 5^4$; $8^4 + 8^4 < 10^4$.

Для таких $y = x = 4t$, $z = y + t$, где t есть любое натуральное число, переход имеет место при $4 = n \leq x$ и получаем $ny^{n-1}t = 4y^{n-1}t = x^{n-1}x = x^n = y^n$ (13)

С. Доказательство: Для некоторых натуральных чисел x, y и z переход от неравенства (9) к неравенству (7) происходит, когда $nt < x$ и $n \geq 4$. Из $n \geq 4$, $nt < x$, $y \geq x$, $1 \leq t < x$ следует: имеем $y \geq x \geq 5$, переход при $4 \leq n < x$.

Заметим, что для любых неравенств, удовлетворяющих $z > y = x$, $x \geq 5$, $x \neq 4t$ и таких что $z^2 < x^2 + y^2$, имеет место переход к неравенству (7) при $n \geq 4$ тогда, когда получено $n^2t^2 > y^2 : 2$. Неравенство (9) и $z^n < x^n + y^n$ для таких x, y и z имеют место пока существующие в одночленах n, t и y пребывают в неравенстве $n^2t^2 < y^2 : 2$.

Определим $ny^{n-1}t$ при таком $n \geq 4$, когда получено $n^2t^2 > y^2 : 2$. Извлечем квадратный корень из $n^2t^2 > y^2 : 2$ и получим $nt > y : \sqrt{2}$, т.е. $nt > 0{,}71y$, $ny^{n-1}t > 0{,}71yy^{n-1}$.

Уточним $ny^{n-1}t$ для натуральных чисел, удовлетворяющих таким $x = y$, $5 \leq x \leq 7$ и $z = y + t$, $t = 1$, переходящих к неравенству (7) при $nt < x$, $4 \leq n < x$, когда $n^2t^2 > y^2 : 2$. При таких x, y и z получаем 1-й и 2-й одночлены получаемого неравенства (7):

если $x = y = 5$, $z = 6$, переход при $n = 4$, то поскольку $ny^{n-1}t = (nt:y)yy^{n-1}$, то $4 \cdot 5^3 \cdot 1 = (4 \cdot 1 : 5)yy^{n-1} = 0{,}8yy^{n-1}$; в качестве 2-го одночлена получаем $4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 1^2 : (1 \cdot 2) = 6 \cdot 5^2 = 5^3 + 5^24$;

если $x = y = 6$, $z = 7$, переход при $n = 5$, то получаем 1-й одночлен $5 \cdot 6^4 \cdot 1 = (5 \cdot 1 : 6)yy^{n-1} = 0{,}833yy^{n-1}$ и имеем 2-й одночлен $5 \cdot 4 \cdot 6^3 \cdot 1^2 : (1 \cdot 2) = 10 \cdot 6^3 = 6^4 + 4 \cdot 6^3$;

если $x = y = 7$, $z = 8$, переход при $n = 6$, то получаем 1-й одночлен $6 \cdot 7^5 \cdot 1 = (6 \cdot 1 : 7)yy^{n-1} = 0{,}857yy^{n-1}$ и 2-й одночлен $6 \cdot 5 \cdot 7^4 \cdot 1^2 : (1 \cdot 2) = 15 \cdot 7^4 = (2 \cdot 7 + 1)7^4 = 2 \cdot 7^5 + 7^4$.

Вывод: для неравенств с такими x, y и z получили $ny^{n-1}t + n(n-1)y^{n-2}t^2 : (1 \cdot 2) \geq x^n$.

Взяв любые неравенства, удовлетворяющие $z > y = x$, $x \geq 8$, $x \neq 4t$, $z^2 < x^2 + y^2$ и для коих переход к неравенству (7), например, к $8^6 + 8^6 < 9^6$, $9^7 + 9^7 < 10^7$, $25^{18} + 25^{18} < 26^{18}$, происходит при таком $n \geq 4$, когда $n^2t^2 > y^2 : 2$, уточним значения искомых $(nt:y)yy^{n-1}$ и $(n-1)t = ((n-1)t : y)y$ при имеющих место n, t и y. Получим $0{,}8yy^{n-1} > ny^{n-1}t > 0{,}71yy^{n-1}$ и $nt > ((n-1)t : y)y > 0{,}6y$, т.е. $0{,}71y > (n-1)t > 0{,}6y$.

Приведем $n(n-1)y^{n-2}t^2 : (1 \cdot 2)$, 2-й одночлен получаемого неравенства (7) к y^n. Поскольку $0{,}8y > nt > 0{,}71y$, а $0{,}71y > (n-1)t > 0{,}6y$, то получаем перемножив $(n-1)t$ и nt, что $0{,}55y^2 > n(n-1)t^2 > 0{,}44y^2$. Тогда $0{,}27y^2y^{n-2} > n(n-1)y^{n-2}t^2 : (1 \cdot 2) > 0{,}22y^2y^{n-2}$.

Приведем к y^n 3-й одночлен получаемого неравенства (7). Наименьшее $(n-2)t$ имеет место в неравенстве $8^6 + 8^6 < 9^6$. При больших n значения $(n-2)t$ и $(n-1)t$ близки и так как в $((n-2)t : y)y$ и $((n-1)t : y)y$ имеем то же самое y, то определяем, что

$0{,}7y > (n-2)t \geq 0{,}5y$. Тогда $0{,}55y^2 \cdot 0{,}7y > n(n-1)t^2(n-2)t > 0{,}44y^2 \cdot 0{,}5y$.

Следует, что $0{,}38y^3 : (1 \cdot 2 \cdot 3) > n(n-1)(n-2)y^{n-3}t^3 : (1 \cdot 2 \cdot 3) > 0{,}22y^3 : (1 \cdot 2 \cdot 3)$.

Получаем: $0{,}063y^3y^{n-3} > n(n-1)(n-2)y^{n-3}t^3 : (1 \cdot 2 \cdot 3) > 0{,}036y^3y^{n-3}$. Заметим, что также как в неравенствах, имеющих $x = y$, $5 \leq x \leq 7$ и $z = y + t$, $t = 1$, близкие к $0{,}8y^n$

значения 1-го одночлена суммируем с близкими к 0, $22y^n$ значениями 2-го одночлена. Близкие к $0{,}71y^n$ значения 1-го одночлена суммируем с близкими к 0, $27y^n$ из 2-го.

Представим сумму приведенных к yy^{n-1} 2-го и 3-го одночленов как ky^{n-1}, где k есть натуральное число. Если $n^2t^2 > y^2$:2, то получим $0{,}8yy^{n-1} \geq ny^{n-1}t > 0{,}71yy^{n-1}$ и то, что $0{,}22y + 0{,}036y < k < 0{,}27y + 0{,}063y$. Сложением значений первых двух, например, $0{,}77y^n + 0{,}23y^n$, а если этого недостаточно, то значений трех одночленов, например, $0{,}72y^n + 0{,}25y^n + 0{,}05y^n$, получаем $ny^{n-1}t + ky^{n-1} \geq x^n$. Сложив $ny^{n-1}t + ky^{n-1} \geq x^n$ с последующими одночленами получим неравенство (7).

Пусть при каком-либо $n \geq 4$ получили $ny^{n-1}t + ky^{n-1} \geq x^n$. Преобразуем его в неравенство $x^n \leq (nt + k)\, y^{n-1}$, $x^{n-1}x \leq (nt + k)y^{n-1}$ (14)

Если $y = x$, то достаточно получить $nt + k = x$ (15)

Если $y > x$, то $x^{n-1}x < (nt + k)y^{n-1}$ получаемо при $nt + k < x$ (16)

Неравенство (16) применимо для $z > y > x$, таких что $z^2 < x^2 + y^2$.

Примеры. Неравенство $25^2 + 25^2 > 26^2$ переходит в неравенство $25^{18} + 25^{18} < 26^{18}$, когда $nt = 18$, $nt < x$, $n^2t^2 > y^2 : 2$. Преобразуем 2-й и 3-й одночлены неравенства (7): $18\cdot17\cdot25^{16}\cdot1^2 : (1\cdot2) + 18\cdot17\cdot16\cdot25^{15}\cdot1^3 : (1\cdot2\cdot3) = 153\cdot25^{16} + 51\cdot16\cdot25^{15} = (6\cdot25 + 3)\cdot25^{16} + 816\cdot25^{15} = (6\cdot25^{17} + 3\cdot25^{16}) + (32\cdot25\cdot25^{15} + 16\cdot25^{15}) = 6\cdot25^{17} + 35\cdot25^{16} + 16\cdot25^{15} = 6\cdot25^{17} + (25 + 10)\cdot25^{16} + 16\cdot25^{15} = 6\cdot25^{17} + 25^{17} + 10\cdot25^{16} + 16\cdot25^{15}$.

Получено $ny^{n-1}t = 18\cdot25^{17}$, $ky^{n-1} = 6\cdot25^{17} + 25^{17} = 7\cdot25^{17}$, $ny^{n-1}t + ky^{n-1} = 25\cdot25^{17} = 25^{18} = x^{18}$, поскольку $y = x$. Имеем $6\cdot25^{17} < 0{,}27y^n$ и $25^{17} < 0{,}063y^n$.

В неравенстве $23^2 + 25^2 > 29^2$ имеем $y > x$, $t = 4$. При $n = 4$ имеет место $23^4 + 25^4 < 29^4$, т.е. $nt = 16$, $nt < x$. Преобразуем 2-й и 3-й одночлены:

$4\cdot3\cdot25^2\cdot4^2 : (1\cdot2) + 4\cdot3\cdot2\cdot25\cdot4^3 : (1\cdot2\cdot3) = (25\cdot3\cdot25^2 + 21\cdot25^2) + (250 + 6)\cdot25 = 3\cdot25^3 + 21\cdot25^2 + 10\cdot25^2 + 6\cdot25 = 3\cdot25^3 + 25^3 + 6\cdot25^2 + 6\cdot25$. Имеем $ny^{n-1}t = 16\cdot25^3$, $ky^{n-1} = 3\cdot25^3 + 25^3 = 4\cdot25^3$, $ny^{n-1}t + ky^{n-1} = 20\cdot25^3 = 312500$, $x^4 = 23^4 = 279841$. Получено $nt + k = 16 + 4 = 20$. Переход к неравенству (7) произошел при $nt + k < x$, когда $n = 4$ и $n^2t^2 < y^2 : 2$. По этой причине и так как число 25^3 получили сложив $10\cdot25^2$ с $21\cdot25^2$, «остатком» от преобразования 2-го одночлена, то $3\cdot25^3 + 21\cdot25^2 < 0{,}22y^n$, а $10\cdot25^2 < 0{,}036y^n$.

Вывод: если при $n = 2$ имеет место неравенство $z^n < x^n + y^n$ и $x \leq y < z$, то либо при $n = 3$ получаем $ny^{n-1}t \geq x^n$; либо при $n = 3$, либо каком-то $n \geq 4$ получаем, что $ny^{n-1}t + ky^{n-1} \geq x^n$, включая случаи $ny^{n-1}t + n(n-1)y^{n-2}t^2 : (1\cdot2) \geq x^n$; либо если $z = y + t$, $x = y = 4t$, то при $n = 4$ имеем $ny^{n-1}t = 4ty^{n-1} = x^{n-1}x = x^n = y^n$. Переход от неравенства (9) к неравенству (7) означает переход от неравенства (8) к неравенству (6).

Показатель перехода обозначим p. При каком-то $p \geq 3$ имеет место неравенство

$y^p + py^{p-1}t + \ldots + pyt^{p-1} + t^p > y^p + x^p$ (17)

Получили $(y + t)^p > x^p + y^p$. Что равносильно $z^p > x^p + y^p$ (18)

3. Сложение натуральных чисел x^n, y^n, таких что $y \geq z$.

Лемма 3. Сложение натуральных чисел x^n, y^n, таких что $y = z$, имеет следствием неравенство $y^n + x^n > z^n$.

Доказательство: Поскольку $y = z$, то подставляем вместо y число z. Тогда получаем неравенство $z^n + x^n > z^n$. Вывод: если $y = z$, то всегда имеем $y^n + x^n > z^n$.

Лемма 4. Сложение натуральных чисел x^n, y^n, таких что $y > z$, имеет следствием неравенство $y^n + x^n > z^n$.

Доказательство: Поскольку $y > z$, то $y = z + d$.

Получим неравенство $z^n < (z + d)^n + x^n$. Вывод доказан: $z^n < x^n + y^n$.

4. Применение Лемм №№1, 2, 3, 4 для общего доказательства теоремы.

Если имеют места натуральные числа x, y и z, такие что $x \leq y < z$ и $z^2 > x^2 + y^2$, либо $z^2 = x^2 + y^2$, то согласно Лемме 1 верно $z^n > x^n + y^n$ при любых натуральных $n > 2$.

Пусть натуральные числа x, y и z удовлетворяют неравенству $x \leq y < z$ и имеет место $z^2 < x^2 + y^2$. Так как $z^2 < x^2 + y^2$, то применима Лемма 2: при каком-нибудь $p \geq 3$

происходит переход от $z^n < x^n + y^n$ к $z^p > x^p + y^p$. С переходом к $z^p > x^p + y^p$ применима Лемма 1: верно $z^{p+k} > x^{p+k} + y^{p+k}$.

Для всех чисел x, y и z, удовлетворяющих неравенству $x \le z = y$, имеем $z < x + y$, $z^2 < x^2 + y^2$. Так как $y = z$, то применима Лемма 3. Следовательно, при любом целом положительном $n \ge 1$ имеем неравенство $z^n < x^n + y^n$. Примеры: $3^n + 5^n > 5^n$, $5^n + 5^n > 5^n$.

Для всех чисел x, y и z, удовлетворяющих неравенству $x \le z < y$, либо неравенству $z < x \le y$, имеем $z < x + y$, $z^2 < x^2 + y^2$. Так как $y > z$, то применима Лемма 4. Следовательно, при любом целом положительном $n \ge 1$ имеем неравенство $z^n < x^n + y^n$.

Примеры: $1^n + 16^n > 10^n$, $15^n + 16^n > 15^n$, $130^n + 240^n > 120^n$, $240^n + 240^n > 120^n$.

Заключение. Применение теоремы косинусов позволило определить сценарии сложения натуральных чисел x, y при $n = 1$, $n = 2$, включая сложение x^n, y^n, таких что $y \ge z$. Подстановка $(y + t)^n$ вместо z^n и преобразования неравенств $(y + t)^n \ne x^n + y^n$ для натуральных чисел $x \le y < z$ при $n \ge 2$; сложение x^n, y^n, таких что $y \ge z$, при $n \ge 1$ привело к доказательствам четырех лемм. Применение этих лемм сделало излишними доказательства отдельно для каждого показателя $n > 2$: сложение любых двух натуральных чисел при $n > 2$ имеет результатом $z^n \ne x^n + y^n$.

1. Зайцев В.В., Рыжков В.В., Сканави М.И. Элементарная математика. Повторительный курс. Изд. 2-е, перераб. и доп. Под ред. В.В. Рыжкова. - М.: Наука, 1974. – С. 63, 475.

2. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1957.- С. 189, 193.

УДК 519.62

Е.В. Ихсанов

ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ДЕСЯТИ ТЕЛ В СЛУЧАЕ РЕЗОНАНСА ЧАСТОТ 3 – ГО ПОРЯДКА

(*г.Атырау, Атырауский инженерно – гуманитарный институт*)

Жұмыста 10 дененің шектеулі Ньютон есебіндегі 3-ші ретті резонанс жағдайы қарастырылады, тепе-тендік қалпының орнықты емес аймағында шексіз аз массалы дененің қозғалыс күйі сандық әдістер арқылы зерттеледі.

In this paper we consider the problem of stability in Lyapunov's sense of stationary solutions in the case of the 3rd order resonance of frequencies for the Newtonian restricted 10- body problem. By the numerical methods is researched the behaviour of the trajectory of a body with infinitesimal mass in the vicinity of unstable point of equilibrium.

Рассмотрим дифференциальные уравнения движения бесконечно малой массы в ограниченной пространственной ньютоновой задаче 10 тел в системе координат P_0xyz [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\omega\dfrac{dy}{dt} = \omega^2 x - \dfrac{m_0 x}{r^3} + \dfrac{\partial R}{\partial x}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\omega\dfrac{dx}{dt} = \omega^2 y - \dfrac{m_0 y}{r^3} + \dfrac{\partial R}{\partial y}, \end{cases} \qquad (1)$$

где

$$R = \sum_{k=1}^{8} m_i \left(\frac{1}{\Delta_k} - \frac{x\,x_k - y\,y_k}{r_k^3} \right),$$

$$\Delta_k = \left((x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 \right)^{1/2},$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad r_k^2 = x_k^2 + y_k^2.$$

Начальные условия $x(0), y(0), x'(0), y'(0)$ соответствуют значениям фазовых координат найденных стационарных решений.

Рассмотрим стационарную точку N_1 с координатами

$$x_1 = 2.3929148468899566\ldots, \quad y_1 = 0, \tag{2}$$

вычисленную [2] при $m_1 = 0.0001, \quad \alpha = 0.36367110500358957.$

Частоты линеаризованной системы в окрестности указанной точки N_1 равны:

$$\sigma_1 = 1.8869483360441508$$

$$\sigma_2 = 0.9434743563927493.$$

Очевидно, что они связаны резонансным соотношением третьего порядка $\sigma_1 = 2\sigma_2$.

С появлением новых компьютерных технологий и, прежде всего, Систем Компьютерной Алгебры, позволяющих удобно и эффективно выполнить большие объемы не только численных, но и аналитических вычислений, представилась возможность решить многие задачи небесной механики и космической динамики. Такими, например, являются Системы Символьных Вычислений (ССВ) “Maple” [3], “Mathematica” [4], “Maxima” [5], “Mathcad” [6], получившие большое распространение в разнообразных научных исследованиях.

Используя ССВ “Mathematica”, [4] мы можем решить систему дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (2). Решения ищутся с помощью следующей процедуры ССВ “Mathematica”:

```
NDSolve [{x''[t]-2ω y'[t] =f,  x[0] = x01,x'[0] = 0,
y''[t]+2ω x'[t] = g,  y[0] = y01,y'[0] = 0},{x,y}, {t,0,T}],
```

где *f, g* – правые части уравнений системы (1), *(0,T)* - интервал интегрирования.

В [2] показано, что данное стационарное решение неустойчиво по Ляпунову.

Пусть

$$x(0) = x_1,\ y(0) = y_1,\ x'(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

При $0 < t \le 1000$ решение системы (1) и его отклонение от стационарной точки изображены на рис. 1-2.

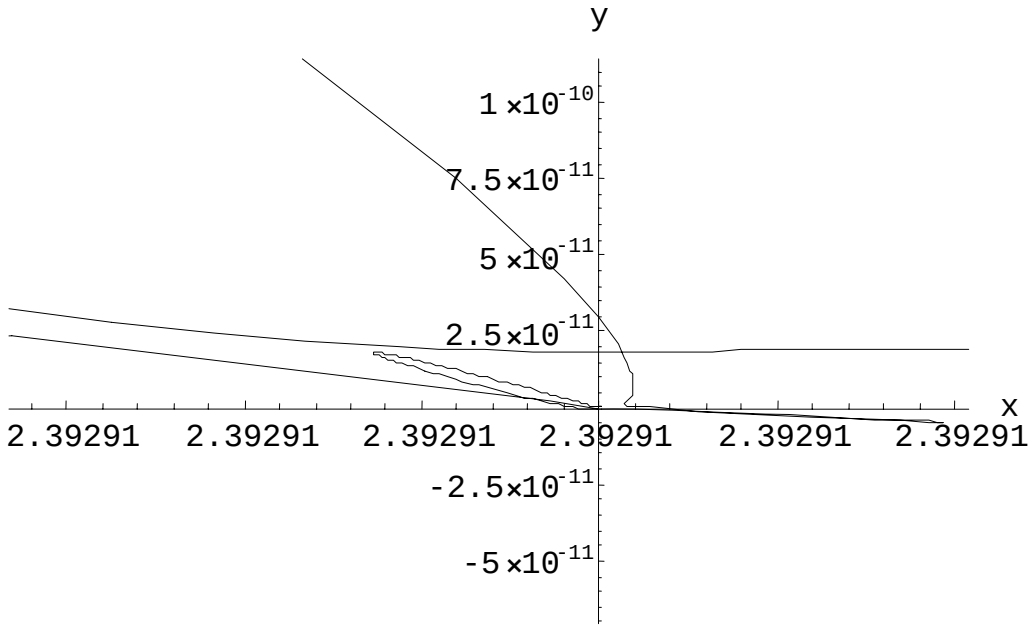


Рис.1-Графическое представление решения системы

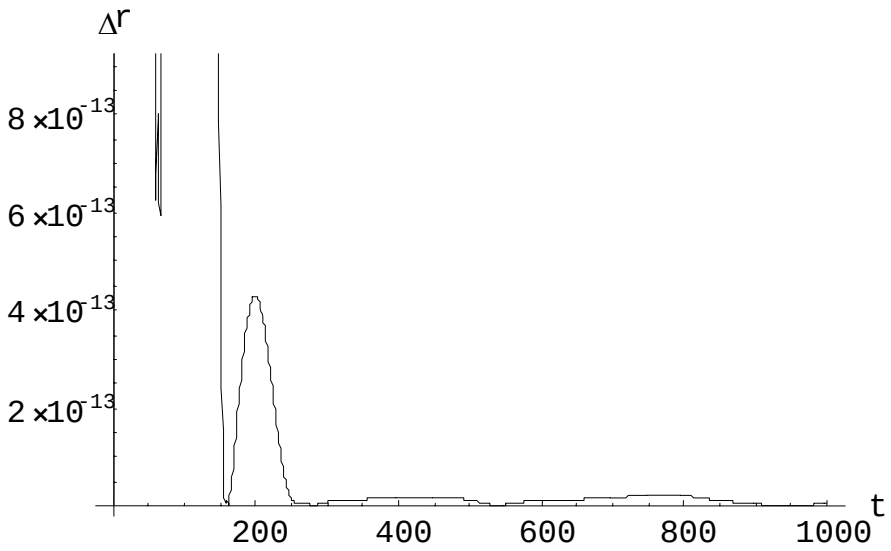


Рис.2- Радиальное отклонение при $0 < t \le 1000$

Изменим теперь начальные условия:

$$x(0) = x_1 + 0.0001,\ y(0) = y_1 + 0.,\ x'(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Для промежутка времени $0 < t \le 5000$ решение системы (1) с такими возмущенными начальными условиями и отклонение его от точки N_1 графически изображены на следующих рисунках.

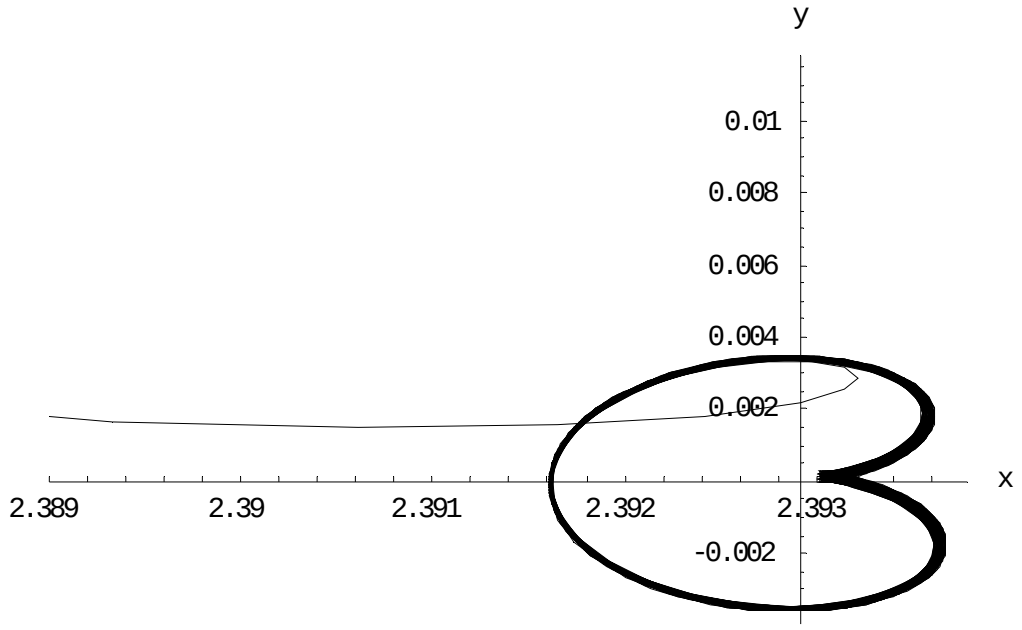


Рис.3- Графическое представление решения системы для $0 < t \le 5000$

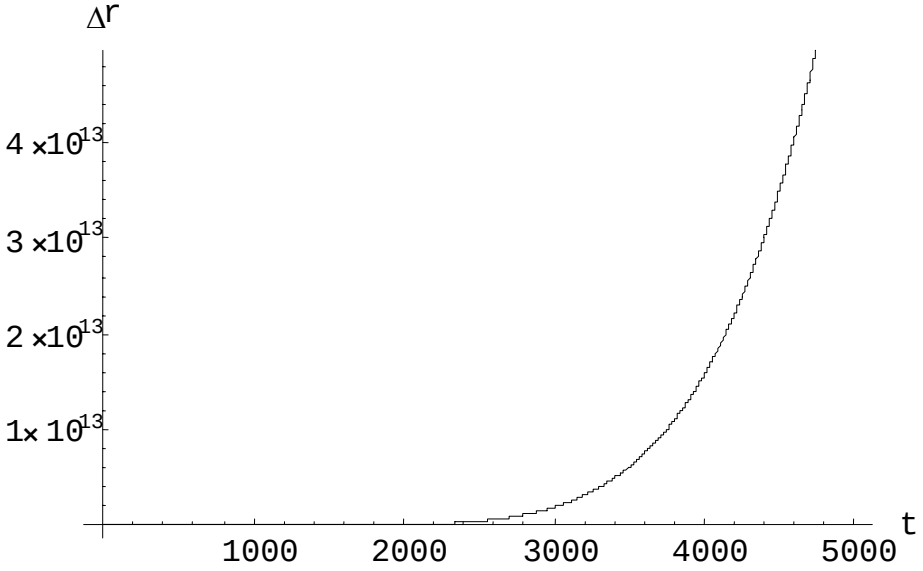


Рис.4-Отклонение от точки N_1 для $0 < t \le 5000$

Эти рисунки показывают, что на первых 300-400 оборотах стационарного решения вокруг центра конфигурации возмущенная траектория не покидает окрестность стационарной точки, но далее она неограниченно удаляется от нее. Возьмем теперь стационарную точку N_2 с координатами

$$x_2 = 1.010796827389897\ldots, \quad y_2 = 0, \tag{3}$$

вычисленными при $m_2 = 1, \alpha = 0.16968648731023933$, устойчивую по Ляпунову [2]. Частоты линеаризованной системы в окрестности этой точки равны:

$$\sigma_1 = 0.9247250263340905,$$

$$\sigma_2 = 0.46236675949747347,$$

и, следовательно, имеет место также резонанс 3-го порядка.

При начальных условиях

$$x(0) = x_2,\ y(0) = y_2,\ x'(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

получаем следующие результаты численного интегрирования при $0 < t \le 10000$:

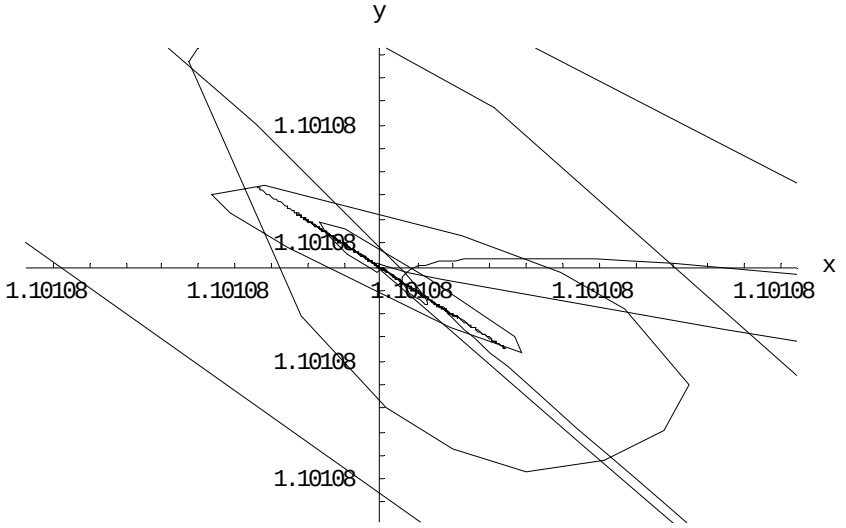


Рис.5- Графическое изображение численного интегрирования

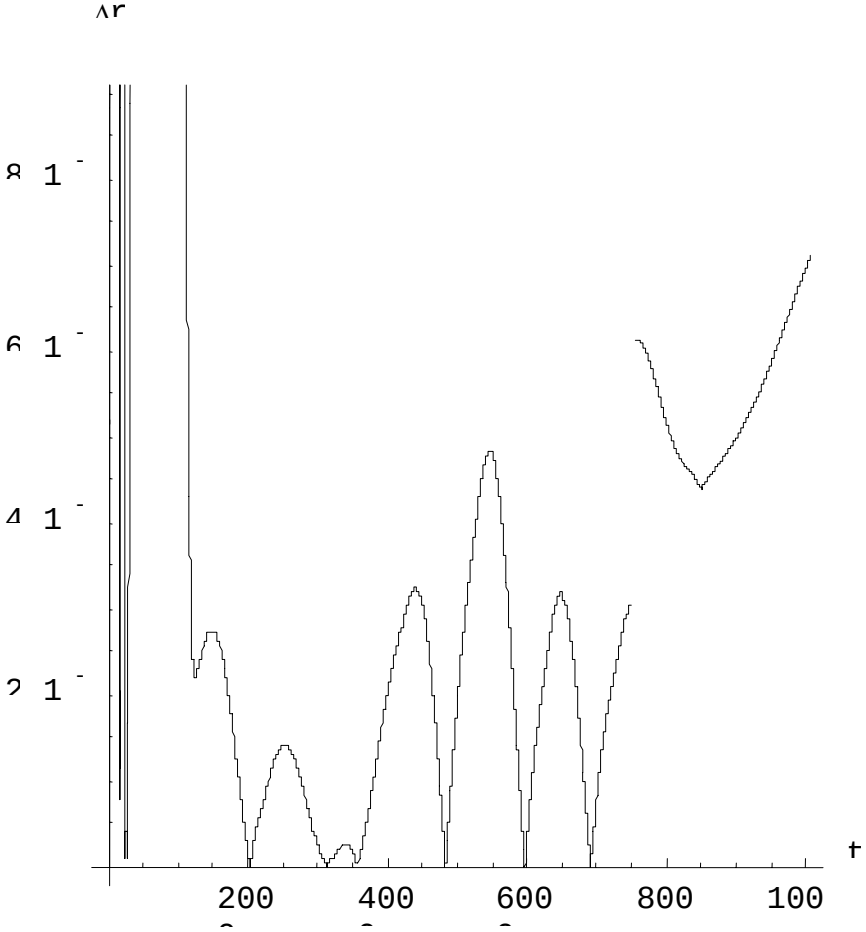


Рис.6- Графическое изображение численного интегрирования

Изменим начальные условия, возмущая координаты:

$$x(0) = x_2 + 0.001,\ y(0) = y_2 + 0.001,\ x'(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Получим на том же интервале интегрирования результаты, которые указывают на устойчивость стационарной точки N_2 с приведенными выше координатами.

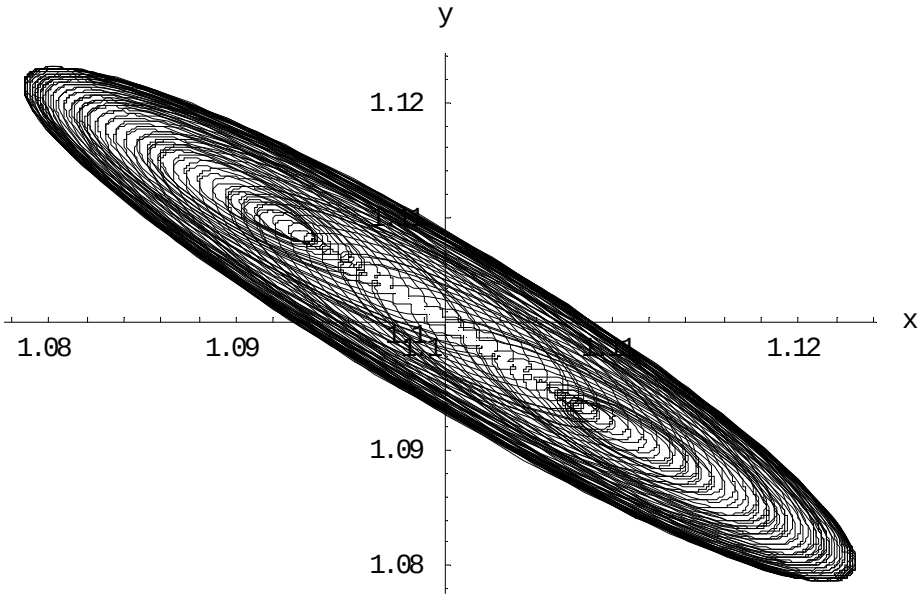


Рис.7-Графическая характеристика устойчивости

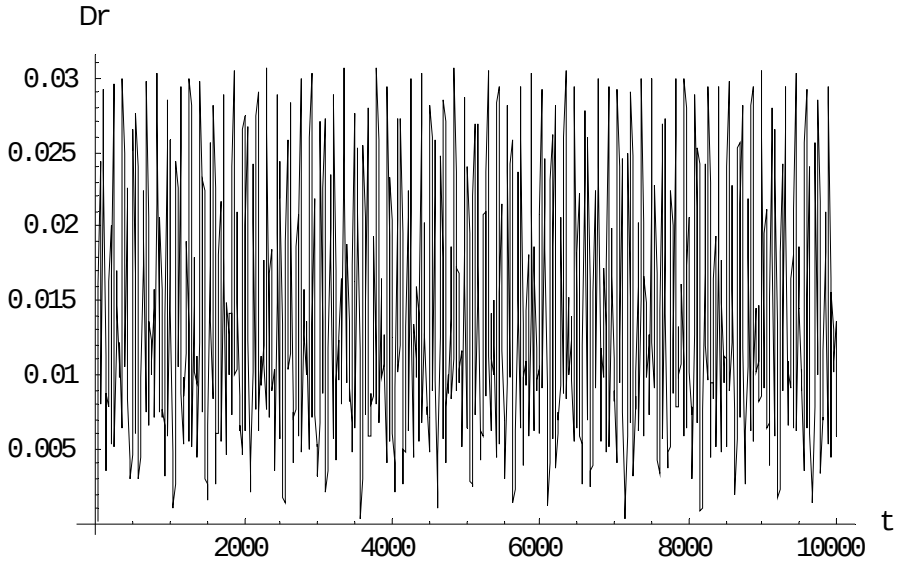


Рис.8- Графическая характеристика устойчивости

1. Абалакин В.К., Аксенов В.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А., Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, под ред. Г.Н.Дубошина, -М.: Наука, 1976.
2. Ихсанов Е.В., Компьютерные методы нормализации гамильтонианов ограниченных задач небесной механики (монография). Москва, Издательство Российского университета дружбы народов, 2004, 132 с.
3. Дьяконов В.П., Математическая система Maple V R3/R4/R5. М.: Солон, 1998
4. Wolfram S., The Mathematica Book, - Cambridge: University Press, 1996.
5. Pavelle R., Wang P., Maxima from F to C // G. of Simb. Computations –v.1, 1985, p.69-100.
6. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В., Mathcad 8 PRO в математике, в физике и в Internet, -М.: Нолидж, 1999.

U.D.C. 517. 962.2, 519. 876.2

G.A. Kaldybaeva, A.J. Satybaev

NUMERICAL DEFINITION OF DENSITY IN A DYNAMIC PROBLEM OF TERMO-ELASTICITY

(Kyrgyz Republic, Osh State University, Osh Technological University)

В данной статье восстановлены плотности среды конечно-разностным методом.
Environmental density is recovered in this article by finite-different methods.

The dynamic inverse problem was investigated by V.G. Yakhno and S.O. Apbasov [1,2]. Recovery of thermostarined condition set on a part of displaced limit was considered by Kozlov V.A.

Problem. Let on border $x=0$ halfspace $R_+ = \{z \in R,\ z > 0\}$ the thermal impact is set and thus temperature on border is raised from initial temperature T_0 up to T_1. Then the mathematical model thermo-elasticity is described by the equation [3]:

$$\rho(z)\frac{\partial^2 \upsilon(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}[\lambda(z) + 2\mu(z)\frac{\partial \upsilon(z,t)}{\partial z} +$$
$$+ (3\lambda(z) + 2\mu(z))R(\theta(z,t))], \qquad z \in R_+, \quad t \in R_+, \tag{1}$$

$$where \quad R(s) = \int_0^s \alpha(y)dy, \quad \Phi(z,t) = \theta(z,t) = (T_1 - T_0) * \left[erfc(z/(2\sqrt{kt})) - \right.$$
$$\left. - \exp(\gamma z - \gamma^2 kt) * erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{kt}} - \gamma\sqrt{kt}\right)\right], \quad erfc(\gamma) = 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^z e^{-\xi^2} d\xi,$$

T_0, T_1, K, γ - fixed positive numbers, $\theta(z,t)$ - adhering of temperature, $\alpha(y)$ - thermal expansion, κ – temperature conduction, $g=q/n$, q – heat-return n – heat conduction.

The physical sense of a direct problem of thermo-edacity consists in definition of convected heat exchange $u(z, t)$, occurring in environment under initial and boundary conditions

$$\upsilon(z,t)|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \upsilon(z,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial \upsilon(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{3\lambda(0) + 2\mu(0)}{\lambda(0) + 2\mu(0)} R(\theta(0,t)). \tag{3}$$

Let's note, that a boundary condition (3) at, $R(\theta(0,t)) = -y(T_1 - T_0)$, models thermal impact on a surface of halfspace R_+, i.e. temperature on border raises from T_0 up to T_1. Thus between border of environment $x=0$ and environment occurs convected heat exchange.

Inverse problem. To define $\rho(z)$ - density of environment from (1) - (3) at the additional information concerning the decision of a direct problem

$$\upsilon(z,t)|_{z=0} = f(t), \quad t \in [0,T], \quad 0 < T - const, \tag{4}$$

and at known meanings $\lambda(z)$, $\mu(z)$ – coefficients of Lame, $\alpha(y)$ - thermal expansion. From the equation (1) we will get

$$\frac{\partial^2 \upsilon(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\left(\lambda_z'(z) + 2\mu_z'(z)\right)}{\rho(z)} * \frac{\partial \upsilon(z,t)}{\partial z} + \frac{(\lambda(z) + 2\mu(z))}{\rho(z)} \frac{\partial^2 \upsilon(z,t)}{\partial z^2} +$$
$$+ \frac{\left(3\lambda_z'(z) + 2\mu_z'(z)\right)}{\rho(z)} \Phi(z,t) + \frac{3\lambda(z) + 2\mu(z)}{\rho(z)} \Phi_z'(z,t). \quad (5)$$

Let's take new variety $x(z) = \int_0^z \sqrt{\frac{\rho(y)}{\lambda(y) + 2\mu(y)}} dy$ and new functions $a(x(z)) = \rho(z)$, $в(x(z)) = \lambda(z)$, $c(x(z)) = \mu(z)$, $u(x(z),t) = \upsilon(z,t)$, $\psi(x(z),t) = \Phi(z,t)$.

Then, using the following expressions

$$\upsilon_{tt} = u_{tt},\ \upsilon_z = u_x \cdot x_z,\ \upsilon_{zz} = u_{xx} \cdot x_z^2 + u_x \cdot x_{zz},\ \Phi_z(z,t) = \psi_x(x,t) \cdot x_z,$$
$$\lambda_z(z) = в_x' \cdot x_z,\ \mu_z(z) = c_x(x) \cdot x_z,$$

from the equation (5) we have

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{в_x' + 2c_x'}{\sqrt{в(x) + 2c(x)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a(x)}} u_x - \frac{\left(\frac{a(x)}{в(x) + 2c(x)}\right)'}{\left(\frac{a(x)}{в(x) + 2c(x)}\right)} \cdot u_x +$$
$$+ \frac{3в_x' + 2c_x'}{\sqrt{в(x) + 2c(x)}} \cdot \frac{\psi(x,t)}{\sqrt{a(x)}} + \frac{3в(x) + 2c(x)}{\sqrt{в(x) + 2c(x)}} \cdot \frac{\psi_x(x,t)}{\sqrt{a(x)}}. \quad (6)$$

$$u(x,t)\big|_{t<0} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{3в(0) + 2c(0)}{в(0) + 2c(0)} \cdot \sqrt{\frac{в(0) + 2c(0)}{a(0)}} \cdot * \psi(0,t),\ \delta(t). \quad (7)$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = f(t),\ t \in [0,T]. \quad (8)$$

Let concerning required function $a(x)$ *and* $b(x), c(x)$ and be executed

where $a(x), b(x), c(x) \in \Lambda_0, \Psi(x,t) \in \Lambda_1$,

$$\Lambda_0 = \left\{\rho_0(x) \in C^6(R_+), \rho_0'(+0) = 0,\quad 0 < M_1 \le \rho_0(x) \le M_2, \|\rho_0\|_{C^2} \le M_3\right\},$$
$$\Lambda_1 = \left\{\Psi(x,t) \in C^6(R \times R_+),\ sup p\{\Psi(x,t)\} \subset ((0,d) \times (|x|, T - |x|))\right\}. \quad (9)$$

Let's designate through

$$S(x) = -\left(\ln\left(\frac{a(x)}{в(x) + 2c(x)}\right)\right)_x'.$$

From here

$$a(x) = (в(x) + 2c(x)) \cdot \exp\left(-\int_0^x S(y) dy\right). \quad (10)$$

We allocate singular part of a direct problem decision, representing it as, continuing all connected functions on *x* to *R* by an even mode

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + R(x)\theta(t - |x|), \tag{11}$$

where $\tilde{u}(x,t)$ - continuous smooth function is.

Substituting the received correlation (6), (7) and taking into account (10), (11), we will get a reverse task with the data on the characteristics

$$\left.\begin{aligned} u_{tt} = u_{xx} + \left\{\left[\frac{\varepsilon_x' + 2c_x'}{\sqrt{\varepsilon(x)+2c(x)}}\right]u_x + \left[\frac{3\varepsilon_x' + 2c_x'}{\sqrt{\varepsilon(x)+2c(x)}}\right]\psi(x,t) + \right. \\ \left. + \left[\frac{3\varepsilon(x)+2c(x)}{\sqrt{\varepsilon(x)+2c(x)}}\right]\cdot\frac{\psi_x(x,t)}{\sqrt{a(x)}}\right\} * \frac{1}{\sqrt{a}} + S(x)u_x, \\ u(x,t)\big|_{t=|x|} = R(x), \quad x \in R, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$S(x) = -2R'(x)/R(x) - \left[\frac{\varepsilon_x' + 2c_x'}{\sqrt{\varepsilon(x)+2c(x)}}\right]\cdot\frac{\exp\left(-\int_0^x S(y)dy\right)}{\sqrt{\varepsilon(x)+2c(x)}}\cdot \quad S(0) = \sqrt{\frac{\varepsilon(0)+2c(0)}{a(0)}},$$

$$a(x) = (\varepsilon(x)+2c(x))\exp\left(-\int_0^x S(\lambda)d\lambda\right), \qquad a(0) = \varepsilon(0)+2c(0),$$

$$u_x(x,t)\big|_{x=0} = \frac{3\varepsilon(0)+2c(0)}{\sqrt{(\varepsilon(0)+2c(0))\cdot a(0)}} * \psi(0,t), \tag{13}$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = f(t), \ x \in [0,T]. \tag{14}$$

Here unknown function is the function $a(x)$.

By force of a condition (9), (14) and hyperbolic equation it is possible to be limited by consideration of a inverse problem (12) - (14) in area

$$\Delta(T) = \{(x,t) \in R \times R_+, \quad x \in (0, T/2), \ |x| < t < T - |x|\}.$$

Finite-different solution. Using net designation [4], for the numerical solution of a reverse task (12) - (14) we will take net area:

$$\Delta_h(T) = \{x_i = ih, \ t_k = kh, \ h = T/2N, \ i = \overline{0,N}, \ k = 0,2N; \quad ih \in (0,T/2), \ ih < kh < T - ih\},$$

where h - net step on *x, t.*

Now let's make net analogue of inverse problem (12) - (14):

$$\left.\begin{aligned} u_{\bar{t}\bar{t}} = u_{\bar{x}\bar{x}} + \left[\frac{\varepsilon_{\bar{x}} + 2c_{\bar{x}}}{\sqrt{\varepsilon_i + 2c_i}}u_{\bar{x}} + \frac{3\varepsilon_{\bar{x}} + 2c_{\bar{x}}}{\sqrt{\varepsilon_i + 2c_i}}\psi_i^k + \frac{3\varepsilon_i + 2c_i}{\sqrt{\varepsilon_i + 2c_i}}\psi_{\bar{x}}\right] * \frac{1}{\sqrt{a_i}} + + S_i u_{\bar{t}}, \ (ih, kh) \in \Delta_h(T), \\ u_i^i = R_i, \ i = \overline{0,N}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$S_i = -2R_{\bar{x}} / R_i - \frac{\varepsilon_{\bar{x}} + 2c_{\bar{x}}}{\varepsilon_i + 2c_i} * \exp\left(-\sum_{l=1}^{i-1} S_l h\right), \qquad S_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 + 2c_0}}{\sqrt{a_0}},$$

$$a_i = (\varepsilon_i + 2c_i)\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{i} S_l h\right), \qquad a_0 = \varepsilon_0 + 2c_0,$$

$$u_{\bar{x}}\big|_{i=0} = \frac{3\varepsilon_0 + 2c_0}{\sqrt{(\varepsilon_0 + 2c_0)\cdot a_0}} * \psi_0^k, \quad k = \overline{1,2N-1} \tag{16}$$

$$u_i^k\big|_{i=0} = f^k, \quad k = \overline{0,2N}, \tag{17}$$

where a_i, ε_i, c_i, u_i^k, ψ_i^k, $a_{\bar{x}}$, $\varepsilon_{\bar{x}}$, $c_{\bar{x}}$, $u_{\bar{x}}$, $\psi_{\bar{x}}$, S_i, $u_{x\bar{x}}$, $u_{t\bar{t}}$ net analogues of functions $a(x), \varepsilon(x), c(x), u(x,t), \psi(x,t),$ $a_x, \varepsilon_x, c_x, u_x, \psi_x, S(x), u_{xx}, u_{tt}$ and also $a_{\bar{x}} = (a_i - a_{i-1})/h.$

From the equation (15) we have different analogue of the Dalamber's formula

$$u_i^{k+1} = \left(f^{k+i+1} + f^{k-i-1}\right)/2 + h^2 \sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{l} \frac{\varepsilon_{\bar{x}} + 2c_{\bar{x}}}{\sqrt{(\varepsilon_j + 2c_j)a_j}} * \left(\frac{u^{k-i-j+2l}{}_j - u_j^{k-i-j+2l}}{h}\right) + \tag{18}$$

$$+h^2 \sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{l} \frac{3\varepsilon_{\bar{x}} + 2c_{\bar{x}}}{\sqrt{(\varepsilon_j + 2c_j)a_j}} \cdot \psi_j^{k-i-j+2l} + h^2 \sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{l} \frac{3\varepsilon_j + 2c_j}{\sqrt{(\varepsilon_j + 2c_j)a_j}} \cdot \left(\psi_j^{k-i-j+2l} - \psi_{j-1}^{k-i-j+2l}\right) +$$

$$+h^2 \sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{l} S_j \left(\frac{u_j^{k-i-j+2l} - u_{j-1}^{k-i-j+2l}}{h}\right), \quad i = \overline{1,N-1};\ k = \overline{i,2N-i}.$$

Let's describe algorithm of the solution of a reverse task (16) - (17). From different equations (17) the zero layer is defined:

$$u_0^k = f^k,\ k = \overline{0,2N};\ R_0 = f^0, S_0 = \sqrt{(\varepsilon_0 + 2c_0)/a_0};\ a_0 = \varepsilon_0 + 2c_0. \tag{19}$$

From different equations (16) the first layer is defined.

$$u_1^k = f^k + h(3\varepsilon_0 + 2c_0)\psi_0^k / \sqrt{(\varepsilon_0 + 2c_0)a_0},\ k = \overline{0,2N},$$

$$R_1 = u_1^1, S_1 = -2(R_1 - R_0)/(h\cdot R_1) - \{[(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) + 2(c_1 - c_0)]/[h(\varepsilon_1 + 2c_1)] * \exp(-S_0 \cdot h/2)\},$$

$$a_1 = (\varepsilon_1 + 2c_1)\exp(-S_0 h/2). \tag{20}$$

We admit the layer -i is constructed. According to the formula (18) u_{i+1}^k $k = i+1,\ 2N-i-1,\ in\ i+1$ a layer is defined.

Then R_{i+1}, S_{i+1}, a_{i+1} is defined according to the formulas (15). Thus are unknown reverse tasks: a_i, u_i^k, $i = \overline{0,N}$ are defined.

According to the method [5] it is possible to show, that constructed u_i^k, $\left(u_i^k - u_{i-1}^k\right)/h$, R_i, S_i, a_i are taken accordingly for net functions $\overline{u}_i^k$, $\left(\overline{u}_i - \overline{u}_{i-1}\right)/h$, $\overline{R}_i$, $\overline{S}_i$, $\overline{a}_i$ of a reverse task (15), (16), (17) with $O(h)$.

According to the method [5] it is also possible to prove the following theorem.

The theorem. Let for $f(t) \in C^4([0,T])$ the solution of a inverse problem (6) - (7) exist and satisfy to the condition (9) and let solution of a direct problem $u(x,t) \in C^4(\overline{\Delta(T)})$. Then the approached solution constructed by finite-different method, inverse problem (15), (16), (17) are taken for the exact solution of a inverse problem (6), (7) in a class *C* with speed about of order *O(h)*, at some "small" *T* and has a place for assessment.

$$\left|a_i - \tilde{a}_i\right| \le Ph \cdot \|u\|_{C^2(\Delta(T))},$$

where *P* - constant dependent from norms of known coefficients, *h* - step of a grid, $\|u\|_{C^2(\Delta(T))}$ - norm of a direct problem solution.

1. Apbasov S.O., Yakhno V.G. Defining the characteristics of isotropic vertically - non-uniform inconsistent thermo-elasticity of environment // Questions on a remedial tasks in mathematical physics and analysis. Novosibirsk: VS SOAN USSR, 1986. – p. 26-37.
2. Apbasov S.O. , Yakhno V.G. Inverse problem of a dynamic inconsistent thermo-elasticity // Some questions of the differential equations and discrete mathematics. Novosibirsk: NGU, 1986. -p. 63-70.
3. Kovalenko A.D. Thermo-elasticity. - Kiev: Visa school, 1975.
4. Ladyjenskya O.A. Limited problems of mathematical physics. M.: Science. -1983. - 407 p.
5. Satybaev A. J. Mathematical model of a dynamic inverse problem of thermo-elasticity and its numerical solution// Problems of management and computer science / the Reports of the international conference. - Bishkek, 2000.- p. 371- 376.

УДК 681.3.07

У.М. Кабылбекова

КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ТВЕРДЕНИЯ БЕТОННЫХ ИЗДЕЛИЙ

(*г.Астана, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева*)

Бұл мақалада бетон қоспаларының қатаю процесстерін компьютер арқылы модельдеу принциптері келтірілген. Ол үшін алдын бетон коспаларының қатаю кезіндегі электрофизикалық қасиеттері зерттеліп. олардың электр моделі ұсынылған.қатаю кезіндегі ылғалдықтың өзгеруі бетон қоспасының электр моделіндегі актив және реактив элементтердің жоғары жиіліктегі өзгеруімен байланыстыра отырып электр тізбегінің комплексті кедергісі зерттелген. Комплексті кедергінің (Z), жоғары жиіліктегі өзгеру қалыптары бетон қоспасының алғашқы мерзімдегі қатаю көрсеткіштерімен анықталатындығы дәлелденіп оны компьютерде талдау мүмкіндігі бірнеше мысалдармен келтірілген.

In given work is considered principle of computer modeling to electric model of the structurization of the concrete. The Radio-frequency range under investigation material can be presented in the manner of a certain circuit with concentrated parameter, active(R) and reactive (L and with) element importances which are changed with change of moisture []. For study is used software programs of the popular system scheme-technical modeling Micro-Cap8, by means of which were produced studies of the frequency features of the complex values characterizing parameters process of the structurization. The Transmission functions are assigned, by means of formulas of the operated sources of the voltage assigned by transformations Laplasa (LFVofV). Offered electric model allows realizing express checking parameter to initial stage of the repeating over and over again and realizing the optimization of the processes by means of computer analysis and has a practical interest in the field of designing building product and concrete production automations.

1.Применение высокочастотного метода исследования структурообразования бетона позволило создать электрическую модель указанного процесса (Рисунок 1). Исследование модели типа электрической цепи позволяет учитывать такие активные свойства, как проводимости диэлектрика (утечки, потеря в диэлектрике) [1,2]. Кроме того, на высоких частотах начинают проявлять себя емкостные составляющие характеризующие степень уменьшения свободной воды, то есть преобладание емкостной составляющей (XC) над индуктивной (XL). Основанием для представления подобной электрической цепи является степень совпадения результатов теоретического и экспериментальных исследований [1,4]. Таким образом, по мере уменьшения влажности бетона проводимость имеет комплексный характер, и ее можно изобразить в виде вектора комплексного сопротивления Z с угловым коэффициентом φ. Характер изменения комплексного сопротивления при фиксированных частотах определяется в основном влагосодержанием твердеющего бетона [2,3].

2. Исследования нелинейной электрической цепи с сосредоточенными параметрами

Рассмотрим процессы, происходящие в электрической цепи с последовательным соединением активного R и реактивных сопротивлений L и C синусоидальным переменным входным напряжением $U = U_m Sin\omega t$ (Рисунок 1).

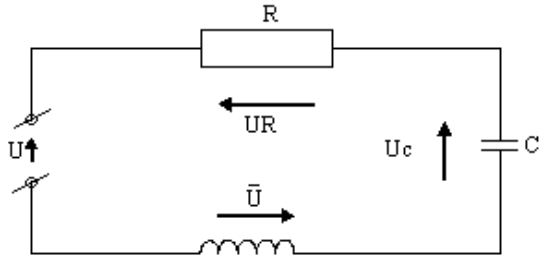


Рис.1. Электрическая цепь R, L,C, питаемая синусоидальным напряжением $U = U_m Sin\omega t$

При этом: $\left(U_r + U_l + U_c = U_m Sin\omega t\right)$ (1)

где $Ur = Ri$ - падение напряжения на сопротивлении;

$\left(U_l = L\frac{di}{dt}\right)$ - ЭДС самоиндукции катушки;

$\left(U_c = \frac{1}{C}\int idt\right)$ - напряжение на конденсаторе C.

i - ток в цепи.

Таким образом

$$Ri + \mathrm{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int idt = U_m Sin\omega t \qquad (2)$$

Решение уравнения надо искать в виде:

$$i = J_m Sin(\omega t + \omega) \qquad (3)$$

где i - мгновенное значение тока.

После подстановки I(t), (3) в уравнение (2) получим:

$$RJ_m Sin(\omega t + \varphi) + \omega L J_m Sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{\omega c} J_m Sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) = U_m Sin\omega t \qquad (4)$$

Известно [4], что синусоидальную функцию можно рассматривать как проекцию движущейся по кругу точка на ось ординат с последующей временной разверткой этой проекции на ось абсцисс, и ее, можно задать в виде комплексного числа.

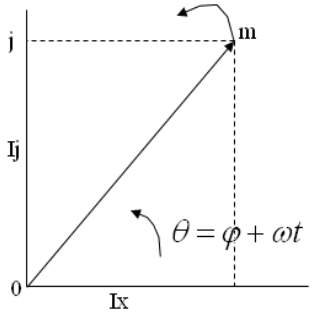


Рис.2. Изображение на комплексной плоскости вектора I в виде комплексного числа $I = Ix + JI_X$

На рис.2, показана комплексная плоскость. Координаты точки m могут быть заданы значением параметров комплексного числа I. Как известно, из курса алгебры, комплексное число можно представить в различных формах;

- показательной, $\dot{I} = (I) \qquad e^{J\theta} = Ie^{j\theta}$

где $(I) = \dot{I}$ - модуль комплексного числа;

θ - его фазовый угол;

$j = \sqrt{-1}$ - мнимая единица

тригонометрической;

$$\dot{I} = I(Cos\theta + jSin\theta)$$

алгебраической,

$$\dot{I} = I_X + jI_Y$$

где $I_x u I_Y$ - проекции вектора I на оси действительных и мнимых величин, при этом

$I_X = ICos\theta$, $I_Y ISin\theta$ $\qquad I = \sqrt{I^2{}_X} + I_Y$

В соответствии с рис. 3. синусоида есть проекция вектора $O_M = I$ на ось ординат, (ось мнимых величин), равна мнимой части комплексного числа $\dot{I}$ т.е. $I_Y = ISin\theta$ так как можно положить, что угол θ содержит как постоянный сдвиг фазы φ, так и возрастающую во времени переменную ωt, то приходим к следующему заключению: мнимая составляющая комплексного числа с линейно изменяющимся во времени аргументом отображает синусоидальную функцию времени, а действительная составляющая комплексного числа может отображать косинусоидальную функцию времени. Поскольку мы установили возможность отображения синусоидальных и

косинусоидальных функций мнимыми и действительными составляющими комплексных чисел, то после несложных преобразований можно представить уравнение (2) в комплексном виде:

$$RJ_m + j\omega L J_m + \frac{1}{j\omega C} J_m = U_m \tag{5}$$

Искомое значение тока имеет вид

$$J_m = \frac{U_m}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \tag{6}$$

Знаменатель выражения (6) является комплексным сопротивлением Z электрической цепи, схема которой представлена на рисунке 1:

$$Z=R+j\omega L+ \frac{1}{j\omega}\frac{1}{C} \tag{7}$$

Теперь необходимо найти фазовый угол φ комплексного сопротивления Z , так как jωL и $\frac{1}{j\omega}\frac{1}{C}$ откладывается по оси мнимых величин, R – по оси действительных величин, то угол $\varphi(\arg Z)$, можно определить через дугу синуса или дугу тангенса Фазовый угол φ комплексного сопротивления Z равен

$$\varphi = arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{R} \tag{8}$$

Таким образом, электрическую цепь, в которой действуют синусоидальные ЭДС, можно рассчитывать с помощью решения алгебраических уравнений с комплексными переменными (5), где сопротивления представляются виде комплексного числа Z (7).

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \tag{9}$$

Заметим, что знаменатель уравнения (6) представляет входной сигнал вызывающий реакцию системы, а числитель Um- регулируемая выходная величина системы [5]. Полагая, что имеют место нулевые начальные условия, т.е. что система до момента приложения воздействия находилась в состоянии покоя, то выражение (9), после несложных преобразований можно переписать в виде,

$$W(s) = \frac{SRC + S^2 LC + 1}{SC} \tag{10}$$

Выражение (10) дает передаточную функцию, которая определяет отношение преобразования Лапласа выходной величины к преобразованию Лапласа входного сигнала при нулевых начальных условиях и представляет отношение двух полиномов комплексной переменной S [5] и позволяет исследовать частотные характеристики Z. Для этого необходимо в выражений (10) вместо комплексной переменной s подставить величину $J\omega$.

3. Исследование частотной характеристики передаточной функции комплексного сопротивления задаваемый формулой передаточной функции, управляемый напряжением LFVofV. Эти источники используется при расчете частотных характеристик [6].

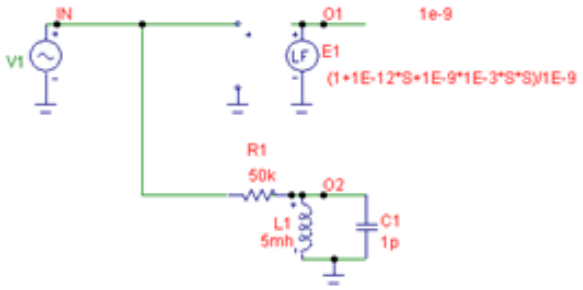


Рис.3. Схема исследования нелинейной цепи (R, L,C)
с линейно управляемым источником LFVofV

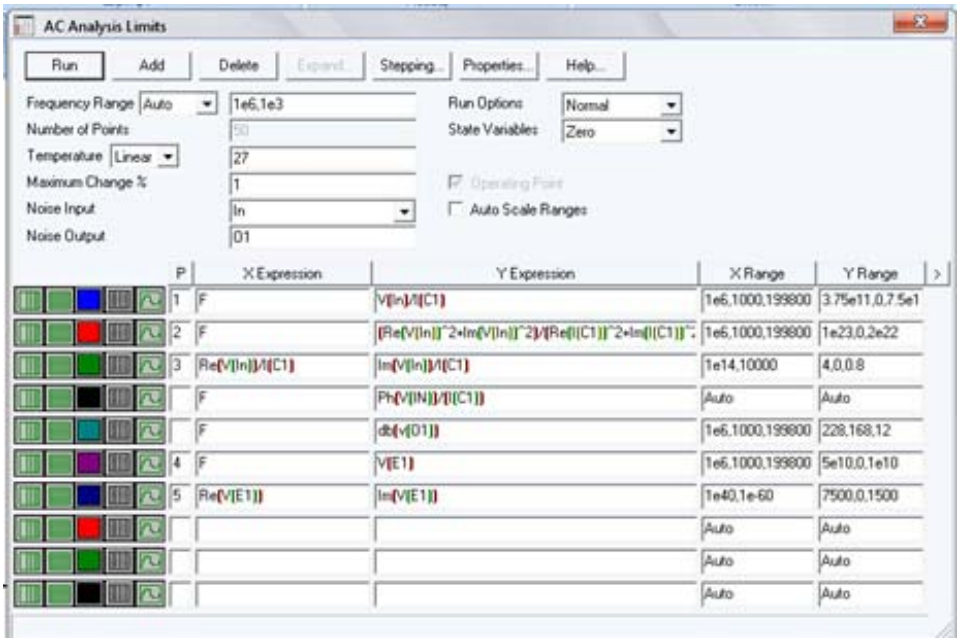
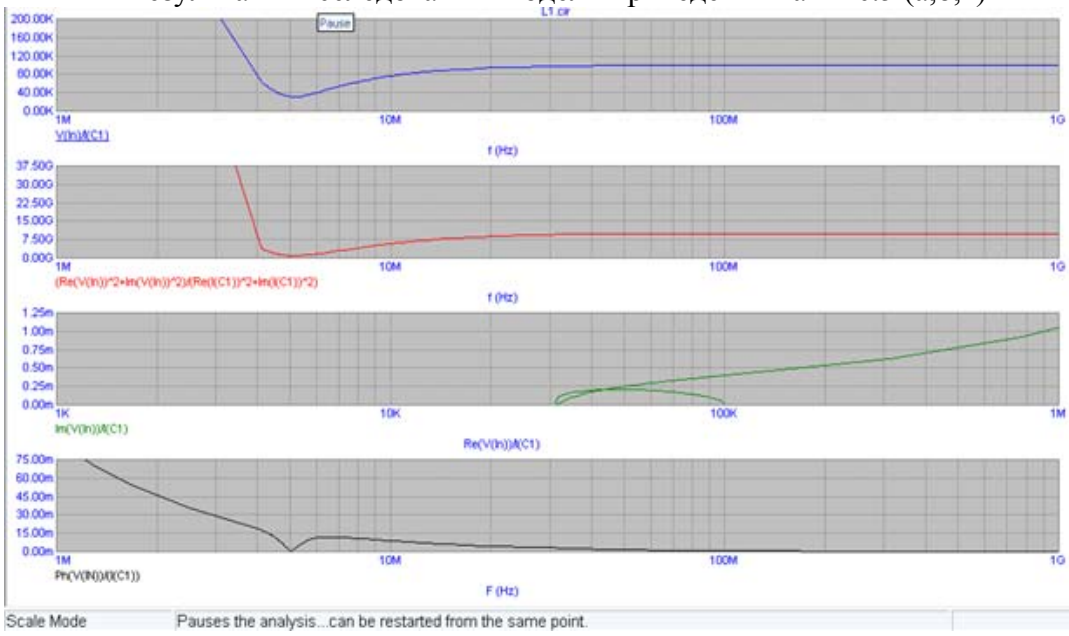
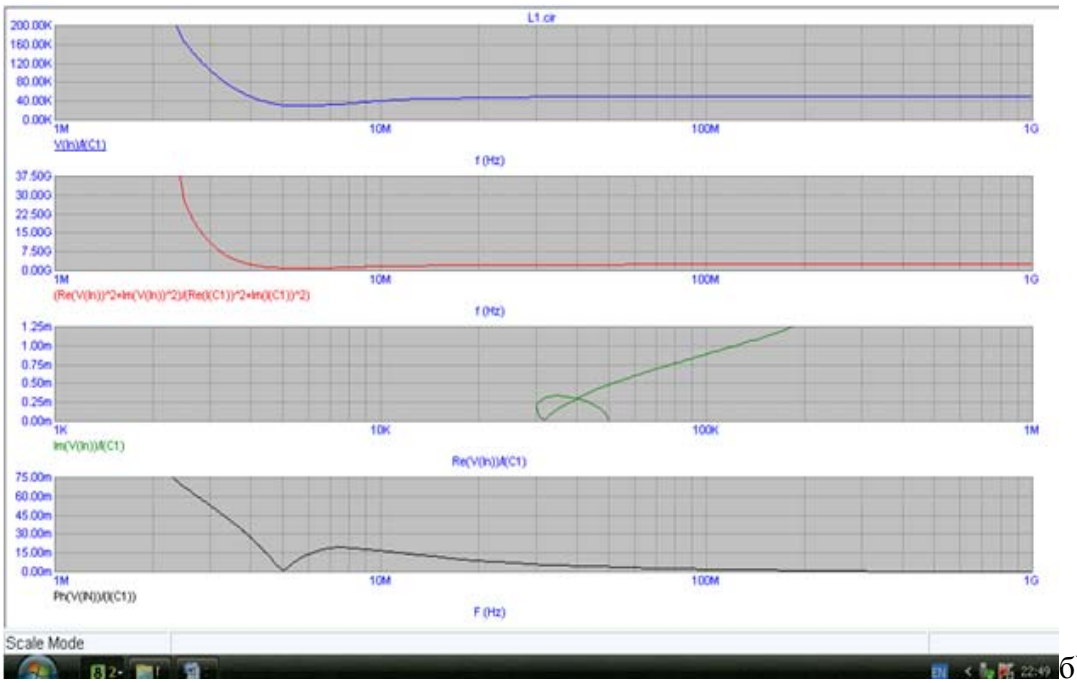


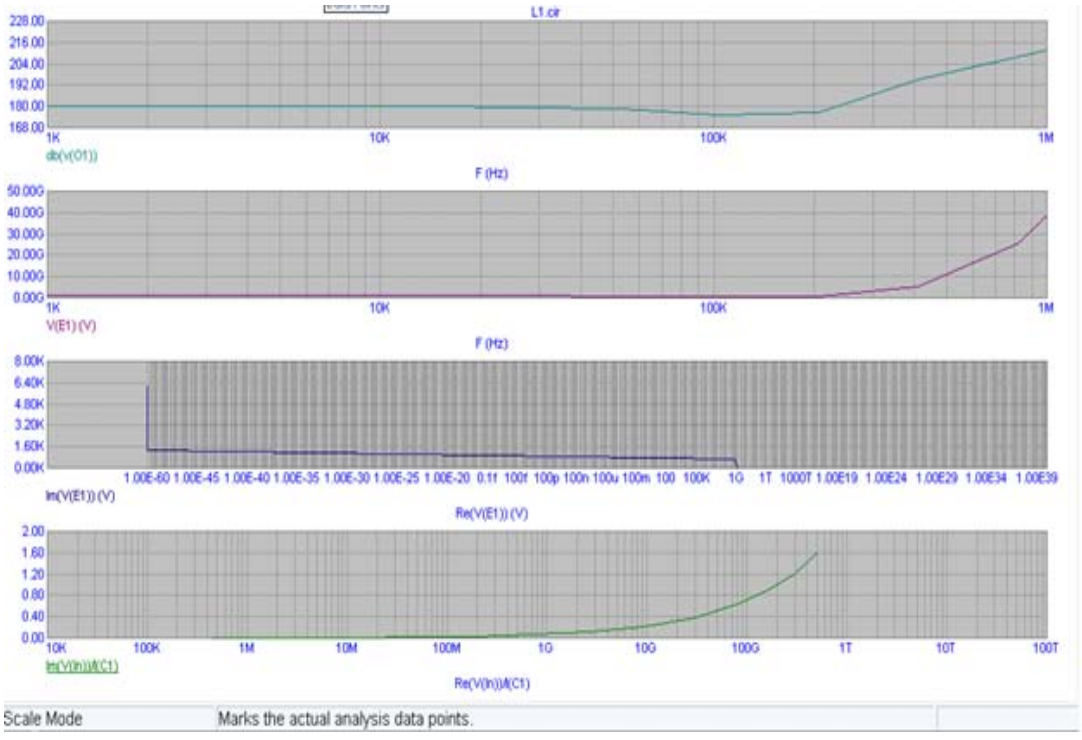
Рис.4. Задание параметров расчета частотных характеристик
Результаты исследования модели приведены на Рис.5 (а,б,в)



а)



б)



в)

По результатам исследований можно сказать что, нелинейные свойства комплексных величин в основном проявляются в области от 5 до 12 МГц, в зависимости от состава и диэлектрических свойств новообразований. Кроме того, исследован фазо-частотные характеристики по криперию Найквиста [6] и построен годограф, представляющий изменение модуля и фазы комплексного сопротивления Z, характеризующий уменьшение влажности со временем.

Следует отметить что, исследования производимые схемотехническим моделированием позволяют осуществить экспрессный контроль параметров начальной стадии твердения и осуществить оптимизацию процессов с помощью компьютерного

анализа и имеет практический интерес в области проектирования строительных изделий и автоматизации производства бетона.

1. Кабылбекова У.М. Прогнозирование прочности легких бетонных конструкций по их электрическим характеристикам на ранних стадиях твердения. М.: Труды Московского автомобильно-дорожного института. 1990.35-40с
2. Волков Ю.С., Гончаров И.В. Электротехника и электроника. – М.:Издательство ВЗПИ, 1992.45 – 95с.
3. А.А. Воронов, В.Н. Титов. Основы теории автоматического регулирования и управления. М.: Высшая школа, 1977.155-200с
4. Горчаков Т.И., Баженов Ю.М. Строительные материалы. – Москва: Стройиздат,1986.75-105с.
5. В.Д. Разевиг. Схемотехническое моделирование с помощью Micro-Cap7- Москва: Горячая линия-Телеком 2003.300с
6. И.М.Макаров. Линейные автоматические системы.- М: Машиностроение.1987.30-180с.

УДК 621.01

Д.А. Кинжебаева, Д.К. Капарова*, А.Г. Петренко*, А.С. Кинжебаева*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ВАЛА И ТОКА ЯКОРЯ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА С НЕЗАВИСИМЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММЫ MATLAB

*(г.Алматы, КазНПУ имени Абая, *-магистрант)*

Мақалада электр механикалық жүйе қарастырылған. Біліктің бұрыштық жылдамдығын және тәуелсіз қоздырлатын тұрақты ток электр қозғалтқышы якорінің тоғын анықтау есебі шешілген. Электр қозғалтқышы жұмысының процесі үш сатыдан тұрады: екпін алу, тұрақтыландыру, тежелу. Бұл жұмыста электр қозғалтқышының екпін алу сатысы зерттелген. Есеп MatLab программасы көмегімен шешілген. Программа құрылып және біліктің бұрыштық жылдамдығымен якорь тогының графиктері символдық түрде алынған.

In article the electromechanical system is considered. The problem by definition of angular speed of a shaft and a current of an anchor of an electric motor of a direct current with independent excitation dares. Process of work of the electric motor consists of three modes: the dispersal, established and braking. In this work the mode of dispersal of the electric motor is investigated. The problem dares in program Matlab. The program is made and schedules of angular speed of a shaft and an anchor current in the symbolical form are received.

Электродвигатели постоянного тока используются в прецизионных приводах, требующих плавного регулирования частоты вращения в широком диапазоне. Электродвигатель постоянного тока дороже двигателей переменного тока и требуют больших затрат на обслуживание, однако они позволяют плавно и экономично регулировать частоту вращения в широких пределах, вследствие чего получили широкое распространение. Хотя система современного электроснабжения основана на применении переменного тока, тем не менее, машины постоянного находят широкое использование в самых различных отраслях промышленности и в быту [1,2].

В основе работы электродвигателей лежит процесс электромагнитной индукции, который возникает при движении проводящей среды в магнитном поле. В качестве проводящей среды обычно используется обмотка, состоящая из достаточно большого количества проводников, соединенных между собой надлежащим способом. Магнитное поле в электродвигателе создается либо с помощью постоянных магнитов, либо возбуждающими обмотками, которые обтекаются токами. Электродвигатели обратимы, то есть могут работать по преобразованию электрической энергии в механическую и, наоборот, в режиме генератора. В корпусе электродвигателя находится неподвижный полый цилиндрический статор, набранный из отдельных, изолированных друг от друга пластин электротехнической (магнитной) стали. На внутренней стороне статора в пазах расположены витки обмотки возбуждения из медной проволоки. Внутри статора располагается подвижный, вращающийся на валу ротор, состоящий тоже из стальных пластин, также изолированных друг от друга термостойким лаком. В пазах ротора располагаются витки медной обмотки [1,2].

Основные характеристики постоянного тока электродвигателя - зависимость частоты вращения n от вращающего момента (момента на валу) M, называемая механической характеристикой, и зависимость вращающего момента от тока якоря (ротора) $I_я$. Вид характеристик определяется системой возбуждения двигателя; возбуждение может быть независимым, параллельным или смешанным. Под возбуждением электрических машин понимают создание в них магнитного поля, необходимого для работы электродвигателя.

По способу возбуждения электрические двигатели постоянного тока делят на четыре группы:

1. С независимым возбуждением, у которых обмотка возбуждения НОВ питается от постороннего источника постоянного тока (рисунок 1).

2. С параллельным возбуждением (шунтовые), у которых обмотка возбуждения ШОВ включается параллельно источнику питания обмотки якоря.

3. С последовательным возбуждением (сериесные), у которых обмотка возбуждения СОВ включена последовательно с якорной обмоткой.

4. Двигатели со смешанным возбуждением (компаундные), у которых имеется последовательная СОВ и параллельная ШОВ обмотки возбуждения.

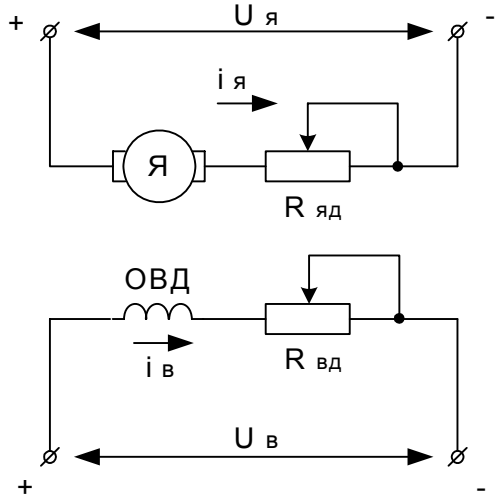


Рисунок 1 – Электродвигатель постоянного тока с независимым возбуждением

Постановка задачи. На якорь электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением подаётся постоянное напряжение U. Момент инерции

относительно оси вращения якоря с валом равен J, индуктивность и сопротивление обмотки якоря равны L и R соответственно. Момент на якоре $M_я = c_1 I$, где $c_1 = const$, I-ток в обмотке якоря; ЭДС противоиндукции $E = c_2 \omega$, где $c_2 = const$, ω-угловая скорость вала. Найти угловую скорость ω вала и ток I в обмотке якоря через t=3/n с после подачи напряжения, если $R = 2\sqrt{\frac{c_1 c_2 L}{J}}$ [3].

Момент на якоре электродвигателя равен

$$M_я = c_1 I \tag{1}$$

Угловая скорость вала определяется по следующему уравнению [4]:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \tag{2}$$

или

$$\omega_{ср} = \frac{1}{t}\int_0^t \omega dt \tag{3}$$

Число оборотов определяется

$$n = \frac{R}{2L} c^{-1} \tag{4}$$

Средняя угловая скорость определяется также следующим выражением:

$$\omega_{ср} = \frac{2\pi n}{t} \tag{5}$$

Подставляя выражение (4) в (5) выражение, получаем:

$$\omega_{ср} = \frac{2\pi R}{t 2L} = \frac{\pi R}{tL} \tag{6}$$

При t=3/n, получаем

$$\omega_{ср} = \frac{2\pi n^2}{3} \ (7), \ \frac{2\pi}{3}\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{2\pi R^2}{4L^2} = \frac{\pi R^2}{2L^2} \tag{8}$$

ЭДС противоиндукции имеет следующий вид:

$$E = c_2 \omega \tag{9}$$

Из формулы (9) определяем угловую скорость вала

$$\omega = \frac{E}{c_2} \tag{10}$$

где $c_2 = const$, коэффициент пропорциональности.

Учитывая противоположные направления U и E, можно написать следующее выражение для тока в цепи двигателя:

$$I_я = \frac{U - E}{R_я} \tag{11}$$

Формулу (11) можно представить в виде:

$$U = E + I_я R_я \tag{12}$$

Напряжение U, приложенное к зажимам двигателя, уравновешивает противо-ЭДС и компенсирует падение напряжения в сопротивлении $R_я$ обмотки якоря. В отличие от генератора ЭДС E двигателя меньше напряжения U на его зажимах. При нормальной работе двигателя величина $I_я R_я$ сравнительно мала и противо-ЭДС E составляет примерно 90-95% от напряжения U.

Из выражения (12) находим ЭДС противоиндукции

$$E = U - I_я R_я \tag{13}$$

Уравнение (13) подставляем в уравнение (10) и получаем

$$\omega = \frac{U - I_я R_я}{c_2} \tag{14}$$

Ток якоря равен по закону Ома:

$$I_я = \frac{U_я}{R_я} \tag{15}$$

Интегрируя выражение (15) по времени при t=3/n, получаем

$$I_я = \int_0^{t/3} \frac{U_я}{R_я} dt = \frac{U_я}{R_я} \int_0^{t/3} dt = \frac{U_я}{R_я} \int_0^{t/3} = \frac{U_я}{R_я} \cdot 0 + \frac{U_я}{R_я} \cdot 0{,}3 = \frac{0{,}3U_я}{R_я} \tag{16}$$

Таким образом угловая скорость вала определяется:

$$\omega = \frac{U - \frac{0{,}3U_я}{R} R_я}{c_2} = \frac{U - 0{,}3U}{c_2} = \frac{0.7U}{c_2} \tag{17}$$

Результаты эксперимента. Составлена программа решения задачи в программе Matlab [4]:

```
function eldvigatel

syms c1 c2 w Ia Ua Ra wsr n L M fi pi t E
Ma=c1*Ia
w=fi/t
wsr=1/t
n=Ra/2*L
wsr=2*pi*n/t
wsr=pi*Ra/t*L
t=3/n
n=t/3
wsr=(2*pi*n^2)/3
ezplot('Ia'),grid
w=pi*Ra^2/L^2
w=E/c2
Ia=Ua-E/Ra
Ua=E+Ia*Ra
E=Ua-Ia*Ra
Ia=int('Ua/Ra',0,t/3)
w=Ua-Ia*Ra/c2
ezplot('w'),grid
end
```

Получен график угловой скорости вала электродвигателя в символьном виде (рисунок 2).

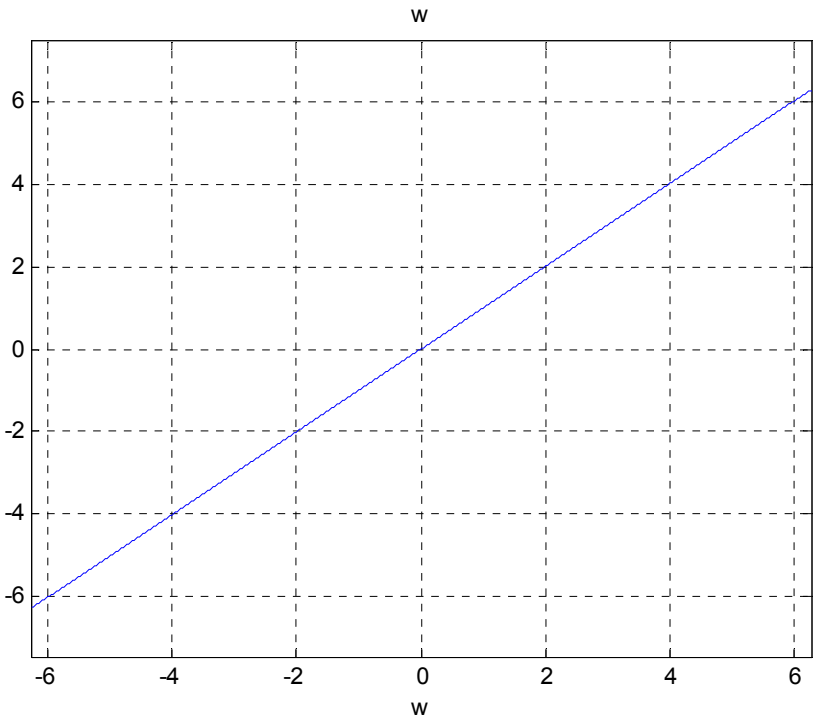


Рисунок 2 – График угловой скорости вала электродвигателя w

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи. Учеб. для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. 7-е изд., перераб. и доп. –М.: Высш. шк., 1978. –528с.
2. Электротехника / Под ред. В.Г. Герасимова. - М.: Высш. шк., 1995.- 480 с.
3. Сборник задач по теоретической механике. Под ред. К. с. Колесникова. М.: Наука. 1983. – 320 с.
4. Данилов И.А. Общая электротехника с основами электроники. – М.: Высш. шк., 2000.- 752 с.
5. Алексеев Е. Р., Чеснокова О. В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. М: НТ Пресс, 2006. - 496 с.

УДК 371.388.6

А.Т. Кулахметова

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТВОРЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ УМЕНИЙ И НАВЫКОВ УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

(*г.Алматы, Институт математики МОН РК*)

Мақалада зерттей білуді қалыптастыру мен дамыту үрдісінде шығармашылық тапсырмаларды пайдалану проблемалары бойынша шолу келтірілген. Оқу-зерттеу қызметінің үрдісінде зерттей білудің мәнділігі бағаланады. Мектеп оқушыларының ғылыми-зерттеу қызметіне дайындығын қалыптастыру ретінде осыған дейін келтірілген зерттеудің сипаттамаларының негізінде оқу-зерттеу қызметін мотивациялау деңгейін ескеріп шығармашылық тапсырмаларды берудің нұсқалары келтірілген.

A review on the use of creative tasks in the process of formation and development of research skills was conducted.

The importance of research skills in the process of teaching and research activities was evaluated. On the base of previously provided characteristics of research abilities, as result of formation of readiness of schoolboys to Educational and research activity, variants of the presentation of creative tasks, taking into account the level of motivation for teaching and research activities are defined.

Основная цель творческих заданий - развить устойчивый интерес к математике, выявить и развить математические способности, привлечь учащихся к учебно-исследовательской деятельности. Теория учебной деятельности, разработанная ведущими психологами Л.С. Выготским, В.В. Давыдовым, Д.Б. Элькониным, П.Я. Гальпериным, Н.Ф. Талызиной, Е.Н. Кабановой-Меллер, А.Н. Леонтьевым и др., в качестве главного содержания обучения определяет способы действий по решению широкого класса задач и овладение учащимися этими способами.

А.А. Столяром [1] на основе деятельностного подхода была разработана концепция обучения математике – как обучение математическим знаниям и математической деятельности. В рамках этой концепции В.А. Байдаком [2] были проведены исследования посвященные, в частности, роли задач в оптимизации процесса обучения математической деятельности в контексте деятельностного подхода и реализация этого подхода в обучении математике посредством учебных задач. Им была разработана теория обучения математической деятельности, в основу которой положены следующие три аспекта математической деятельности:

«1) МЭМ−математизация эмпирического материала (ЭМ) или математическое описание конкретных ситуаций (построение математической модели (ММ));

2) ЛОММ−логическая организация математического материала, полученного в результате первого аспекта деятельности, или исследование класса моделей, к которому принадлежит полученная в результате первого аспекта модель, или построение математической теории (маленькой− «локальной» или большой− «глобальной»);

3) ПМТ−применение математической теории, полученной в результате второго аспекта математической деятельности»

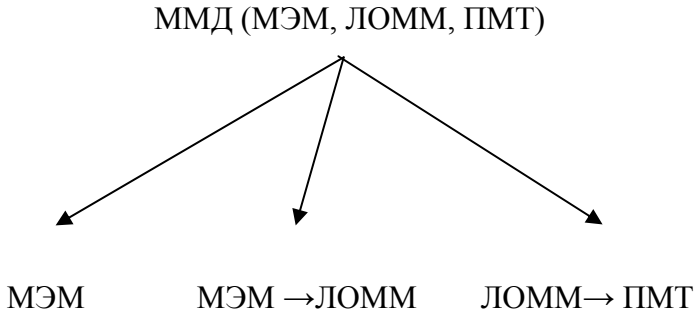


Рис. 1 Схемы обучения математической деятельности [2]

Роль задач, и в частности, поисково-творческих в интеллектуальном развитии учащихся и формировании творческого мышления освещалась такими методистами-математиками как Д. Пойа, В.А. Далингером, Г.В. Дорофеевым, Л.М. Фридманом, Р.Г. Хазанкиным и др. Эти авторы отмечают большие возможности поисковых и творческих задач в процессе усиления развивающей функции задач, т.к. в процессе

решения подобных задач активно используются все методы научного познания и для учащегося решение творческих заданий носит характер научного открытия (субъективная новизна). По этому поводу известно высказывание А.А. Столяра [1], о том, что если ученик что-то открывает для себя (т.е. здесь имеет место субъективная новизна), не смотря, что это уже известные факты в математике, он действует как первооткрыватель. И то, что именуется «изобретением велосипеда», является одним из известных и значимых принципов современной дидактики математики.

Построение математической модели некой ситуации, приводящей к формулированию задачи, включает ряд действий и предполагает определенные знания и умения (понятие о математическом моделировании, определение этапов моделирования и т.д.) исследуется в работах В.М. Монахова, Г.И. Рузавина, С.И. Шварцбурда, В.В. Фирсова и др.

К сожалению, при общем признании роли математики в развитии творческого мышления и перспективности привлечения учащихся к учебно-исследовательской деятельности реально существует организация математической деятельности учащихся, направленная только на формирование общеучебных умений и навыков. В этом проявляется необходимость использования системы творческих заданий способствующих развитию мыслительных процессов учащихся и как необходимого элемента учебно-исследовательской деятельности. В.А. Байдак под системой задач понимает «такую их совокупность, которая позволяет последовательно реализовать аспекты математической деятельности с созданием проблемных ситуаций. В основу построения задач положены модель математической деятельности (ММД), схемы проблемного обучения математической деятельности (рисунок 1) и дидактическая система проблемного обучения» [2].

В исследованиях В.А. Далингера [3,4] исследуются возможности обучения математике на основе создания наглядных образов и оперирования ими.

Можно выделить типы заданий, отвечающих знаниям учащихся и уровню исследовательских умений и готовности к учебно-творческой деятельности. Многими авторами были предложены различные виды классификации заданий, основанные на определении признака, являющегося, по их мнению, основным, в частности, предлагается классификация по следующим признакам творческого задания

− по уровню сложности и содержанию (Г.И. Саранцев, В.А. Крупич, В.А. Гусев); (по процедуре использования языков выражения условия задачи и ответа к ней (различные сочетания по описаниям: словесное, графическое, аналитическое); по количеству неизвестных в условии задачи (обучающие, поисковые, проблемные)

− по функциям в процессе обучения (Н.К. Рузин) задачи дидактические, познавательные и развивающие, в том числе и развивающими различные типы математического мышления.

По нашему мнению и на основании опыта организации учебно-исследовательской деятельности, на разных уровнях сформированности исследовательских умений [5] следует использовать класс задач, способствующих развитию познавательной активности и повышению мотивации к творчеству. На основании анализа психолого-педагогической литературы и опыта автора в [5] были сформулированы критерии уровня развития исследовательских умений с учетом уровня мотивации учебно-исследовательской деятельности.

Чешским психологом Д. Толлингеровой [6] была предложена оригинальная классификация (таксономия) психологической сложности задач, способы конструирования и оценки заданий разной степени сложности, что дает возможность учителю управлять на уроке процессом становления у учащихся многообразия форм мыслительной деятельности от простого запоминания и припоминания до решения

творческих задач. Задачи из разделов I-III можно отнести к задачам конвергентного характера, в разделы IV-V объединяются задачи дивергентного характера, направленные на формирование и развитие творческого мышления.

В зависимости от уровня готовности учащихся и степени сформированности общеучебных и исследовательских навыков, можно одно и то же задание предложить учащимся, с различным уровнем мышления.

Используя таблицу 1 [7], в которой представлены уровни мотивации к учебно-исследовательской деятельности, можем представить возможную схему подачи творческих заданий учащимся. Учащихся, находящихся на адаптивном уровне, привлекать к выполнению творческих заданий нецелесообразно, т.к. у них желательно предварительно усилить мотивацию к проведению учебно-исследовательской деятельности, поднять уровень общеучебных знаний и умений, привить хотя бы элементарные исследовательские умения. Для выполнения творческих заданий рекомендуется привлекать учащихся, как минимум, находящимся на репродуктивном уровне мотиваций к учебно-исследовательской деятельности. Возможные варианты представления творческого задания в зависимости от уровня мотивации к учебно-исследовательской деятельности представлены в таблице 1.

Таблица 1 - Варианты представления творческого задания с учетом уровня мотивации к учебно-исследовательской деятельности

Уровни	Действия руководителя	Результат
Репродуктивный	- указать метод (методы) решения; - помочь определить недостающие данные в условии задачи.	Решение будет получено с использованием имеющихся знаний и известных методов
Эвристический	- указать направление, в котором следует осуществлять поиск метода решения; - помочь в планировании дальнейших исследований;	Осуществлен самостоятельный поиск методов решения, проведена оценка и анализ полученных результатов;
Креативный	- педагог участвует в обсуждении хода исследования; - при необходимости привлекает для консультаций специалистов в данном направлении научных исследований.	Выбор темы и метода исследования проводится самостоятельно. Направление исследований выбирается самостоятельно.

Творческие задания повышают мотивацию к самообразованию, способствуют приобретению и развитию навыков учебно-исследовательской работы. Творческие задания по математике выявляют такие качества как интуиция, находчивость, способность извлекать новые сведения из данных задачи, комбинировать методы исследования и т.д. Как указывалось выше любое творческое задание можно строить в зависимости от способностей, уровня знаний и умений учащегося, например, усложняя условие задачу, введением новых условий или, наоборот, представляя задание с неполными данными. Педагог, используя определенную систему задач может как бы «нащупать» границу возможностей учащегося и выявить скрытые творческие возможности. Здесь мы полностью согласны с мнением И.Я.Лернер [8], который задачу педагога в этом направлении видел в «построении такой совокупности заданий, которая бы обеспечивала творческое применение обучающимися основных знаний (идей, понятий, методов познания) при решении главных, доступных им проблем курса, овладение чертами творческой деятельности, постепенное усложнение проблем, решаемых обучающимися». Однако следует избегать усложнения задач, которое

заключается в излишне громоздких или многократно повторяющихся однотипных вычислениях. Нашей задачей является определение системы задач, последовательное решение которых дало бы возможность поэтапно развить определенные компоненты творческих способностей учащегося.

Использование поисковых и творческих задач для воспитания у учащихся познавательных интересов, к математике рассматривалась В.А.Далингером и Н.В. Толпекиной [9], а также в работах автора [10, 11]. Эти исследования отмечают значимость учебно-творческих задач в процессе поисково-исследовательской деятельности. Определяя процесс обучения, авторы определяют условия при которых педагог может так организовать учебный процесс, чтобы ученик как бы сам порождал решаемую задачу, самостоятельно выявлял ее особенности и был способен изменять условия и моделировать проблемные ситуации.

Творческие задания являются эффективным стимулом к самостоятельному изучению дополнительного материала, выработки исследовательских умений, развитию познавательной активности и мотиваций к углублению знаний.

1 Столяр А.А. Методы обучения математике. - Минск: Высшая школа, 1966.-190 с.

2 Байдак В.А. Деятельностный подход в обучении математике: от концепции до внедрения //Электронный научный журнал «Вестник Омского государственного педагогического университета» Выпуск 2006 Теория и методика обучения▪ www.omsk.edu

3 Далингер В.А. Когнитивно-визуальный подход и его особенности в обучении математике//Электронный научный журнал «Вестник Омского государственного педагогического университета» Выпуск 2006, Теория и методика обучения ▪ www.omsk.edu

4 Далингер, В. А. О тематике учебных исследований школьников // Математика в школе. - 2000. - N 9. - С. 7-10

5 Кулахметова А.Т. Проблемы формирования исследовательских умений учащихся в процессе учебно-поисковой деятельности// Вестник НАН РК, № 4, 2010.

6 Толлингерова Д., Голоушова Д., Канторкова Г. - Психология проектирования умственного развития детей. Москва-Прага, Роспедагенство, 1994. – 52 с.

7 Кулахметова А.Т.Технология формирования умений школьников в процессе учебно-исследовательской деятельности//Вестник КазНПУ, № 2(30), С. 140-146.

8 Лернер И.Я. Дидактические основы методов обучения. - М.: Педагогика,1981, - 185 с.

9 Далингер В.А., Толпекина Н.В. Организация и содержание поисково-исследовательской деятельности учащихся по математике: Учебное пособие. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2004.– 264 с.

10 Кулахметова А.Т. Роль творческих заданий по математике в развитии познавательной активности учащихся// Образование, № 3, 2010, С.77-80.

11 Кулахметова А.Т. Роль и место творческих задач (заданий) в учебнике// Материалы Международной научно - практической конференции «Актуальные вопросы создания современного учебника и учебного книгоиздания в новой информационно-коммуникационной среде», Алматы, 2010.- С.134-137.

УДК 666.017:536.7

М.Қ. Құлбекұлы, Б. Ерженбек

МОНОТЕРМИТТІ ҮЛГІЛЕРДЕГІ ФИЗИКА-ХИМИЯЛЫҚ ТҮРЛЕНУЛЕРДІҢ ТЕРМОГРАФИЯСЫ МЕН ТЕРМОДИНАМИКАСЫ

(Алматы қ., Абай атындағы ҚазҰПУ)

В работе приведены результаты экспериментального исследования термографических и термодинамических характеристик при физико-химических превращениях в монотермитовых модельных образцах. В ходе экспериментальных работ на специальной термографической установке записывались дифференциальные температурные кривые нагрева модельных образцов. Сравнивая эти кривые, полученные для образца-сырца и эталона установлены тепловые эффекты, характерные монотермиту. На основе полученных данных, также установлена кинетика нагрева этих образцов. Определены термодинамические характеристики (коэффициент температуропроводности и удельная теплоемкость) монотермитовых образцов (сырец и эталон) в процессе нагрева.

The results of the pilot study thermographic and thermodynamic characteristics during physical-chemical transformations in monotermitovs model samples. During the experimental work on a special thermography are written differential temperature curves of model specimens. Comparing these curves, obtained for a sample of the raw and the standard established thermal effects characteristic monothermite. Based on these results, also established the kinetics of heating of these samples. The thermodynamic characteristics (the thermal diffusivity and specific heat) monotermitovs samples (raw and standard) in the heating process.

Табиғи шикізаттарды, минералдарды қыздыру барысында олардың бойында күрделі физика-химиялық түрленулердің жүретіндігі белгілі. Олардың біразын бірінші текті фазалық түрленулерге жатқызуға болады. Мысалы, үлгі бойындағы физикалық байланыстағы судың буланып шығуы (кебу үдерісі), физика-химиялық немесе кристалдық (химиялық) байланыстағы судың ыдырап бөлініп шығуы (дегидратация үдерісі), карбонатты қоспалардың ыдырауы (диссоциация) т.б. Бұл түрленулер жылу эффектілерімен және массатасымалдау үдерістерімен байланысты жүреді [1].

Осындай түрленулерге байланысты жылу эффектілері мен кейбір термодинамикалық сипаттамаларын анықтау мақсатында зерттеу нысаны ретінде монотермитті минералы басым табиғи лай шикізатынан (Қарағанды облысы, Қарасу лай кеніші) пластикалық қалыптау әдісімен жасалған цилиндр пішіндегі үлгілер алынды.

Керамикалық құрылыс материалдарын дайындау үшін қолданылатын лай шикізаттарының негізгі бір қасиеті олардың икемделгіштігі-пластикалығы болып табылады. Бұл қасиеті бойынша зерттелген монотермитті лай шикізаты орташа пластикалыға жатады. Лай шикізатының негізгі керамикалық қасиеттері ең әуелі олардың табиғатына, яғни химиялық және минералогиялық құрамына тікелей байланысты, зерттелген лай шикізатының химиялық құрамы (пайыз бойынша) мынадай:

$SiO_2 - 61.14$, $Al_2O_3 - 21.82$, $Fe_2O_3 - 4.03$, $FeO - 0.05$, $TiO_2 - 0.8$, $CaO - 1.67$,

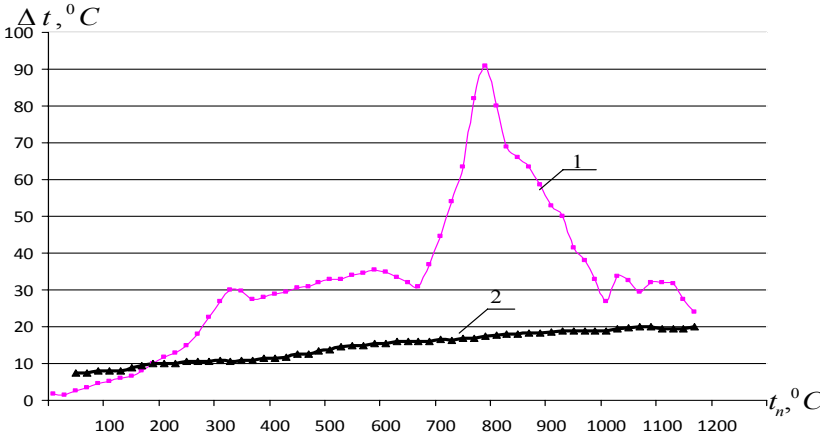
$MgO - 0.85$, $SO_3 - 0.41$. Қыздыру кезіндегі лай шикаізаты массаның «жоғалуы»-7,27%.

Лай шикізатының минералогиялық құрамы (пайыз бойынша) мынадай: лай минералы (монотермит) – 45, кварц – 25, далалық шпат – 15, темір тотықтары – 8, органика – 4 және басқа да қоспалар – 3.

Тәжірибелік зерттеу жұмыстарын жүргізу үшін осы лай шикізатынан пластикалық әдіспен диаметрі $d = 50$ мм, биіктігі $h = 105$ мм цилиндр пішіндегі үлгілер арнайы темір қалыптағыш көмегімен дайындалды. Осындай жолмен дайындалған шикі (ылғалды) үлгілер кептіргіш шкафтардың ішінде 105^0 С температура жағдайында сыртқы ортаның ылғалдылық жағдайына дейін кептірілді (қалдық ылғалдылық 2-3%). Осы үлгілерді күйдіру барысында арнайы тәжірибелік әдістермін жылу тасымалдау үдерістері зерттелді.

Тәжірибелік қондырғы автоматы жүйеде басқарылатын электр пешінен, электронды потенциометрден және термопаралардан құралған. Электронды терморетегіштен және потенциометрден тұратын автоматы жүйе пеш камерасында әртүрлі температуралық режимдерді жүзеге асыруға мүмкіндік береді. Тәжірибелік жұмыстарды жүргізу техникасы былай болды. Монотермитті цилиндр пішіндес үлгілердің беткі қабатына және центріне платина-платинородий термопаралар бекітілді.Үшінші термопара пеш камерасындағы ортада орналасқан. Осындай әдіспен дайындалған үлгі пеш камерасына салынып сызықтық заңдылықпен,яғни тұрақты жылдамдықпен қыздырылды. Қыздыру барысында термопара көрсеткіштері потенциометр көмегімен белгілі бір уақыт аралығында периодты түрде үздіксіз жазылып отырды. Енді осындай әдіспен анықталған термографиялық және термодинамикалық нәтижелерге (1-4 суреттер) тоқталайық.

1-суретте монотермитті үлгілердің дифференциалды температуралық қисықтары, яғни оның беті ($t_б$) мен центрінің ($t_ц$) температуралар айырымының ($\Delta t - t_б - t_ц$) қыздыру барысындағы өзгерісі келтірілген. Мұндағы 1-қисық шикі (құрғақ) үлгінікі; 2-қисық эталон үлгінікі. Шикі үлгінің бойында қыздыру барысында жүретін физика-химиялық түрленулер қайтымсыз болғандықтан эталон ретінде күйдірілген үлгі алынды. Шикі үлгіні күйдіру кезінде алынған дифференциалды қисықтың экстремальды өзгеретіндігін байқаймыз. Бұл шикі зат бойында жүретін табиғаты әртүрлі күрделі физикалық және химиялық түрленулермен түсіндіріледі. $200 - 350^0 C$ температура аралығында байқалатын шағын эндотермиялық эффект үдгіде қалған физикалық байланыстағы судың, ал $650^0 - 980^0 C$ температуралар аймағында байқалатын эндотермиялық эффект (1-қисық) үлгідегі кристалдық (химиялық) байланыстағы судың ыдырап бөлініп шығуымен, яғни дегидратация үдерісімен түсіндіріледі. Қарқынды эндотермиялық эффектінің соңында лай минералы кристалдық құрылымындағы өзгерістерге байланысты баяу экзоэффект байқалады.



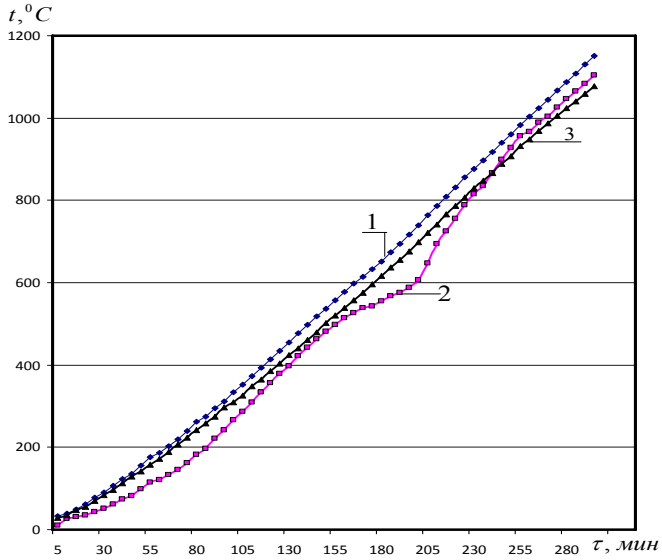
1-сурет. Монотермитті үлгілердің дифференциалды температуралық қисықтары. 1-шикі үлгінікі. 2- эталон үлгнікі

2-суретте пеш камерасының орта температурасы (1-қисық) мен монотермитті шикі (2-қисық) және эталон (3-қисық) үлгілердің қыздыру қисықтары, яғни орташа температуралары келтірілген. Үлгілердің қыздыру барысындағы орташа температурасы мынандай эмпирикалық өрнекпен анықталды [2]:

$$\bar{t} = \frac{1}{3} t_б + \frac{2}{3} t_ц \qquad (1)$$

мұндағы $t_б$, $t_ц$ - үлгінің беткі қабаты мен центрінің температурасы.

Монотермитті шикі үлгінің күйдіру барысындағы орташа температурасын сипаттайтын қисықтың (2-қисық) экстремальді өзгеретінін байқауға болады. Ал эталон үлгінің ораша температурасы (3-қисық) пеш камерасындағы орта температурасына (1-қисық) ұқсас іс жүзінде сызықтық заңдылықпен өзгереді. Бұл нәтижелерді 1-суреттегі дифференциалды қисықтармен салыстыра отырып үлкен эндотермиялық эффектінің үлгінің орташа температурасына қатысты $500^0 - 800^0 C$ аралығына сәйкес келетіндігін көреміз. Ал экзотермиялық эффектінің ығысуы аса байқалмайды.



2-сурет. Цилиндр пішіндегі монотермитті үлгілердің қыздыру кинетикасы.
1-пеш камерасындағы орта температурасы, 2-монотермитті шикі үлгінің күйдіру барысындағы орташа температурасы, 3- эталон үлгінің орташа температурасы

Зерттеліп отырған үлгілердің қыздыру барысындағы кейбір термодинамикалық сипаттамалары, атап айтқанда потенциалөткізгіштік, яғни жылутасымалдауға қатысты температураөткізгіштік коэффициенті мен меншікті жылу сыйымдылығының мәндері былай анықталды. Бойында табиғаттары әртүрлі физика-химиялық түрленулер жүріп жатқан үлгілердегі стационарлық емес бір өлшемді жылуөткізгіштік үдерістерін сипаттайтын дифференциалды теңдеуді эффективті температураөткізгіштік коэффициенті арқылы былай жазуға болады [3,4].:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_{эф} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \qquad (2)$$

Осы теңдеудің үлгілерді сызықтық заңдылықпен қыздыру үшін алынған аналитикалық шешімінен эффективті темперптураөткізгіштік коэффициентінің мәнін анықтауға болатын өрнекті аламыз

$$a_{эф} = \frac{bR^2}{\Gamma(t_б - t_ц)}, \qquad (3)$$

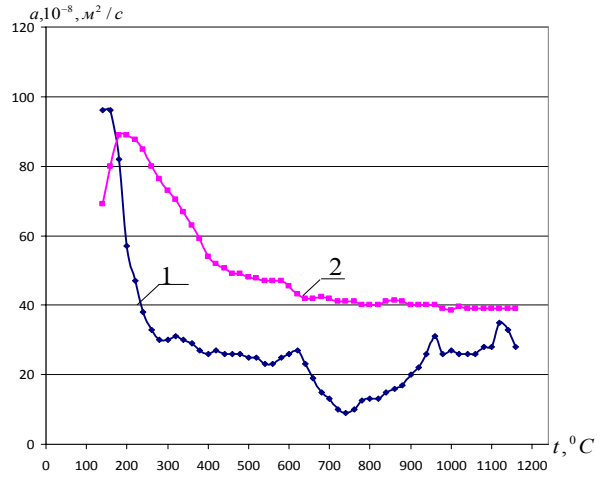
мұндағы b-үлгінің қыздыру жылдамдығы; R-үлгінің анықтауыш өлшемі, Г-тұрақты шама (пластина үшін Г=2; цилиндр үшін Г=4; шар үшін Г=6); $t_б$, $t_ц$-үлгінің беткі қабаты мен центрінің температурасы.

Үлгілердің эффективті меншікті жылу сыйымдылығын мынандай қатынас арқылы анықтауға болады:

$$c_{эф} = \frac{\overline{\lambda}}{a_{эф}\gamma}, \qquad (4)$$

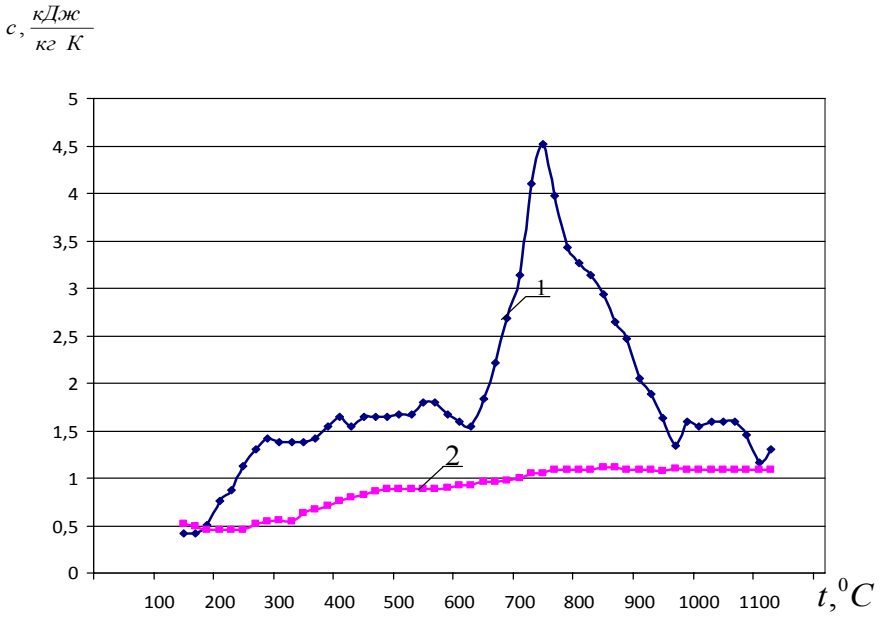
мұндағы $\overline{\lambda}$ - жылуөткізгіштік коэффициентінің зерттелген температуралар аралығындағы орташа мәні. Керамикалық үлгілер үшін оның қыздыру барысындағы орташа тәжірибелік мәні $\overline{\lambda} = 0{,}773\frac{Вт}{м^0 C}$, γ – үлгінің тығыздығы ($\gamma = 1960 кг/м^3$).

3-суретте монотермитті үлгілердің қыздыру барысындағы температураөткізгіштік коэффициенті келтірілген. Мұндағы 1-қисық шикі үлгінікі ($a_{эф}$), ал 2-қисық эталондікі (a). Бұл суретте эффективті температураөткізгіштік коэффициентінің ($a_{эф}$) $200^0 - 350^0 C$, $650^0 - 980^0 C$ және $1000^0 - 1150^0 C$ температуралар аралықтарында экстремальді өзгерістері (1-қисық), жоғарыда келтірілген эндотермиялық және экзотермиялық эффектілерімен түсіндіріледі.



3-сурет.Монотермитті үлгілердің қыздыру барысындағы температураөткізгіштік коэффициенті. 1- шикі үлгінікі.2- эталондікі

4-суретте монотермитті үлгілердің қыздыру барысындағы меншікті жылу сыйымдылығы келтірілген. Мұндағы 1-қисық шикі үлгінікі ($c_{эф}$), ал 2-қисық эталондікі (с). Бұл суреттен эффективті жылу сыйымдылығының ($c_{эф}$) экстремальді өзгерістері (1-қисық) монотермитті үлгідегі термиялық эффектілер байқалатын температуралар аймағына сәйкес келетіндігі байқалады. Атап айтқанда, эндотермиялық эффект барысында $c_{эф}$ мәні тез артып, керісінше экзотермиялық эффект жүретін температура аймақтарында оның айтарлықтай кемуін көруге болады. Бұл нәтижелерді 3-суретпен салыстыра отырып, температураөткізгіштік коэффициенті кемігенде жылусыйымдылығының артатындығын және керісінше алғашқының артуы барысында соңғысының кемитіндігін көреміз.



4-сурет. Монотермитті үлгілерді қыздыру барысындағы меншікті жылусыйымдылығы. 1- шикі үлгінікі. 2- эталондікі

Алынған тәжірибелік зерттеу жұмыстары нәтижелерінің ғылыми-практикалық мәнін атап өтуге болады. Бұл алынған ғылыми мәліметтер зерттелген шикізаттар негізінде жасалатын керамикалық материалдардың, бұйымдардың тиімді күйдіру режимдерін ғылыми тұрғыдан негіздеп жасау барысында іс жүзінде қолданыс таба алады.

1. Павлов В.Ф. Физико-химические основы обжига изделий строительной керамики. –М., Стройиздат, 1977. с. 40-72.
2. Лыков.А.В. Тепломассообмен. - М.: Энергия.- 1978. –480с.
3. Ралко А.В. и др. Термодинамические и термографические исследования процессов обжига керамики. – Киев: Высш. шк., 1980.–80с.
4. Сайбулатов С.Ж., Кулбеков М.К. Исследование тепло- и массообмена в процессе обжига керамических материалов в основе зол ТЭС.- Стройтельные материалы, 1980, № 2 - с. 26-28.

УДК 666.65:536.2

М. Құлбекұлы, Б. Ерженбек, Э.А. Джаксигельдинова

ФИЗИКА-ХИМИЯЛЫҚ КЕБУ БАРЫСЫНДАҒЫ КҮРДЕЛІ ЖЫЛУ ТАСЫМАЛДАУ ҮДЕРІСТЕРІН ЕСЕПТЕУ ТӘЖІРИБЕЛЕРІ АРҚЫЛЫ ҮЛГІЛЕП ЗЕРТТЕУ

(Алматы қ., Абай атындағы ҚазҰПУ)

В работе приведены результаты вычислительного эксперимента по исследованию сложных процессов теплопереноса при физико-химической сушке капиллярнопористых материалов. Математической моделью процесса принята явная разностная схема дифференциального уравнения теплопроводности с эффективным коэффициентом температуропроводности, который учитывает термодинамику физико-химических превращений, протекающих в исследуемых образцах. Путем вычислительного эксперимента получены температурные поля образца-сырца и эталона различного размера при различных скоростях нагрева. Сравнивая температурные поля этих образцов вьявлены тепловые эффекты, связанные с удалением физико-химически связанной воды (межплоскостная вода) из монтмориллонитовых образцов. На основе полученых данных можно оценить динамику нестационарной теплопроводности при обжиге исследуемых образцов.

The results of computational experiment on the study of complex processes of heat transfer in the physical and chemical drying of capillary-porous materials. The mathematical model of the process adopted explicit difference scheme of heat differential equation with an effective coefficient of thermal conductivity, which takes into account the thermodynamics of physical and chemical transformations occurring in the samples. By numerical experiments obtained temperature fields of the sample of raw and reference of various sizes at different heating rates. Comparing the temperature fields of these samples revealed the thermal effects associated with the removal of physical and chemically bound water (zeolitic water) from montmorillontovs samples. Based on these results we can estimate the dynamics of unsteady heat during the firing of the samples.

Табиғи шикізаттарды, мысалы әртүрлі лай материалдарын қыздыру барысында олардың бойында белгілі температураларға тән әртүрлі сипаттағы физика-химиялық түрленулердің жүретіндігі белгілі. Осындай түрленулердің бірқатары материалдар бойында әртүрлі байланыста болатын ылғалдың (судың) белгілі температура аймақтарында ыдырап бу күйінде диффузиялық жолмен сыртқы ортаға тасымалдануымен түсіндіріледі. Қазіргі ғылыми көзқарас бойынша [1] мұндай байланыстағы сулар физикалық, физика-химиялық және химиялық (кристалдық) болып негізінен үш топқа бөлінеді.

Осыған дейінгі жинақталған ғылыми тәжірибелерге сәйкес физикалық байланыстағы судың 100 ºС одан да жоғары температураларда буға айналу арқылы материалдан қарқынды түрде бөлініп шығатындығы. Ал физика-химиялық байланыстағы судың 150-200ºС одан да жоғары температураларда, кристалдық (химиялық) байланыстағы сулардың 450-550 ºС одан да жоғары температураларда ыдырап бөлініп шығатындығы белгілі болып отыр. Бұл үдерістердің барлығы да жылуэффектілерімен (эндотермиялық) және массатасымалдау құбылыстарымен байланысты жүреді.

Шартты түрде бұлардың біріншісін физикалық, екіншісін физика-химиялық, үшіншісін химиялық кебу үдерістері деп атауға болады.

Ғылыми мақалада монтмориллонитті лай шикізатынан (Айнабұлақ лай кеніші, Алматы облысы) пластикалық қалыптау әдісімен дайындалған үлгілердің физика-

химиялық кебу барысындағы күрделі жылу тасымалдау үдерістерінің динамикасын сандық тұрғыдан үлгілеп зерттеу нәтижелері келтірілген.

Жалпы жағдайда бойында физика-химиялық түрленулер жүріп жатқан үлгілердегі стационарлық емес жылуөткізгіштік үдерістерінің математикалық моделі ретінде мынандай дифференциалдық теңдеуді қарастыруға болады [2,3].

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t - \frac{\rho}{c}\frac{\partial u}{\partial \tau}, \qquad (1)$$

мұндағы t– температура; τ- уақыт; u- байланыстағы зат масасының салыстырмалы мәні; ρ- фазалық (химиялық) түрленудің меншікті жылуы; c- меншікті жылу сыйымдылық.

Бір өлшемді есеп жағдайында (шексіз жазық пластина) бұл теңдеуді мынадай түрде жазуға болады

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} - \frac{\rho}{c}\frac{\partial u}{\partial \tau}. \qquad (2)$$

Белгілі түрлендірулерден кейін (2) теңдеу мынадай түрге ие болады:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_{эф} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \qquad (3)$$

мұндағы: $a_{эф} = \dfrac{\lambda}{c_{эф} \cdot \gamma}$ - эффективті температураөткізгіштік коэффициенті, оның мәндерінде физика-химиялық түрленулердің (жылуэффектілерінің) термодинамикасы ескеріледі, (λ-жылуөткізгіштік коэффициент, $c_{эф}$- эффективті меншікті жылусыйымдылық , γ - үлгінің тығыздығы).

Тәжірибе материалдың $a_{эф}$ мәндерінің физика-химиялық түрленулерге байланысты айтарлықтай аралықта өзгеретіндігін көрсетіп отыр [3,4]. Бұрыңғы жұмыста [5] монтмориллонитті лай шикізаттарынан жасалған үлгілердің физика-химиялық кебуі барысындағы (жазық аралық судың ыдырап шығуы) атап айтқанда 150-450 ºС температуралар аралығындағы тәжірибе жүзінде анықталған $a_{эф}$-нің температураға тәуелділігін сипаттайтын аппроксимациялық теңдеулер келтірілген болатын.

Сандық зерттеулер жүргізу үшін жылуөткізгіштік теңдеуінің (3) анық айырымдық схемасы алгоритм ретінде қолданылды. Бұл анық айырымдық схеманы (3) теңдеудегі дербес туындыларды жуықтап шектік айырымдармен ауыстыру арқылы былай жазамыз [6]:

$$\frac{\mathrm{T}_i^{k+1} - \mathrm{T}_i^k}{\Delta\tau} = a_{эф}\,\frac{\mathrm{T}_{i+1}^k - 2\mathrm{T}_i^k + \mathrm{T}_{i-1}^k}{\Delta x^2}, \qquad (4)$$

мұндағы: $\Delta\tau$-уақыт бойынша қадам; Δx-координата бойынша қадам; T_i^k-τ (k) уақыт моментіндегі температура; T_i^{k+1}-$\tau + \Delta\tau$ (k+1) уақыт моментіндегі температура;

Бұдан белгілі бір ($k+1$) уақыт сәтіндегі жазық үлгінің қалыңдығы (x) бойынша і -ші нүктесіндегі температура мәндері үшін мынандай алгебралық теңдеу аламыз:

$$\mathrm{T}_i^{k+1} = \mathrm{T}_i^k + \frac{a_{эф}\Delta\tau}{\Delta x^2}\left(\mathrm{T}_{i+1}^k - 2\mathrm{T}_i^k + \mathrm{T}_{i-1}^k\right), \qquad (5)$$

Анық-айырымдық схемаларды қолдану кезінде уақыт бойынша қадамның ($\Delta\tau$) мүмкін болатын мәні шектеулі және ол координата бойынша қадам (Δx) мен зерттелетін материалдың температураөткізгіштік коэффициентіне тәуелді, бұл тұрақтылық шарты деп аталады:

$$\frac{a_{эф}\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \le \frac{1}{2} \quad \text{немесе} \qquad \Delta\tau = 0{,}5(\Delta x)^2 / a_{эф}.$$

Ал, $\Delta\tau \succ \frac{(\Delta x)^2}{2a_{эф}}$ болғанда, көрсетілген айырымдық схема тұрақсыз болып теңдеудің дұрыс шешімін алу мүмкін болмайды.

Осы нәтижелерді негізге ала отырып, Паскаль тілінде арнайы бағдарлама құрылып, компьютер көмегімен есептеу тәжірибелері жүргізілді. Жоғарыда айтылған үлгілердегі жылу тасымалдау үдерістерінің динамикасын сандық тұрғыдан зерттеу мақсатында нақтылық шарттарын анықтап алу қажет.

Физикалық шарттар тобы. Зерттеу нысаны ретінде алынған монтмориллонитті лай үлгілерінің эффективті температураөткізгіштік коэффициенті мына аралықта өзгереді: $0{,}143 \div 0{,}498 см^2/мин$. Эндотермиялық эффектінің өту сипаты мен $a_{эф}$ өзгеру жағдайына қарай үдерісті екі сатыға бөлуге болады. Осы тәжірибелік мәндер негізінде $a_{эф}$ коэффициентінің қыздыру барысында температураға (пеш камерасындағы орта температурасы) тәуелділігін сипаттайтын мынандай аппроксимациялық теңдеулер алынды:

$$a_{эф} = a_0 + \kappa_1 (t - t_0)^2, \quad 200 \le t \le 400^0 C \qquad (1\text{-саты } 200\text{-}400^oC) \qquad (6)$$

мұндағы $t = t_0 = 400^0 C$ температурада $a_{эф} = a_0 = 0{,}143 см^2/мин$; t - қыздыру барысындағы температура мәндері; κ_1 – тәжірибелік нәтижелер негізінде анықталған пропорционалдық коэффициент $(\kappa_1 = 5{,}9 \cdot 10^{-6} см^2/мин(^0C)^2)$;

$$a_{эф} = a_0 + \kappa_2 (t - t_0)^2, \quad 400 \le t \le 500^0 C \qquad (2\text{-саты } 400\text{-}500^oC) \qquad (7)$$

мұндағы пропорционалдық коэффициент $\kappa_2 = 9{,}15 \cdot 10^{-6} см^2/мин(^0C)^2$.

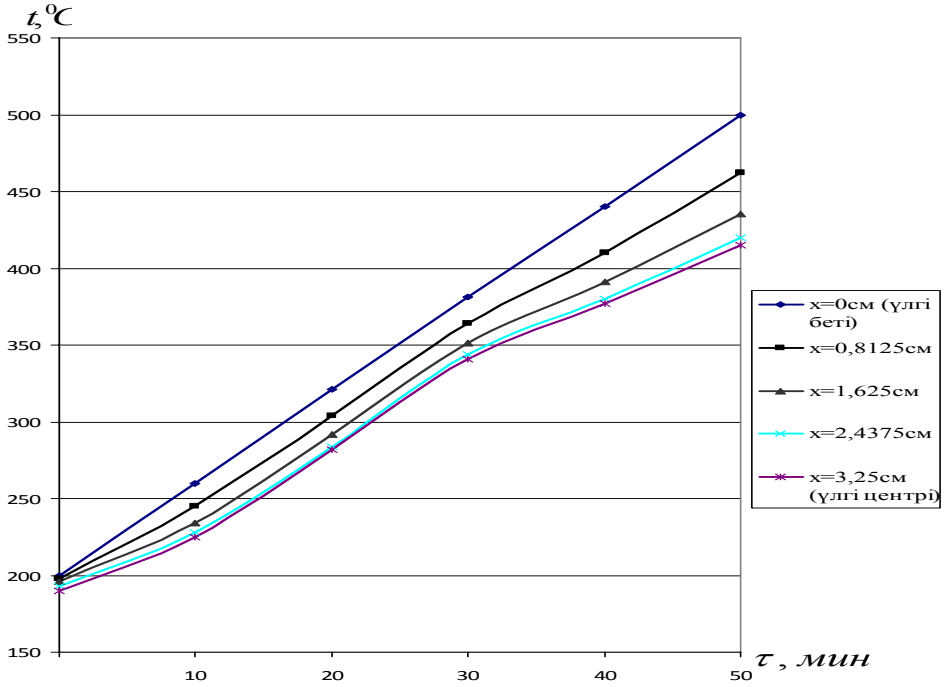
Геометриялық шарттар тобы. Зерттелген үлгілер шексіз жазық пластина пішіндес болып, мынандай қалыңдықтарда алынды:
$d_1 = 2r_1 = 2{,}5см$, $d_2 = 2r_2 = 4{,}5см$, $d_3 = 2r_3 = 6{,}5см$. Симметриялық үдеріс қарастырылғандықтан температуралық өрістер үлгілердің тек жартысы үшін ғана есептелді.

Шеттік шарттар тобы. Бастапқы шарт бойынша (τ=0) үлгі қабаттарындағы температура мәндері: $t(\tau, \frac{x}{r})$: $t(0,0) = 200^0 C$, $t(0,\ 0{,}25) = 198^0 C$, $t(0,\ 0{,}5) = 196^0 C$, $t(0,\ 0{,}75) = 194^0 C$, $t(0,\ 1) = 190^0 C$.

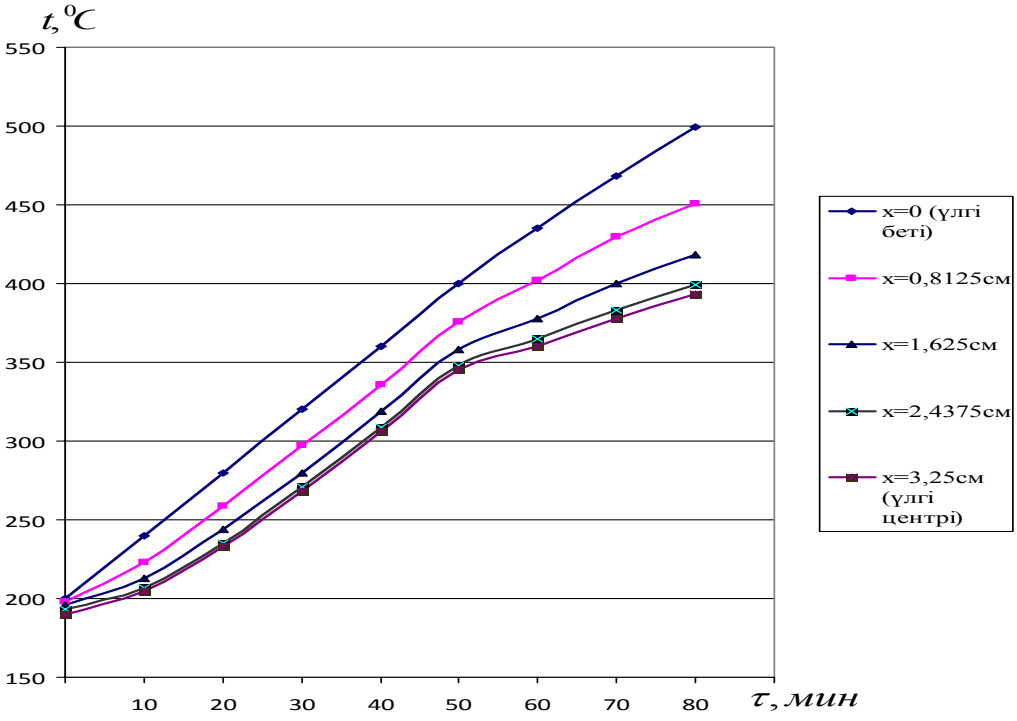
Жылуөткізгіштік үдерісі бірінші текті шекаралық шарт жағдайында қарастырылды. Бұл шарт бойынша керамикалық үлгілер (үлгі беті) 200-500ºС температура аралықтарында мынандай тұрақты: $V_1 = 2град/мин$, $V_2 = 4град/мин$, $V_3 = 6град/мин$ жылдамдықтармен қыздырылып үлгі беттерінің температурасы сызықтық заңдылықпен өзгерді: $t_{бет} = \vartheta \cdot \tau + 200^0 C$.

Жоғарыдағы шарттар бойынша кейбір үлгілерді күйдіру кезінде алынған температуралық өрістер 1-4 суреттерде келтірілген.

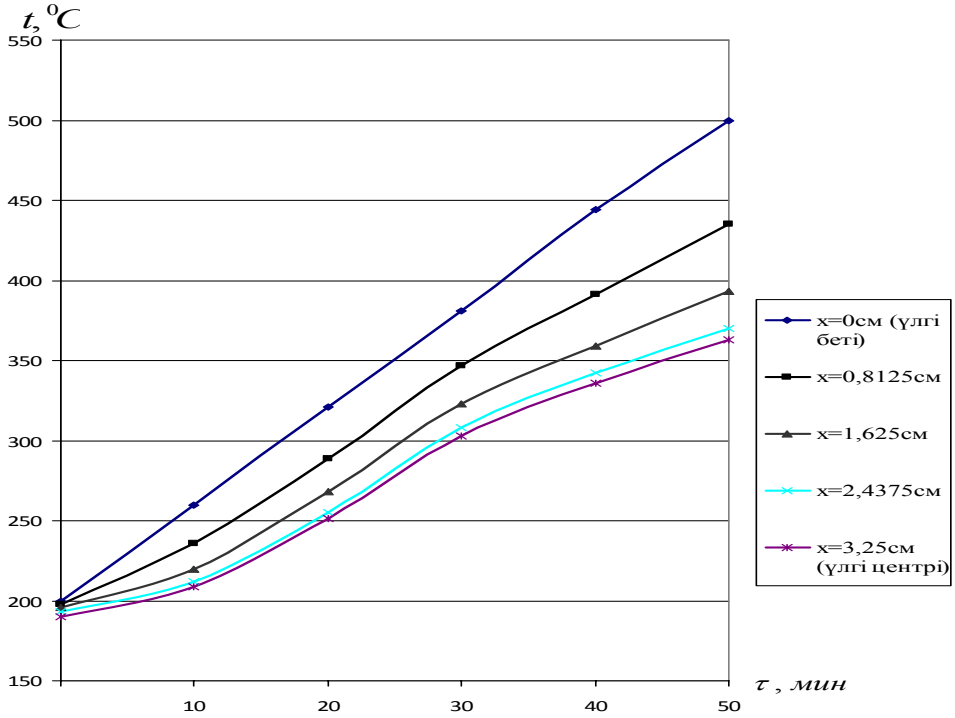
Мұндағы 1-3 – суреттерде қалыңдықтары бірдей $d = 2r = 6{,}5см$ болатын шикі үлгілерді әр түрлі $\upsilon_1 = 2град/мин$, $\upsilon_2 = 4град/мин$, $\upsilon_3 = 6град/мин$ жылдамдықтармен қыздыру барысындағы температуралық өрістер берілген.



1-сурет. Қалыңдығы $d = 2r = 6{,}5см$ шикі үлгіні $\upsilon_1 = 2град/мин$ жылдамдықпен қыздыру барысындағы температуралық өрістер

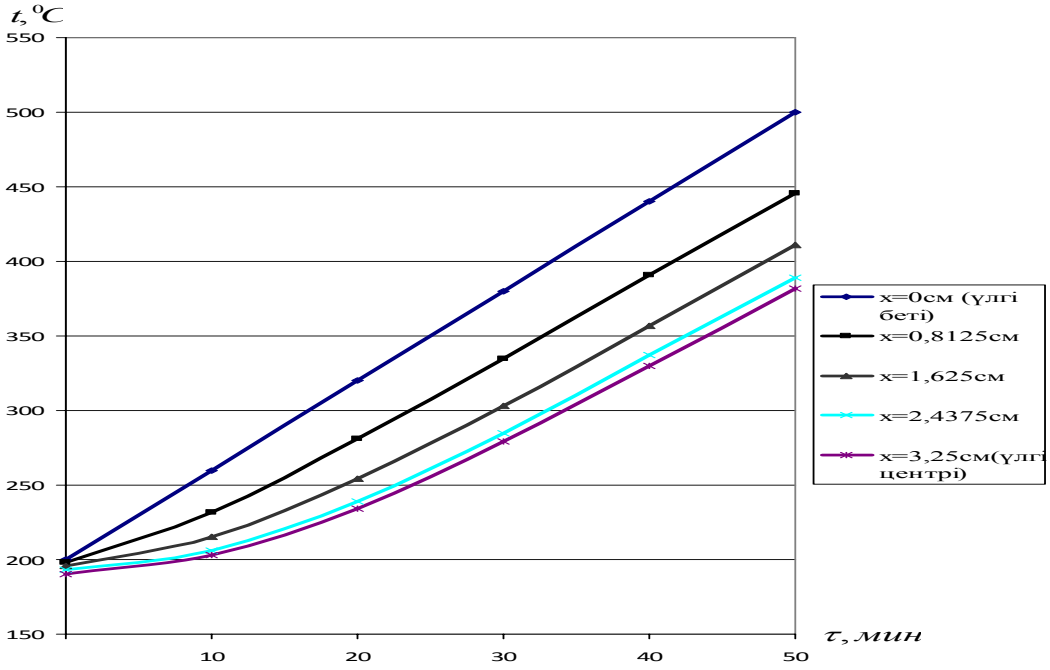


2-сурет. Қалыңдығы $d = 2r = 6{,}5см$ шикі үлгіні $\upsilon_2 = 4град/мин$ жылдамдықпен қыздыру барысындағы температуралық өрістер



3-сурет. Қалыңдығы $d = 2r = 6{,}5см$ шикі үлгіні $\upsilon_3 = 6град/мин$ жылдамдықпен қыздыру барысындағы температуралық өрістер

4-суретте қалыңдығы $d_1 = 2r_1 = 6{,}5см$ эталон үлгіні $\upsilon_3 = 6град/мин$ жылдамдықпен қыздыру барысындағы температуралық өрістер келтірілген. Эталон ретінде алдын ала бір рет күйдіруден өткен үлгілер алынды.



4-сурет. Қалыңдығы $d = 2r = 6{,}5см$ эталон үлгіні $\upsilon = 6град/мин$ жылдамдықпен қыздыру барысындағы температуралық өрістер

Келтірілген нәтижелердегі температуралық өрістер сапалық тұрғыдан ұқсас келеді де, сандық тұрғыдан айтарлықтай айырмашылытар байқалады. Бұл олардың

геометриялық параметрлері мен қыздыру жылдамдықтарының әр түрлі мәндерге ие болуымен түсіндіріледі. Жылуөткізгіштік теориясының қағидаларына сәйкес [1,2] үлгілерді сызықтық заңдылықпен, яғни тұрақты жылдамдықпен қыздыру барысында белгілі (аздаған) уақыттан кейін оның кез келген нүктесінгі температура мәндерінің де осындай (сызықтық) заңдылықпен өзгеретіндігі белгілі. Әрине бұл жағдай үлгінің бойында ешқандай физика-химиялық түрленулер, оларға байланысты жылу эффектілері (жылу көздері) болмаған жағдайда, яғни денеде (жүйеде) тек бір ғана жылуөткізгіштік үдерісі жүрген жағдайда орын алады. Мұндай заңдылық эталон үлгілерді қыздыру барысында анық байқалады (4-сурет).

Біздің жағдайымызда эталон ретінде алдын ала бір рет күйдірілген үлгілер алынғандығын айттық. Себебі, шикі үлгіні алғаш қыздыру барысында орын алатын табиғаттары әртүрлі физика-химиялық түрленулер қайтымсыз болғандықтан эталон үлгілерде олар болмайды. Монтмориллонитті шикі үлгілерді алғаш қыздыру барысында олардың температуралық өрістерінің майысуы, яғни сызықтық заңдылықтан ауытқып экстремальды жағдайда болатындығы байқалады (1-3 суреттер). Мұндай ауытқулар үлгілердің қалыңдықтары мен қыздыру жылдамдықтары артқан сайын қарқындай түсетіндігі анық көрінеді. Осындай ауытқулар зерттелген температура аралығында монтмориллонит минералындағы физика-химиялық (жазықаралық) судың ыдырап бөлініп шығуымен, осыған байланысты орын алатын эндотермиялық эффектімен тікелей байланысты. Біздің жағдайымызда бұл құбылыстардың термодинамикасы эффективті жылуөткізгіштік коэффициентінің ($a_{эф}$) мәндерінің өзгерісінде ескерілген.

Есептеу тәжірибелерін жүргізу барысында $a_{эф}$ мәндерінің температураға тәуелділігі жоғарыда көрсетілген аппроксимациялық теңдеулермен (6), (7) сипатталып, ол дифференциалды жылуөткізгіштік теңдеуінің анық айрымдық схемасында (5), яғни есептің алгоритмінде ескерілді. Математикалық тұрғыдан айтқанда температуралық өрістердің сызықтық заңдылықтан ауытқып эктремальды сипатта болуы $a_{эф}$ коэффициенті мәндерінің үлгідегі жылу эффектілеріне байланысты экстремальды өзгерістерімен түсіндіріледі.

Келтірілген динамикалық нәтижелерді, яғни стационарлық емес температуралық өрістерді қолдана отырып үлгілердегі жылутасымалдау үдерістерінің кинетикасын сипаттауға болады. Бұл жағдайда үлгілердің қыздыру барысындағы орташа температурасы мынандай белгілі эмпирикалық өрнекпен анықталды:

$$\bar{t} = \frac{1}{3} t_{б} + \frac{2}{3} t_{ц} \qquad (8)$$

мұндағы $t_{б}$, $t_{ц}$ – үлгінің беткі қабаты мен центрінің температурасы.

Сонымен алынған ғылыми нәтижелер зерттелген шикізаттарды керамикалық бұйымдар жасауда қолдану барысында олардың тиімді жылутехнологиялық режимдерін ғылыми тұрғыдан негіздеп анықтау үшін қолданыс таба алады.

1. Лыков А.В. Теория сушки. – М.: Энергия, 1968. – 472с., ил.
2. Лыков.А.В. Тепломассообмен. - М.: Энергия.- 1978. – 480 с.
3. Сайбулатов С.Ж., Сулейменов С.Т., Кулбеков М.К. Золы ТЭС в производстве строительной керамики. – Алма-Ата:Казахстан, 1986.-144с.
4. Кулбеков М.К. Исследование и разработка скоростных режимов обжига золокерамических материалов // Технология и свойства стеновых и вяжущих материалов с использованием вторичных сырьевых ресурсов. –М.:1983, с.35-42.

5. М.Құлбекұлы, Э.А.Джаксигельдинова Физика-химиялық кебу барысындағы жылуөткізгіштік процестерін зерттеудің кейбір мәселелері // Космос, ядра, наука и нанотехнология. Материалы IV Международной школы молодых физиков 8-10 апреля 2009 года. с. 76-78.
6. Дульнев Г.Н., Парфенев В.Г., Сигалов А.В. «Применение ЭВМ для решения задач теплообмена.- М.: Высш.шк., 1990.-207с, ил.

УДК 371(0239).0017

А.Ш. Нуразхан, А.Б. Закирова

ВИРТУАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВИТЕЛЬСТВА В ЭЛЕКТРОННЫХ ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ ВУЗА

(*г.Алматы, Фонд духовного развития народа Казахстана, КазНПУ имени Абая*)

Бұл мақалада сұрақ виртуалды өкілділіктердің енгізуі туралы электрондық ақпараттық - коммуникациялыларды технологияларда ЖОО білім алатын ортасына қарастырылады. Сондай-ақ, ақпараттың коммуникациялық технологиялардың бәсекеге сәйкес АҚТ ортасында бәсекелестікті қолдйдың ЖОО-ғы педагогикалық инновацияны қарастырылады. Соған байланысты АКТ-да білімді басқаруға тәжірібелік жүйені қосу керек. Мемлекеттік және мемлекеттік емес ЖОО-да АКТ-ға кафедранның ұсынысы керек.

This given article is considered of question about introduction virtual representations to electronic information-communication technologies in educational ambience of the high school. Also it's considered of pedagogical innovation in high school that support the competitiveness of the ICT area. In this regard, the ICT knowledge management shold incorporate the expert system. Thus the public and private universities should be a virtual representation of the department of ICT.

Педагогические нововведения являются центральным элементом стратегии ВУЗа. Педагогические инновации необходимы для того, чтобы ВУЗ поддерживал свою конкурентоспособность на рынке информационно-коммуникационных технологий образовательных услуг. В связи с этим в информационно-коммуникационных технологиях управление знаниями должно включить в себя экспертные системы и их оболочки с элементами самообучения, а также программные среды в виде пространства решений, в которых имеется возможность сознания идей, кнопка для голосования за идею и возможность подсчета голосов, цикл лекций, семинарские занятия, диспуты, круглый стол и т.д. Поэтому в государственных или негосударственных ВУЗах, необходимо виртуально представлять кафедры в электронных информационно-коммуникационных технологиях в образовательной сфере ВУЗа [1].

Особенность представления знаний в структуре виртуальной кафедры заключается в том, что в ней имеются постоянные и переменные составляющие, последние создаются в виде шаблонов и могут быть изменены пользователем по желанию. Представленные знания имеют 4 уровня вложенности.

Семантические структуры кафедр выпускающих и невыпускающих различны. Ниже (рисунок 1 и 2) представлены верхние уровни структуры выпускающих и невыпускающих кафедр.

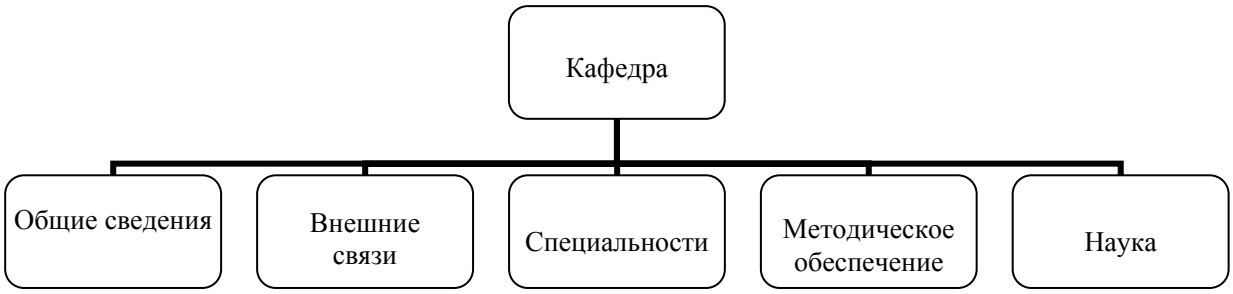


Рисунок 1 - Структура выпускающих кафедр

Рисунок 2 - Структура невыпускающих кафедр

Далее рассмотрим второй уровень иерархии структуры кафедр (рисунок 3 и 4)

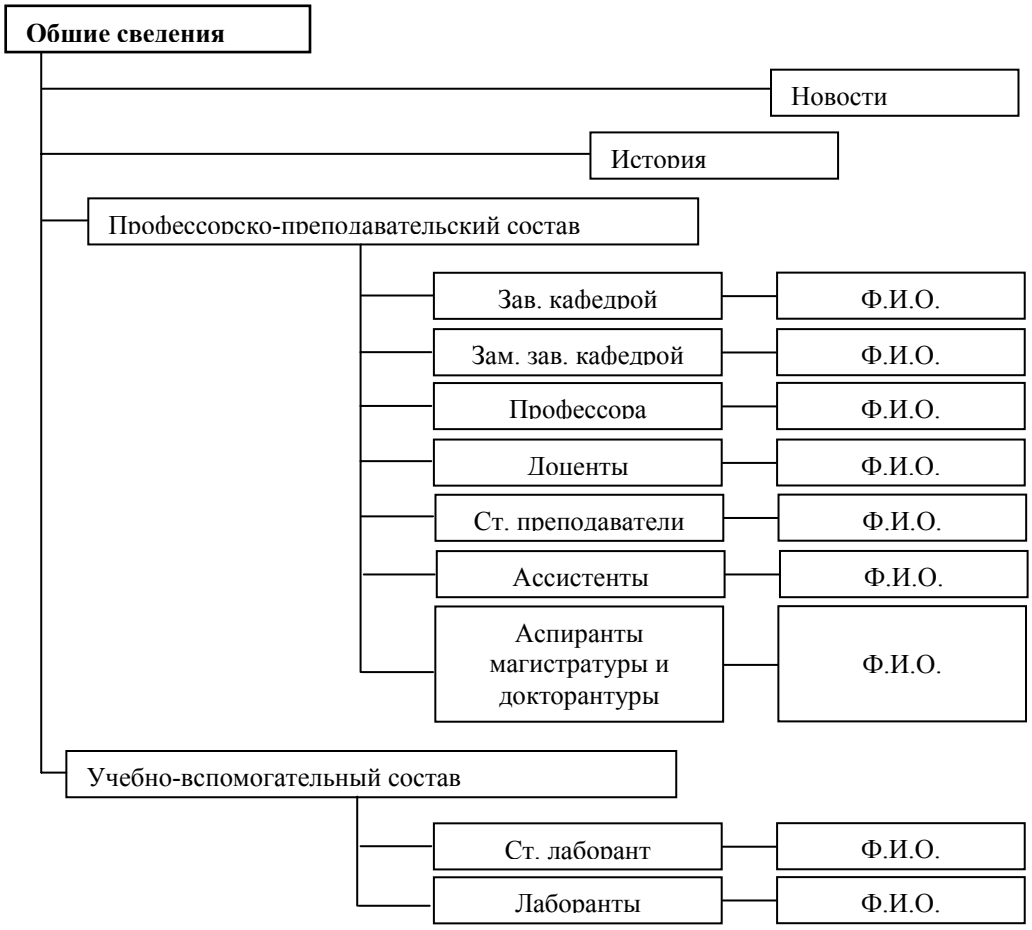


Рисунок 3 - Структура персонала кафедры

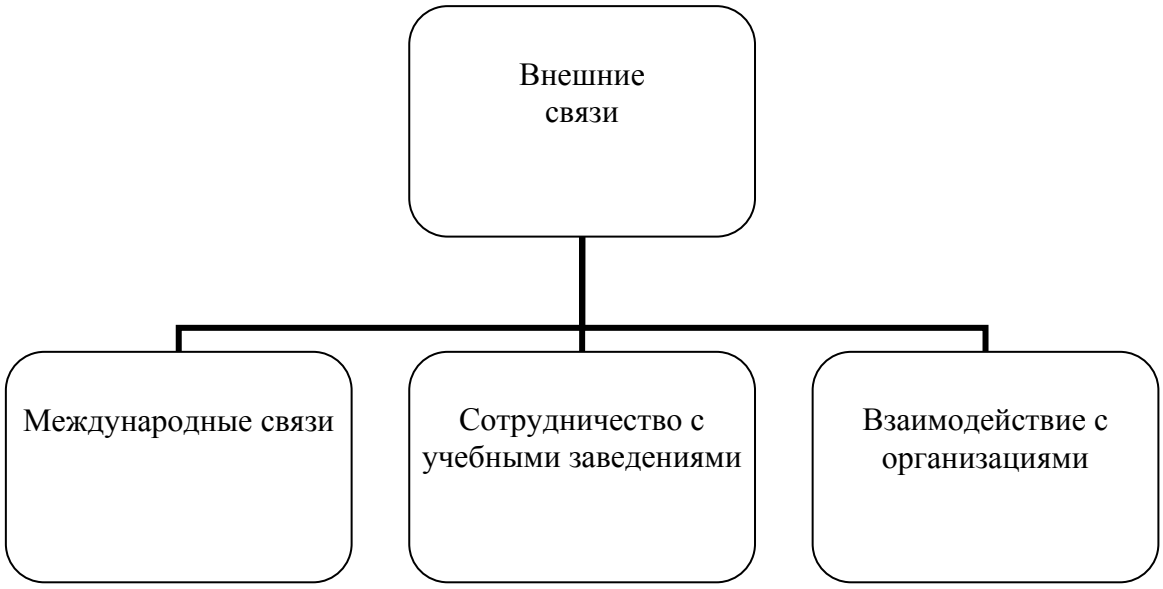


Рисунок 4 - Структура внешних связей кафедры

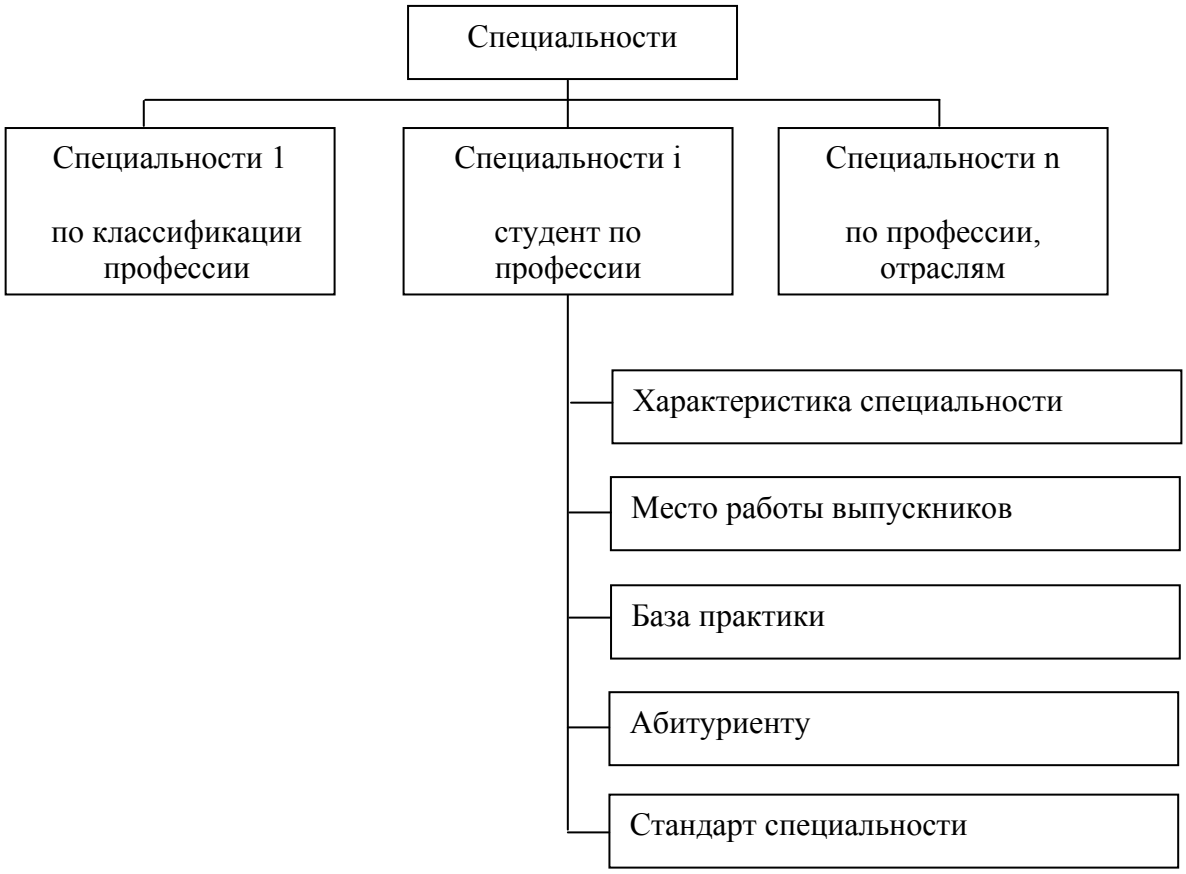


Рисунок 5 - Структура специальностей кафедры

Основой методического обеспечения учебного процесса кафедрой является учебно-методический комплекс (УМК).

Структура учебно-методического комплекса дисциплины соответствующей специальности приведена ниже:

1. Название дисциплины.

2. Программа дисциплины.
3. Планы семинарских и практических занятий.
4. Текст лекций по дисциплине.
5. Лабораторный практикум.
6. Методические указания по изучению дисциплины.
7. Тематика курсовых работ и методические указания по их выполнению.
8. Задания для контрольных работ на заочной форме обучения.
9. Тесты для текущего контроля знаний студентов по дисциплине.
10. Вопросы или тесты к экзамену и зачету по дисциплине.
11. Деловые игры.
12. План и методические указания по самостоятельной работе.

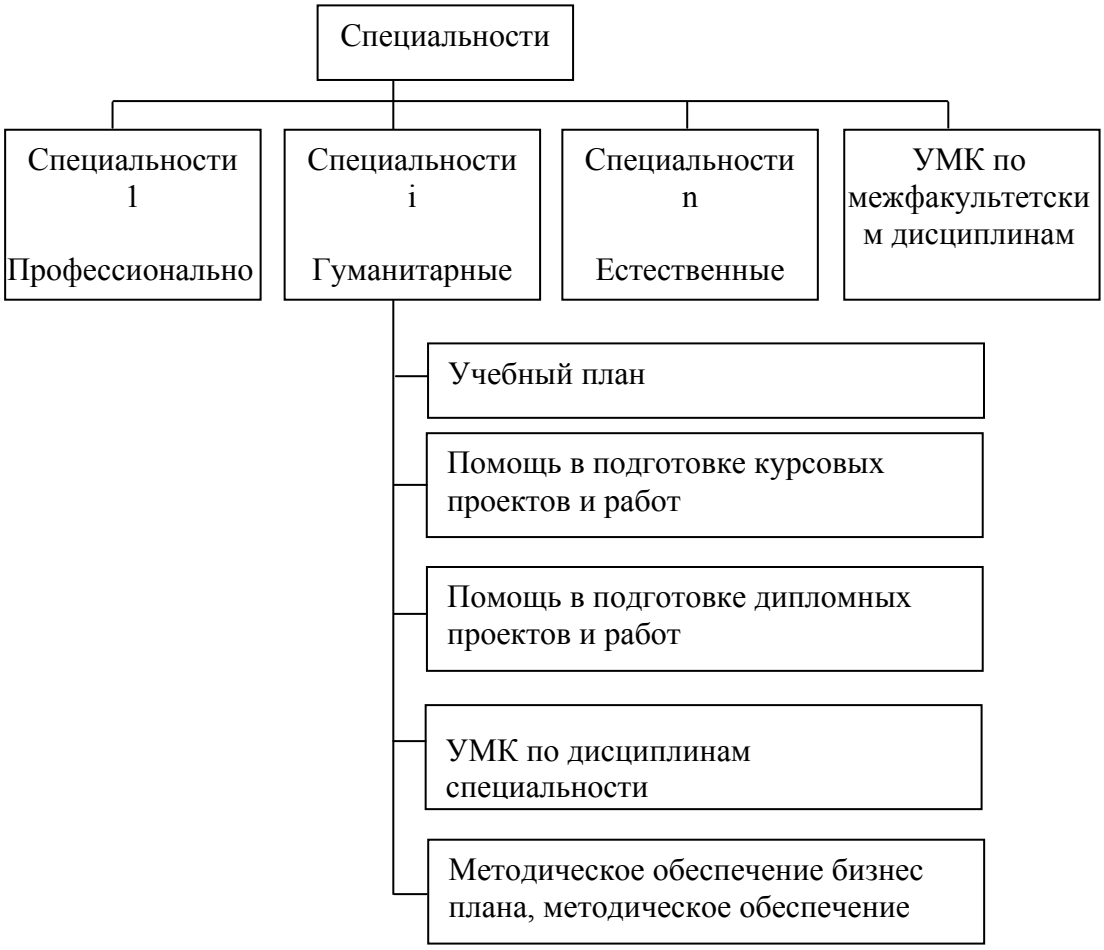


Рисунок 6 - Структура методического обеспечения кафедры

Мы предполагаем, что система управления ВП кафедр состоит из трех основных компонентов:

1) системы управления виртуальной кафедрой;

2) шаблона виртуальной кафедры, представленной в виде множества HTML-документов с сопутствующими файлами;

3) системы отображения виртуальной кафедры.

Изучаемая нами общая технологическая структура работы виртуальной кафедры представлена на рисунок 8.

Рисунок 7 - Структура научной деятельности кафедры

Рисунок 8 - Принципиальная схема работы виртуальной кафедры

Система управления виртуальной кафедрой предназначена для автоматизированного наполнения информацией. Структурированная информация за-

носится в базу данных. Система управления виртуальной кафедрой является системой клиент/сервер [2].

К структурированной информации по всем кафедрам отнесена информация:

– справочник виртуальных кафедр;

– список ученых звании сотрудников кафедр;

– список должностей сотрудников кафедр;

– список научных степеней сотрудников кафедр;

– перечень типов научных конференций.

К неструктурированной информации по кафедре отнесена следующая информация:

– новости кафедры;

– список сотрудников кафедры;

– перечень научно-исследовательских работ преподавателей кафедры;

– перечень научно-исследовательских работ студентов;

– список специальностей кафедры;

– бизнес план кафедры;

– список дисциплин кафедры;

– связь между специальностями кафедры и всеми дисциплинами пространства виртуальных кафедр типа «включает в себя»;

– перечень научных конференций;

– связанные с каждой научной конференцией списки тезисов докладов участников [3].

Процесс взаимодействия преподавателей кафедры со специалистами - разработчиками системы управления виртуальными представительствами кафедр в ходе их наполнения и поддержки включает в себя следующие этапы:

1) изучение принципов представления информации на Web-сайте;

2) обучение формированию документов для ввода;

3) обучение вводу информации через систему управления [4].

Для управления виртуальной кафедрой используется специальный программный модуль, который устанавливается на компьютер кафедры.

В славном меню находятся все пункты управления пространством виртуальных кафедр и пункты управления текущей кафедрой. 'Главное меню разбито на три основных меню:

– «Файл» - общие операции программы. По стандарту оформления программы в среде Microsoft Windows в меню «Файл» находится пункт «Выход», который позволяет выйти из модуля;

– «Управление» - управление текущей виртуальной кафедрой;

– «Административный режим» - управление общими для всего пространства виртуальных кафедр справочниками, такими, как список виртуальных кафедр, список типов конференций, список должностей и т.д. [5].

Для удобства работы разделы виртуальной кафедры, представленные в виде экранных кнопок, вынесены на отдельную панель. Изначально, пока не была произведена регистрация на виртуальной кафедре, эти кнопки недоступны для пользователя, как и соответствующие им пункты в главном меню.

1. Панюкова С.В. Информационные и коммуникационные технологии в личностно-ориентированном обучении. – М.: Прогресс, 1998.
2. Уваров А.Ю, Электронный учебник: теория и практика. – М.: УРАО, 1999 – 220 с.
3. Утлинский Е.В. Информационные технологии диагностики, контроля и коррекции знаний учащихся. / Е.В.Утлинский и др. – М.: НИИ ОСО, 1992.

4. Филатов О.К. Информатизация современных технологий обучения. - Старая Русса, 2001. – 284 с.
5. Фуряева Т.В. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов. – Красноярск: КрГУ, 1987.

УДК 532.5:519.8

Ж.О. Оралбекова

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ОПТИМИЗАЦИОННОГО МЕТОДА ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

(*г.Алматы, КазНПУ имени Абая*)

Бұл жұмыста тұтқыр ортадағы сүзгілеу шектік есебі қарастырылды. Шектік шартты $x = l$ болғанда қалпына келтіруге арналған дискреттік кері есеп қарастырылды. Кері есеп оңтайландыру әдісімен шешілді. Градиентті есептеуге және оған түйіндес есепті шешуге арналған формулалар айырымдық деңгейде алынды. Айырымдық деңгейде кері есепті шешудің алгоритмі жазылды.

In this paper considered the boundary problem for the filtration equation in porous media. A discrete inverse problem of reconstructing the boundary condition at $x = l$ is considered. The inverse problem is solved by the optimization method. The formulas for calculating the gradient and the corresponding dual problem on the difference level are obtained. An algorithm for solving the discrete inverse problem on the difference level is presented.

Постановка задачи определения водонасыщености на одной границе на дифференциальном уровне

Конкретизируем постановку обратной задачи на дифференциальном уровне. Рассмотрим задачу об определении $S(l, t) = q(t)$, водонасыщенности на глубине l из следующих соотношений [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\dfrac{\partial S}{\partial x}\right), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, & (1) \\ S\big|_{t=0} = S_0, & (2) \\ a(x)\dfrac{\partial S}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \mu(t), & (3) \\ S\big|_{x=l} = q(t), \quad 0 < t \le T, & (4) \end{cases}$$

по известной дополнительной информации

$$S(0, t;\, q) = f(t). \qquad (5)$$

Считаем, что $a(x)$, $\mu(t)$, S_0 - известны.

Пусть $p(t)$ - приближенное решение обратной задачи.

Введем в рассмотрение квадратичный функционал

$$J(p) = \int_0^T \left[S(0,t;p) - f(t)\right]^2 dt. \qquad (6)$$

Будем минимизировать квадратичный функционал (6) методом наискорейшего спуска [2]. Пусть известно приближение $p^{(n)}(t)$, последующие приближения определим из:

$$p^{(n+1)}(t) = p^{(n)}(t) - \alpha_n \nabla J(p^{(n)}) . \quad (7)$$

Здесь α_n - коэффициент спуска, который определяется из условия $J\left(p^{(n)} - \alpha_n \nabla J(p^{(n)})\right) = \min_{\alpha>0} J\left(p^{(n)} - \alpha \nabla J(p^{(n)})\right)$, а $\nabla J(p^{(n)})$ - градиент функционала.

Зададим приращение $p + \delta p$, и соответственно

$$\delta S(x,t) = S(x,t; p+\delta p) - S(x,t; p) . \quad (8)$$

Приращение функционала имеет вид:

$$\Delta J(p) = 2\int_0^T \left[S(0,t; p) - f(t)\right]\delta S(0,t)dt + \left\|\delta S\right\|_{L_2(0,T)} . \quad (9)$$

Получим задачу для приращения $\delta S(x,t)$. Для этого используем уравнения (1)-(4). Имеем:

$$\frac{\partial S(x,t; p+\delta p)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial}{\partial x} S(x,t; p+\delta p)\right) + F(\overline{S}, x),\ 0 < x < l,\ 0 < t < T \quad (10)$$

$$S(x,0; p+\delta p) = S_0 \quad (11)$$

$$a(x)\frac{\partial}{\partial x} S(0,t; p+\delta p) = \mu(t) \quad (12)$$

$$S(l,t; p+\delta p) = p + \delta p \quad (13)$$

Градиент функционала имеет вид:

$$\nabla J(p) = a(l)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,t)\Big|_{x=l} . \quad (14)$$

Здесь $\varphi(x,t)$ есть решение введенной нами сопряженной задачи:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(S)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right),\ 0 < t < T,\ 0 < x < l \quad (15)$$

$$\varphi(x,t) = 0,\ 0 < x < l \quad (16)$$

$$a(0)\frac{\partial}{\partial x}\varphi\Big|_{x=0} = 2\left[S(0,t; p) - f(t)\right],\ 0 < t \le T \quad (17)$$

$$\varphi(l,t) = 0,\ 0 < t \le T \quad (18)$$

Алгоритм решения оптимизационной задачи выглядит так:

1^0. Зададим начальное приближение $p^{(0)}(t)$, и решим прямую задачу (1)-(3), получим $S^0\left(x,t; p^{(0)}\right)$.

2^0. Вычислим краевое условие (26) и решим сопряженную задачу (15)-(18), получим $\varphi^0\left(x,t; p^{(0)}\right)$.

3^0. Вычислим градиент функционала по формуле (14), получим $\nabla J(p^0)(t)$.

4^0. Очередное приближение $p^{(n+1)}(t)$, вычислим по формуле (7).

5^0. Проверяем значение функционала (6), если он не достиг минимума, то $p^{(0)}(t) = p^{(n+1)}(t)$ и возврат к пункту 1, если да то к пункту 6.

6^0. Принимаем за приближенное решение обратной задачи $p^{(n)}(t)$.

Дискретный аналог оптимизационного метода восстановления граничного условия

Пусть $p(t_j)$ – приближенное решение обратной задачи. Получим дискретный аналог оптимизационного метода по аналогии как в работе [3].

Аппроксимируем задачу (1)-(4) следующей разностной:

$$y_t = \frac{1}{h}\left(b_{i+1}\frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h} - b_i\frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h}\right) + F_i^j,\ (x_i,t_j)\in\omega_{h\tau}, \tag{19}$$

$$y_i^0 = S_0,\ 0\le i\le N \tag{20}$$

$$a_0 y_{x,0}^j = \mu_1^j,\ 0\le j\le M-1 \tag{21}$$

$$y_N^j = \mu_2^j,\ 0\le j\le M-1 \tag{22}$$

и дополнительная информация

$$y\{0, j\tau; p_i\} = f^j,\ 0\le j\le M-1 \tag{23}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$ - сеточная аппроксимация области $Q = [0,l]\times[0,T]$, $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = \overline{0,N},\ h = l/N\}$, $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = \overline{0,M},\ \tau = T/M\}$, $y(x_i,t_j)$ - сеточная аппроксимация функции $S(x,t)$, $y_i^{j+1} = y(x_i,t_{j+1}) = y_i^{j+1}$, $y\{0, j\tau; p^j\}$ - особая зависимость сеточной функции y_i^j от искомой функции $p(t_j)$.

$$b_{i+1} = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}.$$

Рассмотрим один из вариантов аппроксимации функционала (6), например вида

$$J[p] = \sigma\sum_{j=1}^{M}\left[y\{0, j\tau; p^j\} - f^j\right]^2. \tag{24}$$

Перейдем к выводу градиента функционала.

Зададим приращение $p^j + \delta p^j$, $\delta y_i^j = y\{x_i,t_j; p^j + \delta p^j\} - y\{x_i,t_j; p^j\}$.

Как и на дифференциальном уровне, относительно приращения δy_i^j, нетрудно получить разностную задачу:

$$\delta y_t = \frac{1}{h}\left(b_{i+1}\frac{\delta y_{i+1}^j - \delta y_i^j}{h} - b_i\frac{\delta y_i^j - \delta y_{i-1}^j}{h}\right),\ (x_i,t_j)\in\omega_{h\tau}, \tag{25}$$

$$\delta y_i^0 = S_0,\ 0\le i\le N \tag{26}$$

$$a_0\delta y_{x,0}^j = \mu_1^j,\ 0\le j\le M-1 \tag{27}$$

$$\delta y_N^j = \delta\mu_2^j,\ 0\le j\le M-1 \tag{28}$$

Умножим обе части сеточного уравнения (7) на ψ_i^j, а затем просуммируем по j от 1 до $M-1$, и по i от 1 до $N-1$, имеем

$$\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=1}^{N-1}(\delta y_t)_i^j\psi_i^j = \sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{h^2}\left(b_{i+1}\Delta\delta y_{i+1} - b_i\nabla\delta y_i\right)\cdot\psi_i^j \tag{29}$$

Обозначим левую часть равенства (29) через I_1, а правую часть I_2, и применив разностные аналоги интегрирования по частям:

$$(y,\nabla v) = -[v,\Delta y) + y_N v_{N-1} - y_0 v_0,$$

$$(y,\Delta v) = -(v,\nabla y] + y_N v_N - y_0 v_1,$$

где: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$, $(y,v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i$, $(y,v] = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i$.

Запишем цепочку равенств:

$$I_1 = \sum_{i=1}^{N-1} -(\delta y_i^j, \nabla\psi_i^j) + \psi_i^M\delta y_i^M - \psi_i^0\delta y_i^1, \tag{30}$$

$$I_2 = \sum_{j=1}^{M-1}\left\{-b_{i+1}(\delta y_i^j, \nabla\psi_i^j] + \psi_N \delta y_N - \psi_0 \delta y_1 + b_i[\delta y_i^j, \Delta\psi_i^j) - \delta y_{N-1}\psi_N - \psi_0 \delta y_0\right\}.$$

Раскрыв скалярное произведение, имеем:

$$I_2 = \sum_{j=1}^{M-1}\left[-\sum_{i=1}^{N} b_{i+1}\delta y_i^{j+1}\nabla\psi_i^j + \sum_{i=1}^{N} b_i \delta y_i^{j+1}\Delta\psi_i^j + \psi_N \delta y_N - \psi_0 \delta y_1 - \delta y_{N-1}\psi_N - \psi_0 \delta y_0\right].$$

Введем замену индексом $j' = j+1$, получим

$$I_2 = \sum_{j'=2}^{M}\left[-\sum_{i=1}^{N} b_{i+1}\delta y_i^{j'}\nabla\psi_i^{j'-1} + \sum_{i=1}^{N} b_i \delta y_i^{j'}\Delta\psi_i^{j'-1} + \psi_N \delta y_N - \psi_0 \delta y_1 - \delta y_{N-1}\psi_N - \psi_0 \delta y_0\right]. \quad (31)$$

Введем в рассмотрение вспомогательную разностную сопряженную задачу:

$$-\breve{\varphi}_{\bar{i}} = \frac{1}{h}\left(b_{i+1}\frac{\breve{\varphi}_{i+1} - \breve{\varphi}_i}{h} - b_i \frac{\breve{\varphi}_i - \breve{\varphi}_{i-1}}{h}\right),\ i = 1, 2, \ldots, N-1,\ j = M-1, \ldots, 1 \quad (32)$$

$$\varphi_i^{M-1} = 0,\ i = 0, 1, \ldots, N \quad (33)$$

$$\breve{\varphi}_N = 0,\ j = M-1, \ldots, 1 \quad (34)$$

$$a_0 \breve{\varphi}_{x,0} = 2[y\{0, \tau j; p^j\} - f^j],\ j = M-1, \ldots, 1 \quad (35)$$

Далее учитывая (32)-(35), а также (26)-(28), в соотношении (29), принимая во внимание (30), (31), останется приращение функционала, откуда градиент будет иметь вид:

$$\nabla J(p^j) = a_l \varphi_{x,N}^{j-1},\ j = M-1, \ldots, 1.$$

Для решения оптимизационной задачи на дискретном уровне, используем также процедуры, что и на дифференциальном уровне.

1. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984 г. - 208 с.
2. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач, М.: Наука, 1981. – 400 с.
3. Искаков К.Т., Оралбекова Ж.О. Дискретный аналог оптимизационного метода решения обратной задачи для параболического уравнения // Вестник КарГУ имени Букетова, №2(58), Караганда, 2010. - С. 56-59.

УДК 532.5:519.8

Ж.О. Оралбекова

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ВОДОНАСЫЩЕННОСТИ

(*г.Алматы, КазНПУ имени Абая*)

Шектік шартты $x = l$ болғанда қалпына келтіруге арналған кері есеп зерттелді. Кері есеп оңтайландыру әдісімен шешілді. Градиентті есептеуге және оған түйіндес есепті шешуге арналған формулалар шығарылды. Дифференциалдық деңгейде кері есепті шешудің алгоритмі жазылды. Шектік кері есеп үшін шартты орнықтылық бағалаулары алынды.

The inverse problem of reconstructing the boundary condition at $x = l$ is researched. The inverse problem is solved by the optimization method. The formulas for calculating the gradient and the corresponding adjoint problem are obtained. An algorithm for solving the inverse problem in differential level is presented. The conditional stability estimates for a boundary inverse problem are obtained.

Постановка задачи определения водонасыщености на одной границе. Рассмотрим задачу об определении $q(t)$, водонасыщенности на глубине l из следующих соотношений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\dfrac{\partial S}{\partial x}\right), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T, & (1) \\ S\big|_{t=0} = S_0(x), \quad 0 \le x \le l, & (2) \\ a(x)\dfrac{\partial S}{\partial x}\Big|_{x=0} = \mu(t), \quad 0 < t \le T, & (3) \\ S\big|_{x=l} = q(t), \quad 0 < t \le T, & (4) \end{cases}$$

по известной дополнительной информации:

$$S(0,t;\, q) = f(t). \tag{5}$$

Считаем, что $a(x)$, $\mu(t)$, S_0 - известны.

Пусть $p(t)$ - приближенное решение обратной задачи.

Введем в рассмотрение квадратичный функционал:

$$J(p) = \int_0^T \left[S(0,t;\, p) - f(t)\right]^2 dt \cdot \tag{6}$$

Будем минимизировать квадратичный функционал (6) методом наискорейшего спуска [1]. Пусть известно приближение $p^{(n)}(t)$, последующие приближения определим из:

$$p^{(n+1)}(t) = p^{(n)}(t) - \alpha_n \nabla J(p^{(n)}). \tag{7}$$

Здесь α_n - коэффициент спуска, который определяется из условия:

$J\left(p^{(n)} - \alpha_n \nabla J(p^{(n)})\right) = \min\limits_{\alpha>0} J\left(p^{(n)} - \alpha \nabla J(p^{(n)})\right)$, а $\nabla J(p^{(n)})$ - градиент функционала.

Перейдем к выводу формулы для вычисления градиента функционала по аналогии как в работе [2].

Зададим приращения: $p + \delta p$, $\delta S(x,t) = S(x,t;\, p+\delta p) - S(x,t;\, p)$.

Вычислим приращение функционала:

$$\Delta J(p) = 2\int_0^T \left[S(0,t;\, p) - f(t)\right]\delta S(0,t)dt + \left\|\delta S\right\|_{L_2(0,T)}.$$

Для приращения $\delta S(x,t)$ имеем следующую задачу:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta S) = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial}{\partial x}(\delta S)\right), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T, \tag{8}$$

$$\delta S(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{9}$$

$$a(0)\frac{\partial}{\partial x}(\delta S)\Big|_{x=0} = 0, \quad 0 < t \le T, \tag{10}$$

$$\delta S(l,t) = \delta p, \quad 0 < t \le T. \tag{11}$$

Далее умножим обе части уравнения (8) на функцию $\varphi(x,t)$ и проинтегрируем по x от 0 до l и по t от 0 до T, имеем:

$$\int_0^l\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\delta S)\varphi(x,t)dt\,dx = \int_0^T\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial}{\partial x}\delta S\right)\varphi(x,t)dx\,dt. \tag{12}$$

Обозначим левую часть через I_1, а правую часть через I_2. Применяя интегрирование по частям и учитывая условие (9), полагая что:

$$\varphi(x,T)=0\,, \tag{13}$$

получим следующее выражение:

$$I_1=-\int_0^l\int_0^T \delta S\frac{\partial\varphi}{\partial t}dtdx\,.$$

Далее проведя аналогичные выкладки для выражения I_2 и учитывая условия (10), (11), полагая

$$\varphi(l,t)=0\,,\quad 0<t<T\,, \tag{14}$$

$$a(0)\frac{\partial}{\partial x}\varphi\Big|_{x=0}=2\big[S(0,t;p)-f(t)\big],\quad 0<t<T\,, \tag{15}$$

соотношения для I_2, примет вид:

$$I_2=\int_0^T\left[-\delta p a(l)\frac{\partial}{\partial x}\varphi\Big|_{x=l}+2\delta S(0,t)\big[S(0,t;p)-f(t)\big]\right]dt+\int_0^T\int_0^l \delta S\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dxdt\,.$$

В результате соотношение (12) примет вид:

$$-\int_0^l\int_0^T \delta S\frac{\partial\varphi}{\partial x}dt\,dx=\int_0^T\int_0^l \delta S\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dxdt+$$

$$+2\int_0^T \delta S(0,t)\big[S(0,t;p)-f(t)\big]dt-\int_0^T \delta p a(l)\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi\Big|_{x=l}\right)dt\,.$$

Полагая, что имеет место:

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right),\quad 0<t<T\,,\quad 0<x<l\,, \tag{16}$$

получим, окончательно:

$$2\int_0^T \delta S(0,t)\big[S(0,t;p)-f(t)\big]dt=\int_0^T a(l)\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi\Big|_{x=l}\right)\delta p\,dt\,.$$

Т.е. градиент функционала имеет вид:

$$\nabla J(p)=a(l)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,t)\Big|_{x=l}\,. \tag{17}$$

Алгоритм решения оптимизационной задачи выглядит так:

1^0. Зададим начальное приближение $p^{(0)}(t)$, и решим прямую задачу (1)-(3), получим $S^0\left(x,t;p^{(0)}\right)$.

2^0. Вычислим краевое условие (15) и решим сопряженную задачу (13), (14)-(16), получим $\varphi^0\left(x,t;p^{(0)}\right)$.

3^0. Вычислим градиент функционала по формуле (17), получим $\nabla J(p^0)(t)$.

4^0. Очередное приближение $p^{(n+1)}(t)$, вычислим по формуле (7).

5^0. Проверяем значение функционала (6), если он не достиг минимума, то $p^{(0)}(t)=p^{(n+1)}(t)$ и возврат к пункту 1, если да то к пункту 6.

6^0. Принимаем за приближенное решение обратной задачи $p^{(n)}(t)$.

Оценка условной устойчивости решения обратной задачи

Введем класс корректности обратной задачи. Будем считать, что $q(t)\in\sum\left(l,T,M,q_*\right)$, если:

1) $q(t)\in C^1(0,T)$;

2) $\|q\|_C \le M$;

3) $0 \le q_* \le q(t)$, $t \in (0,T)$.

Теорема: На малом интервале времени T_0 существует единственное решение обратной задачи (1)-(5) при выполнении условия:

$$\tau < \frac{l}{2b^2}\left(\frac{l}{2}+\delta\right).$$

Доказательство:

1-шаг. Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_* \frac{\partial S}{\partial x}\right),\ -\delta < x < l+\delta,\ 0 \le t \le T, \tag{18}$$

$$\begin{cases} \lambda_* \dfrac{\partial S}{\partial x}\Big|_{x_i=+0} = \lambda_* \dfrac{\partial S}{\partial x}\Big|_{x_i=-0} \\ S\big|_{x_i=+0} = S\big|_{x_i=-0}, \quad i=1,2; \quad x_1=0,\ x_2=l \end{cases} \tag{19}$$

$$Q_1 = -\lambda_* \frac{\partial S}{\partial x}\Big|_{x=-\delta}, \qquad Q_2 = -\lambda_* \frac{\partial S}{\partial x}\Big|_{x=l+\delta},$$

$S(x,0) = S_0$.

Дополнительная информация:

$S(0,t) = S^1(t)$, $S(l,\ t) = S^2(t)$.

Здесь: δ - водонасыщенный тонкий слой, в котором $S(0,t) = S^1(t)$, всюду по толщине слоя δ, аналогично $S(l,t) = S^2(t)$.

Проинтегрируем уравнение (18) в пределах $0 < x < -\delta$, $0 < x < l$, $l < x < l+\delta$, и учитывая условие сопряжения (19), получим:

$$\delta \frac{\partial}{\partial t} S^1(t) + l \frac{\partial}{\partial t} S^*(t) + \delta \frac{\partial}{\partial t} S^2(t) = -Q_1 + Q_2,$$

где $S^*(t) = 0.5\left(S^1(t) + S^2(t)\right)$.

$$2\delta \frac{d}{dt} S^*(t) + l \frac{d}{dt} S^*(t) = Q_2 - Q_1.$$

$$\frac{d}{dt} S^*(t) = f(t, S^*), \quad t, t_0 \in [\tau_1, \tau_2] \tag{20}$$

$$S^*(t_0) = S_0, \tag{21}$$

$$f(t, S^*) = \frac{Q_2 - Q_1}{2\delta + l}.$$

2-шаг. Используем следующее утверждение:

Лемма: При выполнении условия Липшица относительно S^*, справедливо $\left|f(t, S^*_{(1)}) - f(t, S^*_{(2)})\right| \le K\left|S^*_{(1)} - S^*_{(2)}\right|$ для любых $S^*_{(1)}$, $S^*_{(2)}$ существует единственное решение Коши (20)- (21).

Из условия Липшица следует, что

$$\left|f(t, S^*_{(1)}) - f(t, S^*_{(2)})\right| \le K\left|S^*_{(1)} - S^*_{(2)}\right|,$$

то для любых функций $S^*, z \in C[\tau_1, \tau_2]$ справедливо неравенство

$$\rho\left(g(S^*), g(z)\right) \le \max_{\tau_1 \le t \le \tau_2} \left| \int_{t_0}^{t} K\, \rho(S^*, z)\, d\xi \right| = K(\tau_2 - \tau_1)\rho(S^*, z),$$

где $\rho(S^*, z) = \max_{\tau_1 \le t \le \tau_2} \left| S^*(t) - z(t) \right|$.

Отображение $g\left(S^*\right)$ будет сжимающим, если

$$K(\tau_1 - \tau_2) < 1. \tag{22}$$

Константа K, имеет вид:

$$K = \frac{b^2}{\frac{l}{2}\left(\frac{l}{2} + \delta\right)}, \quad b = f'\left(t_0, S_0^*\right). \tag{23}$$

Подставляя (23) в условие (22), имеем

$$\tau < \frac{l}{2b^2}\left(\frac{l}{2} + \delta\right) \tag{24}$$

Таким образом, при выполнении (24) существует единственное решение обратной задачи (1)-(5).

1. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач, М.: Наука, 1981. – 400 с.
2. Кабанихин С.И., Искаков К.Т. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач, Изд-во НГУ. Новосибирск. 2001. – 316 с.

УДК 519.86

Т.Т. Оспанова, Д.У. Ашигалиев, Е.Н. Амиргалиев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ НА ОСНОВЕ ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНОЙ СХЕМЫ

(*г.Караганда, Карагандинский экономический университет Казпотребсоюза, г.Алматы, Институт проблем информатики и управления МОН РК*)

Жұмыста үш өлшемді есеп айнымалыларын ажырату әдісі қолданылған. Бір өлшемді есеп тізбегіне ажырату әдісі дәлелденген. Айырымдық теңдеулер есептеу түріне келтірілген. Үш өлшемді есепті шешудің толық алгоритмі келтірілген. Есептеу нәтижелері график түрінде көрсетілген.

In work the method of division of variables of a three-dimensional problem is used. The method of division into a chain of one-dimensional problems is proved. The raznostnye equations are led счетному to a kind. The detailed algorithm of the decision of a three-dimensional problem is resulted. Results of calculations are shown in the form of schedules.

Постановка задачи. Рассмотрим трехмерное гиперболическое уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^{3} L_\alpha U + f(x,t),\ L_\alpha U = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right),\ k_\alpha(x,t) \ge c_1 > 0, c_1 = const, \tag{1}$$

где $x=(x_1,x_2,x_3)$- точка 3-мерного пространства с координатами x_1,x_2,x_3. Пусть G – параллелепипед с границей Γ, $\overline{G}=G+\Gamma$,

$$\overline{Q}_T=\overline{G}\times[0\le t\le T],Q_T=G\times(0<t\le T].$$

Требуется найти непрерывное в цилиндре $\overline{Q}_T$ решение уравнения (1), удовлетворяющее краевому условию

$$U=\mu(x,t) \text{ при } x\in\Gamma,0\le t\le T, \tag{2}$$

и начальным условиям

$$U(x,0)=U_0(x),\ \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\overline{U}_0(x) \text{ при } x\in\overline{G}. \tag{3}$$

Разностные уравнения. Построим равномерную сетку $\omega_{h\tau}$:

$$\omega_h=\left\{\begin{array}{l} x_\alpha=i_\alpha\cdot h_\alpha, i_\alpha=\overline{0,N_\alpha}, l_1=l_2=50м, h_1=h_2=5,\ l_3=1000м, h_3=50, N_\alpha=\dfrac{l_\alpha}{h_\alpha}, \alpha=1,2,3 \\ t(j)=j\cdot\tau, j=\overline{0,m}, mk=1мс, \tau=0.01, m=\dfrac{mk}{\tau} \end{array}\right\}$$

где l_α-длины сторон параллелепипеда, h_α - шаги равномерной сетки, а N_α - количество шагов соответственно и τ - шаг по времени. f_α - произвольные функции такие, что $\sum_{\alpha=1}^{3}f_\alpha=f$. Формально заменим трехмерное уравнение цепочкой одномерных уравнений волны:

$$\frac{1}{3}\frac{\partial^2U}{\partial t^2}=L_\alpha U+f_\alpha,\ \alpha=1,2,3\ ,x\in G \tag{4}$$

Для аппроксимации производной $\frac{\partial^2U_\alpha}{\partial t^2}$ с шагом $\frac{\tau}{3}$ используются выражения:

$$\begin{aligned} U_{\bar{t}_1\bar{t}_1}&=\frac{U^{j+\frac{1}{3}}-U^j-U^{j-\frac{1}{3}}+U^{j-\frac{2}{3}}}{\tau^2}\approx\frac{2}{9}\frac{\partial^2U}{\partial t^2}\\ U_{\bar{t}_2\bar{t}_2}&=\frac{U^{j+\frac{2}{3}}-U^{j+\frac{1}{3}}-U^j+U^{j-\frac{1}{3}}}{\tau^2}\approx\frac{2}{9}\frac{\partial^2U}{\partial t^2}\\ U_{\bar{t}_3\bar{t}_3}&=\frac{U^{j+1}-U^{j+\frac{2}{3}}-U^{j+\frac{1}{3}}+U^j}{\tau^2}\approx\frac{2}{9}\frac{\partial^2U}{\partial t^2}\end{aligned} \tag{5}$$

Для аппроксимации $L_\alpha U+f_\alpha$ на пространственной сетке ω_h воспользуемся однородным разностным оператором второго порядка аппроксимации $\Lambda_\alpha U+\varphi_\alpha$. Коэффициент оператора Λ_α и правая часть φ_α берутся в момент

$$t'_\alpha=0.5\cdot\left(t_{j+\frac{\alpha}{3}}+t_{j-1+\frac{\alpha}{3}}\right)=t_{j+\frac{\alpha}{3}-\frac{1}{2}}=t_j+\left(\frac{\alpha}{3}-0.5\right)\cdot\tau,$$

так что $\Lambda_\alpha=\Lambda_\alpha(t'_\alpha),\ \varphi_\alpha=\varphi_\alpha(x,t'_\alpha)$.

Напишем теперь ЛОС для 3-мерного гиперболического уравнения:

$$y_{\bar{t}_\alpha\bar{t}_\alpha}=\frac{1}{3}\Lambda_\alpha\left(y_{(\alpha)}+\tilde{y}_{(\alpha)}\right)+\frac{2}{3}\varphi_\alpha,\alpha=1,2,3 \tag{6}$$

$y_{\bar{t}_\alpha\bar{t}_\alpha}$ задается формулой (5). В результате мы получили четырехслойную схему.

Уравнение (6) можно записать в виде:

$$\left(E-\tau^2/3\Lambda_\alpha\right)\cdot\left(y_{(\alpha)}+\widetilde{y}_{(\alpha)}\right)=y_{(\alpha-1)}+y_{(\alpha-2)}+2\tau^2/3\varphi_\alpha,\alpha=1,2,3 \tag{7}$$

Определение $y_{(\alpha)}$ сводится к решению трехточечного уравнения $\left(E-\tau^2/3\Lambda_\alpha\right)\cdot y_{(\alpha)}=F_\alpha$ вдоль отрезков, параллельных оси Ox_α, что можно сделать методом прогонки, пользуясь краевым условием:

$$y_{(\alpha)}=\mu\left(x,t_{j+\frac{\alpha}{3}}\right) \text{ при } x\in\Gamma \tag{8}$$

Первое из начальных условий аппроксимируется точно:

$$y(x,0)=U_0(x) \tag{9}$$

Для вычисления промежуточных значений $y^{\frac{1}{3}}=y\left(x,\tau/3\right), y^{\frac{2}{3}}=y\left(x,2\tau/3\right)$ применим следующие уравнения:

$$\left(E-\frac{\tau^2}{3}\Lambda_1\right)\cdot y^{\frac{1}{3}}=F_1,\left(E-\frac{\tau^2}{3}\Lambda_2\right)\cdot\left(y^{\frac{2}{3}}+U_0\right)=2\cdot y^{\frac{1}{3}}+F_2,$$
$$F_1=U_0+\frac{\tau}{3}\overline{U}_0+\tau^2\Lambda_1U_0+\tau^2\left(\frac{2}{3}f_1-\frac{1}{6}\left(\Lambda U+f\right)\right)_{t=0},F_2=\tau^2\left(\frac{2}{3}f_2-\frac{1}{9}\left(\Lambda U+f\right)\right)_{t=0} \tag{10}$$

Остановимся более подробно на (6):

$$\frac{y^{j+\frac{1}{3}}-y^j-y^{j-\frac{1}{3}}+y^{j-\frac{2}{3}}}{\tau^2}=\frac{1}{3}\Lambda_1\left(y^{j+\frac{1}{3}}+y^{j-\frac{2}{3}}\right)+\frac{2}{3}f_1^{j-\frac{1}{6}}$$
$$\frac{y^{j+\frac{2}{3}}-y^{j+\frac{1}{3}}-y^j+y^{j-\frac{1}{3}}}{\tau^2}=\frac{1}{3}\Lambda_2\left(y^{j+\frac{2}{3}}+y^{j-\frac{1}{3}}\right)+\frac{2}{3}f_2^{j+\frac{1}{6}} \quad , \ j=\overline{1,m-1} \tag{11}$$
$$\frac{y^{j+1}-y^{j+\frac{2}{3}}-y^{j+\frac{1}{3}}+y^j}{\tau^2}=\frac{1}{3}\Lambda_3\left(y^{j+1}+y^j\right)+\frac{2}{3}f_3^{j+\frac{1}{2}}$$

Краевые условия: $y^{j+\frac{\alpha}{3}}\Big|_{x_\alpha=0}=\mu\left(x,t_{j+\frac{\alpha}{3}}\right)\Big|_{x_\alpha=0}, y^{j+\frac{\alpha}{3}}\Big|_{x_\alpha=l_\alpha}=\mu\left(x,t_{j+\frac{\alpha}{3}}\right)\Big|_{x_\alpha=l_\alpha}, \ \alpha=1,2,3$ (12)

Начальные условия:

$$y^0=U_0(x),\ \ y^{\frac{1}{3}}-\frac{\tau^2}{3}\left(\frac{\left(k_1\right)^{\frac{1}{3}}_{i_1+1}\cdot y^{\frac{1}{3}}_{i_1+1}-\left(\left(k_1\right)^{\frac{1}{3}}_{i_1+1}+\left(k_1\right)^{\frac{1}{3}}_{i_1}\right)\cdot y^{\frac{1}{3}}_{i_1}+\left(k_1\right)^{\frac{1}{3}}_{i_1}\cdot y^{\frac{1}{3}}_{i_1-1}}{h_1^2}\right)=F_1,$$
$$y^{\frac{2}{3}}-\frac{\tau^2}{3}\left(\frac{\left(k_2\right)^{\frac{2}{3}}_{i_2+1}\cdot y^{\frac{2}{3}}_{i_2+1}-\left(\left(k_2\right)^{\frac{2}{3}}_{i_2+1}+\left(k_2\right)^{\frac{2}{3}}_{i_2}\right)\cdot y^{\frac{2}{3}}_{i_2}+\left(k_2\right)^{\frac{2}{3}}_{i_2}\cdot y^{\frac{2}{3}}_{i_2-1}}{h_2^2}\right)=2y^{\frac{1}{3}}+F_2,, \tag{13}$$

где

$$F_1 = U^0 + \frac{\tau}{3}\overline{U}^0 + \tau^2\left(\frac{(k_1)^0_{i_1+1}\cdot y^0_{i_1+1} - \left((k_1)^0_{i_1+1} + (k_1)^0_{i_1}\right)\cdot y^0_{i_1} + (k_1)^0_{i_1}\cdot y^0_{i_1-1}}{h_1^2}\right) + \frac{2\tau^2}{3} f_1^0 -$$

$$-\frac{\tau^2}{6}\left(\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{(k_\alpha)^0_{i_\alpha+1}\cdot y^0_{i_\alpha+1} - \left((k_\alpha)^0_{i_\alpha+1} + (k_\alpha)^0_{i_\alpha}\right)\cdot y^0_{i_\alpha} + (k_\alpha)^0_{i_\alpha}\cdot y^0_{i_\alpha-1}}{h_\alpha^2}\right) + f^0\right), \tag{14}$$

$$F_2 = \frac{2\tau^2}{3} f_2^0 - \frac{\tau^2}{9}\left(\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{(k_\alpha)^0_{i_\alpha+1}\cdot y^0_{i_\alpha+1} - \left((k_\alpha)^0_{i_\alpha+1} + (k_\alpha)^0_{i_\alpha}\right)\cdot y^0_{i_\alpha} + (k_\alpha)^0_{i_\alpha}\cdot y^0_{i_\alpha-1}}{h_\alpha^2}\right) + f^0\right),$$

$i_1 = \overline{1, n_1 - 1}, i_2 = \overline{1, n_2 - 1}, i_3 = \overline{1, n_3 - 1}$

Для приведения уравнений (11)-(13) к счетному виду вводим формально обозначения:

$y^{j+\frac{\alpha}{3}}$ как $y_1^{j+1} = y\left(x, t_j + \alpha\cdot\tau/3\right)$, $k^{j+\frac{\alpha}{3}}$ как $k_1^{j+1} = k\left(x, t_j + \alpha\cdot\tau/3\right)$, где $\alpha = 1,2,3$

$f_1^j = f\left(x, t_j - \tau/6\right)$, $f_2^j = f\left(x, t_j + \tau/6\right)$, $f_3^j = f\left(x, t_j + \tau/2\right)$.

Тогда уравнения (11)-(13) примет вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{y_1^{j+1} - y_3^j - y_2^j + y_1^j}{\tau^2} = \frac{1}{3}\Lambda_1\left(y_1^{j+1} + y_1^j\right) + \frac{2}{3} f_1^j \\
&\frac{y_2^{j+1} - y_1^{j+1} - y_3^j + y_2^j}{\tau^2} = \frac{1}{3}\Lambda_2\left(y_2^{j+1} + y_2^j\right) + \frac{2}{3} f_2^j \quad , \quad j = \overline{0, m} - 1 \\
&\frac{y_3^{j+1} - y_2^{j+1} - y_1^{j+1} + y_3^j}{\tau^2} = \frac{1}{3}\Lambda_3\left(y_3^{j+1} + y_3^j\right) + \frac{2}{3} f_3^j
\end{aligned} \tag{15}$$

Краевые условия:

$$y_\alpha^{j+1}\Big|_{x_\alpha=0} = \mu_{\alpha 1}\left(x, t_j + \alpha\cdot\tau/3\right)\Big|_{x_1=0}, y_\alpha^{j+1}\Big|_{x_\alpha=l_\alpha} = \mu_{\alpha 2}\left(x, t_j + \alpha\cdot\tau/3\right)\Big|_{x_\alpha=l_\alpha}, \alpha = 1,2,3 \tag{16}$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned}
&(y_3)^0 = U_0(x), (y_1)^0 - \frac{\tau^2}{3}\left(\frac{(k_1)^0_{i_1+1}\cdot(y_1)^0_{i_1+1} - \left((k_1)^0_{i_1+1} + (k_1)^0_{i_1}\right)\cdot(y_1)^0_{i_1} + (k_1)^0_{i_1}\cdot(y_1)^0_{i_1-1}}{h_1^2}\right) = F_1 \\
&(y_2)^0 - \frac{\tau^2}{3}\left(\frac{(k_2)^0_{i_2+1}\cdot(y_2)^0_{i_2+1} - \left((k_2)^0_{i_2+1} + (k_2)^0_{i_2}\right)\cdot(y_2)^0_{i_2} + (k_2)^0_{i_2}\cdot(y_2)^0_{i_2-1}}{h_2^2}\right) = 2(y_1)^0 + F_2
\end{aligned} \tag{17}$$

где F_1, F_2 уже известны по формулам (14).

Численные расчеты. Для получения численного расчета по предложенному алгоритму сначала по заданной функции $U(x,t)$ и по заданными коэффициентами проводимости $k_\alpha(x,t)$, где $\alpha = 1,2,3$ находим $f(x,t)$, $\overline{U}(x,t)$.

Первое начальное условие: $(y_3)^0 = U_0(x)$. Для вычисления промежуточных $(y_1)^0, (y_2)^0$ используем метод обратной прогонки. Перепишем уравнение для $(y_1)^0$ в виде:

$$A_{i_1}\cdot(y_1)^0_{i_1-1} - C_{i_1}\cdot(y_1)^0_{i_1} + A_{i_1+1}\cdot(y_1)^0_{i_1+1} - = -F_{i_1}, i_1 = \overline{1, n_1 - 1}, i_2 = \overline{1, n_2 - 1}, i_3 = \overline{1, n_3 - 1} \tag{18}$$

где $A_{i_1} = \frac{\tau^2}{3h_1^2}(k_1)^0_{i_1}, C_{i_1} = 1 + \left(A_{i_1+1} + A_{i_1}\right), F_{i_1} = F_1$

Граничные условия в общем виде:

$$(y_1)^0_0 = \chi_1\cdot(y_1)^0_1 + \mu^0_{11}, (y_1)^0_{n_1} = \chi_2\cdot(y_1)^0_{n_1-1} + \mu^0_{12}, \tag{19}$$

где $\chi_1 = 0, \chi_2 = 0$ - граничные условия 1-го рода.

Методом прогонки решаем задачу (18) во всех узлах сетки ω_h:

$$\alpha_{i_1+1} = \frac{A_{i_1+1}}{C_{i_1} - A_{i_1} \cdot \alpha_{i_1}}, \alpha_1 = \chi_1,\ \beta_{i_1+1} = \frac{A_{i_1+1} \cdot \beta_{i_1} + F_{i_1}}{C_{i_1} - A_{i_1} \cdot \alpha_{i_1}}, \beta_1 = \mu_{11}^0, (y_1)_{n_1}^0 = \frac{\mu_{12}^0 + \chi_2 \cdot \beta_{n_1}}{1 - \chi_2 \cdot \alpha_{n_1}}, \tag{20}$$

$$(y_1)_{i_1}^0 = \alpha_{i_1+1} \cdot (y_1)_{i_1+1}^0 + \beta_{i_1+1}, i_1 = \overline{n_1 - 1, 0}, i_2 = \overline{1, n_2 - 1}, i_3 = \overline{1, n_3 - 1}$$

Перепишем третье уравнение (17) в виде:

$$\left(1 + \frac{\tau^2}{3h_2^2}\left((k_2)_{i_2+1}^0 + (k_2)_{i_2}^0\right)\right) \cdot (y_2)_{i_2}^0 - \frac{\tau^2}{3h_2^2}(k_2)_{i_2+1}^0 \cdot (y_2)_{i_{12}+1}^0 - \frac{\tau^2}{3h_2^2}(k_2)_{i_2}^0 \cdot (y_2)_{i_2-1}^0 = F_2 \tag{21}$$

Методом прогонки решаем задачу (21). Первую из уравнений (15) записываем в виде:

$$\left(1 + \frac{\tau^2}{3h_1^2}\left((k_1)_{i_1+1}^{j+1} + (k_1)_{i_1}^{j+1}\right)\right) \cdot (y_1)_{i_1}^{j+1} - \frac{\tau^2}{3h_1^2}(k_1)_{i_1+1}^{j+1} \cdot (y_1)_{i_1+1}^{j+1} - \frac{\tau^2}{3h_1^2}(k_1)_{i_1}^{j+1} \cdot (y_1)_{i_1-1}^{j+1} = \varphi_1^j \tag{22}$$

$$\varphi_1^j = (y_3)^j - (y_2)^j - (y_1)^j + \frac{2\tau^2}{3} f_1^j +$$

$$\frac{\tau^2}{3}\left(\frac{(k_1)_{i_1+1}^j \cdot (y_1)_{i_1+1}^j - \left((k_1)_{i_1+1}^j + (k_1)_{i_1}^j\right) \cdot (y_1)_{i_1}^j + (k_1)_{i_1}^j \cdot (y_1)_{i_1-1}^j}{h_1^2}\right),$$

$$i_1 = \overline{1, n_1 - 1}, i_2 = \overline{0, n_2}, i_3 = \overline{0, n_3},\ \ f_1^0 = f(x, t_0),\ f_1^j = f(x, t_j - \tau/6), j = \overline{1, m}$$

Методом прогонки решаем задачу (22). Вторую из уравнений (15) записываем в виде:

$$\left(1 + \frac{\tau^2}{3h_2^2}\left((k_2)_{i_2+1}^{j+1} + (k_2)_{i_2}^{j+1}\right)\right) \cdot (y_2)_{i_2}^{j+1} - \frac{\tau^2}{3h_2^2}(k_2)_{i_2+1}^{j+1} \cdot (y_2)_{i_{12}+1}^{j+1} - \frac{\tau^2}{3h_2^2}(k_2)_{i_2}^{j+1} \cdot (y_2)_{i_2-1}^{j+1} = \varphi_2^j,$$

$$\varphi_2^j = (y_1)^{j+1} + (y_3)^j - (y_2)^j + \frac{2\tau^2}{3} f_2^j +$$

$$+ \frac{\tau^2}{3}\left(\frac{(k_2)_{i_2+1}^j \cdot (y_2)_{i_2+1}^j - \left((k_2)_{i_2+1}^j + (k_2)_{i_2}^j\right) \cdot (y_2)_{i_2}^j + (k_2)_{i_2}^j \cdot (y_2)_{i_2-1}^j}{h_2^2}\right) \tag{23}$$

где $j = \overline{0, m} - 1$, $i_2 = \overline{1, n_2 - 1}, i_1 = \overline{0, n_1}, i_3 = \overline{0, n_3}$, $f_2^j = f(x, t_j + \tau/6), j = \overline{0, m-1}$

$$\left(1 + \frac{\tau^2}{3h_1^2}\left((k_1)_{i_1+1}^{j+1} + (k_1)_{i_1}^{j+1}\right)\right) \cdot (y_1)_{i_1}^{j+1} - \frac{\tau^2}{3h_1^2}(k_1)_{i_1+1}^{j+1} \cdot (y_1)_{i_1+1}^{j+1} - \frac{\tau^2}{3h_1^2}(k_1)_{i_1}^{j+1} \cdot (y_1)_{i_1-1}^{j+1} = \varphi_1^j$$

Методом прогонки решаем (23). Третью из уравнений (15) записываем в виде:

$$\left(1 + \frac{\tau^2}{3h_3^2}\left((k_3)_{i_3+1}^{j+1} + (k_3)_{i_3}^{j+1}\right)\right) \cdot (y_3)_{i_3}^{j+1} - \frac{\tau^2}{3h_3^2}(k_3)_{i_3+1}^{j+1} \cdot (y_3)_{i_{33}+1}^{j+1} - \frac{\tau^2}{3h_3^2}(k_3)_{i_3}^{j+1} \cdot (y_3)_{i_3-1}^{j+1} = \varphi_3^j$$

$$\varphi_3^j = (y_2)^{j+1} + (y_1)^{j+1} - (y_3)^j + \frac{2\tau^2}{3} f_3^j + \tag{24}$$

$$+ \frac{\tau^2}{3}\left(\frac{(k_3)_{i_3+1}^j \cdot (y_3)_{i_3+1}^j - \left((k_3)_{i_3+1}^j + (k_3)_{i_3}^j\right) \cdot (y_3)_{i_3}^j + (k_3)_{i_3}^j \cdot (y_3)_{i_3-1}^j}{h_3^2}\right)$$

где $j = \overline{0, m} - 1$, $i_3 = \overline{1, n_3 - 1}, i_1 = \overline{0, n_1}, i_2 = \overline{0, n_2}$, $f_3^j = f(x, t_j + \tau/2), j = \overline{0, m-1}$

Методом прогонки решаем задачу (24) в ω_h. $(y_3)_{i_3}^j$ - это и есть решение уравнений (1).

Результаты численных расчетов. Для тестирования предложенного алгоритма численно решена задача о распространении электрического (магнитного) поля в

прямоугольном параллелепипеде. Длина полагалось 50 м, ширина 50 м, глубина 1000 м. В расчетной области строилась сетка с шагами равными по длине и ширине 5 м, по глубине 20 м. Шаг по времени 0,01 мс. Сначала был проведен расчет при заданной функции $U(x,y,z,t) = \cos(x) \cdot \cos(y) \cdot \cos(z) \cdot t^2$ и коэффициентов проводимости $k_1(x,y,z,t) = 1, k_2(x,y,z,t) = 1, k_3(x,y,z,t) = 43 \cdot t + 357$. В результате за время 5 мс и на глубине 725 м в сечении получили распространение волны как показано на рисунке 1.

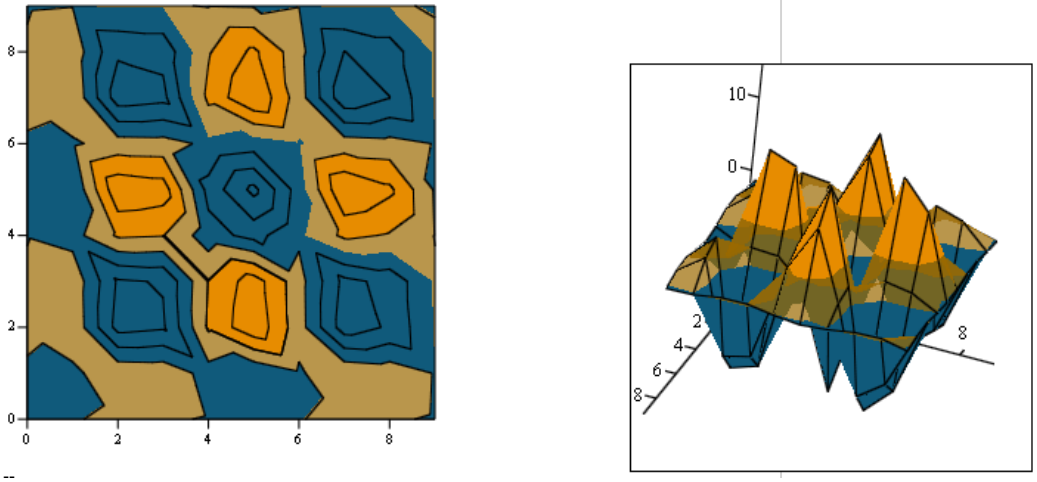


рис. 1. распространение напряжения магнитного поля (полученные с помощью ЛОС), время 0,9 мс, а) на сечении в глубине 725 м, б) то же на 3-мерном графике

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. –М.: Наука, 1998. - С. 505-509.

УДК 373.5.0911.26:004.382.7(574)

Л.Б. Рахимжанова, О.И. Курбанова*, Д.Т. Турдиева*

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ ПО ЛИНИИ ФОРМАЛИЗАЦИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ В КУРСЕ ИНФОРМАТИКИ

*(г. Алматы, КазНПУ имени Абая, *- магистрант))*

Бұл мақалада біз информатика курсындағы формалдау және модельдеу линиясы бойынша оқушылардың білімдерін бақылауын қарастырамыз. Қазіргі кезде бұл бөлім бойынша нәтижелік, тиімділік үйренудің мәселесі өткір тұрады. Білімді бақылау формаларының дәстүрлі және дәстүрлі емес түрлері қаралады. Білімді бақылаудың дәстүрлі әдістеріне: ауызша сұрау, диктант, тест, жаттығу және лабораториялық жұмыс жатады. Бұл мақалда қаралатын бақылаудың дәстүрлі емес әдісі – кроссворд.

In given article we will be control of knowledge of pupils on a line formalization and modeling in a computer science course is considered. The problem of productivity, learning efficiency on this section costs now sharply. Traditional and no conventional kinds of forms of control of knowledge are considered. Traditional ways of control of knowledge concern: oral poll, a dictation, the test, practical and laboratory works. And the no conventional way of control which is considered in article is a crossword puzzle.

Проверка знаний, умений и навыков учащихся является важным элементом процесса обучения и воспитания, ею определяется результативность, эффективность обучения.

Контроль знаний учащихся открывает большие возможности для совершенствования процесса обучения, поскольку проверка как действенное средство борьбы за прочные и осознанные знания учащихся позволяет лучше изучить учеников, их индивидуальные особенности.

Наиболее точно и качественно оценивать знания учащихся позволяет разнообразие видов и форм контроля.

В данной статье мы будем рассматривать следующие виды форм контроля знаний:

Традиционные способы	Безмашинные способы контроля	Смешанные способы	Машинные способы контроля
	-устный опрос -устная самостоятельная работа -выступление с сообщением - устный зачет - блиц-опрос	-диктант -самостоятельная работа -контрольная работа -тест -экзамен -олимпиада	-практическая работа -лабораторная работа
Нетрадиционные способы		-исследовательская работа -творческая работа -реферат -сочинение -соревнования (конкурсы, турниры, КВН) - конференция - аукцион - кроссворд	

Тест

Традиционные формы контроля недостаточно оперативны, и для их осуществления требуется значительное время, поэтому возникает необходимость в новых видах проверки знаний. Распространение контролирующих устройств способствовало тому, что учителя все чаще и чаще при проверке знаний стали обращаться к заданиям с выборочными ответами, к тестам.

Тестирование является стандартизированной формой контроля в том понимании, что как процедура проведения теста, так и оценка знаний единообразна (стандартны) для всех учащихся. [1]

Удачно составленный тест по моделированию и формализации имеет ряд достоинств, а именно:

1. Оперативно выявляет знания, умения и навыки учащихся по моделированию и формализации, а также понимание им закономерностей, лежащих в основе изучаемых фактов, что особенно важно при изучении данной содержательной линии. Это обеспечивается тем, что задачи и вопросы подбираются в результате анализа

материала и, следовательно, учитывают трудности усвоения и характер возможных ошибок. Мастерство учителя заключается в подборе таких задач, при котором школьники могли бы определить правильно цели моделирования. Что касается проблемности, эвристичности и нестандартности задач, то каждая задача моделирования является таковой, то есть эти характеристики, отражающие развивающий принцип обучения при решении таких задач достигается автоматически.

2. Позволяет в течение короткого времени получить представление о пробелах в знаниях и помогает организовать работу по предупреждению отставания учащихся.

3. Предоставляет учителю возможность проверять знания, умения и навыки на разных уровнях и осуществлять дифференцированное обучение, например, задание на моделирование простых и сложных объектов.

4. Способствует рациональному использованию времени на уроке, тестирование можно проводить как в начале урока как проверка пройденного материала, так и в конце урока для проверки усвоения материала.

5.Активизирует мышление школьников, при обучении моделированию у учащихся развивается творческое мышление.

6. Дает возможность учителю критически оценить свои методы преподавания. На сегодняшний день методика обучения формализации и моделированию требует совершенствования и по этому в ряде случаев просматривается неэффективное применение методов преподавания по данному разделу.

Однако тест фиксирует только результаты работы, но не ход ее выполнения, возможно угадывание правильного ответа, а также случаи, когда выбор неправильного ответа объясняется невнимательностью ученика, поэтому рациональнее сочетать тестирование с различными формами традиционного контроля.

Тестовые задания удобно использовать и при организации самостоятельной работы учащихся в режиме самоконтроля, при повторении учебного материала.

Педагогический тест – это инструмент, предназначенный для измерения обученности учащегося, состоящий из системы тестовых заданий, стандартизированный процедурой проведения обработки и анализа результатов. Среди видов тестирования достаточно разнообразен и может быть с успехом использован по всем учебным предметам и предметным областям тест на соответствие. При обучении разделу формализация и моделирование существует широкая возможность их использования. Задачи соответствия требуют подбора подходящего ответа.

Задания на установление соответствия особенно полезны для ассоциирования физических, математических и других формул со сферами их практического применения. В процессе обучения формализации и моделированию встречается учебная информация, в которой изучаемые объекты (понятия, величины и т. п.) разбиваются на виды, классы, типы и т. д. Для каждого из этих видов существует множество свойств и характеристик, принципов, правил и норм использования, так что есть возможность составления вопросов на установление соответствия этих терминов их характеристикам. Причем, вопросы на установление соответствия в этом случае будут более рациональны, чем вопросы с выбором правильного ответа из перечня.

В заданиях соответствия (восстановления соответствия) необходимо найти соответствие (или приравнять части, элементы, понятия) – между элементами двух списков (множеств).

Приведем примеры заданий, применяемых при контроле знаний по разделу моделирование и формализация в курсе информатики.

Таблица. **Задания на соответствие**

Система	описание объекта моделирования
Информационная модель	замена реального объекта или процесса его информационной моделью
Системный анализ	Процесс выделения существенных для моделирования свойств объекта, связей между ними с целью их описания
Формализация	объект, состоящий из множества взаимосвязанных частей, и существующий как единое целое.

Письменный контроль

Письменная проверка позволяет за короткое время проверить знания большого числа учащихся одновременно. Используется письменный контроль знаний учащихся в целях диагностики умения применять знания в учебной практике и осуществляется в виде диктантов, контрольных, проверочных и самостоятельных работ, тестов, рефератов**. [2]**

Диктант

Диктант используется как форма опроса для контроля за усвоением проходимого материала, его обобщения и систематизации и выявления готовности учащихся к восприятию нового.

Диктант обычно проводится в самом начале урока, состоит из двух вариантов. Текст вопросов простой, легко воспринимаемый на слух, требующий краткого ответа, несложных вычислений. Пауза между следующими друг за другом вопросами должна быть достаточной для записи ответов учащимися. (1)

Возможны различные варианты диктантов. На уроках информатики при обучении моделированию наиболее используем компьютерный диктант, который позволяет проверить знания и умения одновременно.

Можно использовать при контроле знаний по линии формализации и моделирования следующие диктанты:

1. Упрощенное подобие реального объекта или процесса это …

(модель).

2. Описание объекта моделирования это …

(Информационная модель).

Нетрадиционные виды контроля

За последние годы в методической литературе появляются описания разнообразных методов опроса, которые представляют несомненный интерес. На уроках возможны короткие проверочные работы нетрадиционного вида. В каждой теме выделяются ключевые понятия и термины, которые могут быть положены в основу кроссвордов, головоломок, ребусов, шарад, викторин. Для ряда тем специально разрабатываются кроссворды, содержащие понятия одной определенной темы, есть достаточное количество кроссвордов, включающих в себя основные понятия предмета. Решение кроссвордов - занятие увлекательное и полезное, позволяет тренировать память.

При обучении формализации и моделированию указанные средства можно применять косвенно и явно. Косвенное применение строится на обобщающих

вопросах или заданиях, предлагаемых после ответа на все или большинство предложенных вопросов. В основе явного применения лежит присутствие в вопросах (заданиях) понятий, непосредственно связанных с этой дисциплиной.

Кроссворд

Кроссворды, применяемые для контроля знаний, подразделяются на кроссворды для текущей, тематической или обобщающей проверки. Первые направлены на проверку базовых знаний учащихся по текущему материалу, количество вопросов в них составляет 10-12. Вторые – на проверку базовых и дополнительно полученных знаний по определенной теме, в них рекомендуется использовать не более 15-25 вопросов. Третьи - на общую проверку знаний по большому блоку материала (за четверть, полугодие, год), количество вопросов в них – 15-25.

Этот метод проверки - только дополнительный к известным методам контроля, но не альтернативный им, поскольку не дает возможности проверить глубину понимания изученного материала.

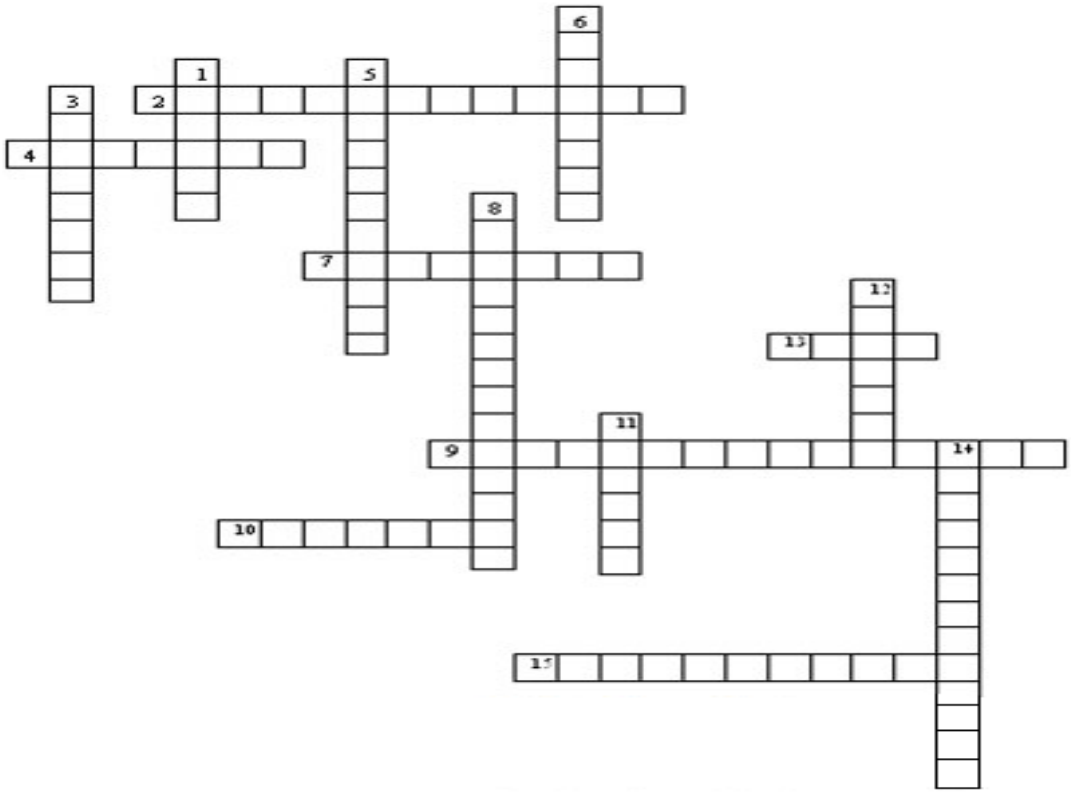


Рисунок 1. Кроссворд: «Моделирование»

По горизонтали:

2. Процесс построения, изучения и применение модели?
4. Совокупность элементов?
7. Понятия моделирование связано с некой категорией ….?
9. Одно из требований, предъявляемое к модели?
10. Способ представления модели наглядно?
13. Язык моделирования?
15. Прием обработки результатов моделирования?

По вертикали:

1. Формализованное представление реального объекта, процесса или явления, выраженное любыми средствами?
3. Модель-это объект - заменитель объекта - ……?

5. Наука об общих законах получения, хранения, передачи и переработки данных?
6. Одно из требований, предъявляемое к модели?
8. Наука, которая была сформирована в XX столетии, для того чтобы: «сократить разрыв во времени между научными открытиями и их приложениями»?
11. Метод … ,изобретенный и названый в честь этого ученого позволяет получить значения СВ в соответствии с заданным законам распределения (метод универсален и применяется для моделирования всех СВ)?
12. Какова фамилия ученого, который изобрел закон, описывающий число событий, происходящих за одинаковые промежутки времени, при условии независимости этих событий?
14. Типичное название модульной структуры?

1. Адаптивное тестирование : учебно-методическое пособие / Н. М. Опарина [и др]. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2007. – 95 с.
2. Аванесов, В. С. Композиция тестовых заданий [Текст] : учеб. кн. для преподавателей вузов, учителей школ, студ. и аспирантов пед. вузов / В. С. Аванесов. – 2-е изд. – М. : Адепт, 1998. – 217 с.

УДК 510.2; 530.3

В.Б. Рыстыгулова, Р.М. Муратханова, К.С. Шадинова, Ж.А. Кутелова, Р. Арекенов

ГОТФРИД ВИЛЬГЕЛЬМ ЛЕЙБНИЦ – ЧТО МЫ ЗНАЕМ О НЕМ?

(*г. Алматы КазНПУ имени Абая*)

Гений — это никогда не
останавливающийся герой

XVII-ғасырдың екінші жартысында, XVIII-ғасырдың басында өмір сүрген, философия, математика және физика ғылмдарының данышпандарының бірі туралы көлемді мағлұмат беріледі. Адамзат үшін Г.В. Лейбниц – жаратылыстану ғылымдарының салаларында оған дейін ешбір тірі жан орындамаған туындылар әкелді. Ол – дифференциальдық және интегралдық есептеу әдісін алғаш ойлап тапқан, кинематика және динамика теориясының негізін қалаушы. Берлин ғылым академиясын құрғызушы және оның тұңғыш президенті. Петербор ғылым академиясының рухани жетекшісі.

Discusses the career of one of the geniuses of philosophy, mathematics and physics the second half of XVII-, the beginning of XVIII-century. Leibniz, GW has done for humanity as much as it was not possible yet to anyone before him in all areas of natural science. He – the inventor of the differential and integral calculus, theory of kinematics and dynamics in the field of physics. He is the founder and first president of the Berlin Academy of Sciences. At the same time he - inspirer of St. Petersburg Academy, and later the Russian Academy of Sciences.

Выдающийся немецкий философ, физик и математик Готфрид Вильгельм фон Лейбниц (нем. Gottfried Wilhelm von Leibniz) родился 21 июня (1 июля) 1646 г. в г. Лейпциг, Германия, в семье известного профессора философии морали (этики) лейпцигского университета Фридриха Лейбница и Катерины Шмюк (нем. Catherina Schmuck) - дочери выдающегося профессора, преподававшего юридические науки. Семейные традиции с обеих сторон предсказывали Лейбницу в будущем философскую и юридическую деятельность. Накануне

Иванова дня, 3 июля, в два часа после обеда в церкви св. Николая проходил обряд крещения. Когда пастор взял ребенка на руки, чтобы облить, трехдневный мальчик, к удивлению всех, внезапно поднял головку, вытянул шейку и принял крещение с открытыми, устремленными ввысь глазами. Видя в этом предзнаменование, отец его, Фридрих Лейбниц, в своих записках предсказал сыну «свершения вещей чудесных». К сожалению, он не дожил до исполнения своего пророчества и умер, когда мальчику не исполнилось и семи лет, но оставил ему богатую библиотеку. Мать Лейбница, которую современники называют умной и практичной женщиной, заботясь об образовании сына, отдала его в школу Николаи, считавшуюся в то время лучшей в Лейпциге. Готфрид целыми днями просиживал в отцовской библиотеке. Без разбора читал он Платона, Аристотеля, Цицерона, Декарта.

Готфриду не было еще четырнадцати лет, когда он изумил своих школьных учителей, проявив талант настоящего поэта, которого в нем никто не подозревал. По тогдашним понятиям истинный поэт мог писать только по-латыни или по-гречески, что он и сделал. Пятнадцатилетним юношей Готфрид Лейбниц стал студентом юридического факультета Лейпцигского Университета. По своей подготовке он значительно превосходил многих студентов старшего возраста. Правда, характер его занятий по-прежнему оставался крайне разносторонним, можно даже сказать беспорядочным. Он читал все без разбора – от богословских трактатов до медицинских. Кроме лекций по юриспруденции, он усердно посещал и многие другие, в особенности по философии и математике. Помните знаменитое пушкинское: *«Мы все учились понемногу чему-нибудь и как-нибудь»?* Так вот, во времена Лейбница учились «помногу», и еще как!

Желая развить свое математическое образование, Готфрид отправляется в Иену, где в это время жил известный математик Вейгель. Кроме математика Вейгеля, Лейбниц слушал здесь также лекции некоторых юристов и историка Бозиуса. Возвратившись в Лейпциг, Готфрид Лейбниц блистательно выдержал экзамен на степень магистра словесности и философии. Готфриду в то время не было и восемнадцати лет. Вскоре после магистерского экзамена его постигло тяжкое горе: он потерял мать. На следующий год, на время вернувшись к математике, он пишет «Рассуждение о комбинаторном искусстве».

Осенью 1666 года Готфрид Лейбниц уехал в Альторф-университетский город маленькой Нюрнбергской республики, где 5 ноября 1666 года он блистательно защитил диссертацию на соискание степени доктора права на тему «О запутанных делах». В 1667 году Готфрид отправляется к архиепископу Майнц, с которым вместе занимается составлением нового свода законов. В течение пяти лет Готфрид Лейбниц занимает видное положение при майнцском дворе. Одновременно этот период в его жизни был временем оживленной литературной деятельности: он написал целый ряд сочинений философского и политического содержания.

В то время самой серьезной опасностью для мира в Европе был король Франции Людовик XIV. И 18 марта 1672 года Готфрид Лейбниц выезжает во Францию с важной дипломатической миссией. Лейбниц представил королю план завоевания Египта, указав, что такое завоевание более приличествует величию христианского монарха, чем война с мелкими и незначительными европейскими странами. План был настолько хорошо продуман, что позже Наполеон, как полагают, ознакомился с ним в архивах перед тем, как отправить экспедицию в Египет. Кроме этого Лейбниц преследовал и чисто научные цели. Он давно уже хотел пополнить свое математическое образование знакомством с французскими и английскими учеными и мечтал о путешествии в Париж и Лондон. В Париже он знакомится с такими известными философами и учеными своего времени, как Н.Мальбранш, А.Арно и Х.Гюйгенс. Знакомство с парижскими математиками в самое короткое время доставило Лейбницу те сведения, без которых

он, при всей своей гениальности, никогда не смог бы достичь в области математики ничего истинно великого. Школа Пьера Ферма, Паскаля и Декарта была необходима будущему изобретателю дифференциального исчисления. В одном из своих писем Лейбниц писал, что после Галилея и Декарта он более всего обязан своим математическим образованием Гюйгенсу. Из бесед с ним, из чтения его сочинений и указанных им трактатов Готфрид Лейбниц увидел все ничтожество своих прежних математических познаний. Тем не менее, даже в этих условиях Лейбниц открыл замечательную теорему, по которой *отношение длины окружности к диаметру может быть выражено очень простым бесконечным рядом числа, названного позже числом* π.

Ознакомление с сочинениями Паскаля навело Готфрида Лейбница на мысль усовершенствовать некоторые теоретические положения и практические открытия французского философа. Арифметический треугольник Паскаля и его арифметическая машина одинаково занимали ум Лейбница. Он истратил много труда и немало денег для усовершенствования арифметической машины. В то время как машина Паскаля совершала непосредственно лишь два простейших действия — сложение и вычитание, модель, придуманная Лейбницем, оказалась пригодною для умножения, деления, возведения в степени и извлечения корня, по крайней мере, квадратного и кубического. Позже она получила название арифмометра. В 1673 году Г. Лейбниц представил модель арифмометра на суд ученых Королевской академии Лондона. Благодаря изобретению новой арифметической машины Лейбниц стал иностранным членом Лондонской, позже и Парижской академий. Именно поэтому его можно считать идейным вдохновителем современной машинной математики. Настоящие занятия математикой начались для Лейбница лишь после посещения Лондона. Лондонское королевское общество могло в то время гордиться своим составом. Такие ученые, как Бойль и Гук в области химии и физики, Рен, Валлис и Ньютон в области математики, могли поспорить с парижской школой, и Лейбниц, несмотря на некоторую подготовку, полученную им в Париже, часто сознавал себя перед ними в положении ученика.

По возвращении в Париж Готфрид Лейбниц разделял свое время между занятиями математикой и работами философского характера. Математическое направление все более одерживало в нем верх над юридическим, точные науки привлекали его теперь больше, чем диалектика римских юристов и схоластиков. В последний год своего пребывания в Париже в 1676 году Лейбниц подготовил основу к открытию нового математического метода, известного под названием «дифференциальное исчисление». Совершенно такой же метод был изобретен около 1665 года Ньютоном, но основные начала, из которых исходили оба изобретателя, были различны, и, сверх того, Лейбниц мог иметь лишь самое смутное представление о методе Ньютоне в то время не опубликованном. Факты с достаточной убедительностью доказывают, что Готфрид Лейбниц хотя и не знал о методе флюксий, но был подведен к открытию письмами Ньютона. С другой стороны, несомненно, что открытие Лейбница по обобщенности, удобству обозначения и подробной разработке метода стало средством анализа значительно более могущественным и популярным Ньютоновского метода флюксий. Даже соотечественники Ньютона, из национального самолюбия долгое время предпочитавшие метод флюксий, постепенно усвоили более удобные обозначения Лейбница. Что касается немцев и французов, они даже слишком мало внимания обратили на способ Ньютона. Новый математический метод Готфрида Лейбница находится в теснейшей связи с его позднейшим учением о монадах — бесконечно малых элементах, из которых он пытался построить Вселенную. Лейбниц в противоположное Паскалю, который видел в жизни всюду зло и страдание, требуя лишь христианской покорности и терпения, не отрицает существования зла, но

пытается доказать, что *при всем том наш мир есть наилучший из всех возможных миров.*

После первых открытий в области дифференциального исчисления, Лейбниц должен был прервать свои научные занятия: он получил приглашение в Ганновер. Приехав в Ганновер, Готфрид Лейбниц занял предложенную ему герцогом Иоганном Фридрихом должность заведующего королевской библиотеки. С этого времени и до самой смерти он находился в Ганновере, выезжая за рубеж только в связи со своими исследованиями по истории династии Брауншвейгов. Он убедил короля Пруссии основать научную академию в Берлине и стал ее первым президентом. В 1700 ему были пожалованы должность императорского советника и титул барона. В Ганновере он все свое свободное время посвятил обработке изобретенного им дифференциального исчисления и в промежутке между 1677 и 1684 годами успел создать целую новую отрасль математики. Значительным событием для его научных занятий явилось основание в Лейпциге первого немецкого научного журнала «Acta Eruditorum» - «Труды ученых», сыгравшего значительную роль в распространении научных знаний в Европе. К работе в журнале он привлекает братьев Бернулли, Лопиталь и др. математиков.

Сам Лейбниц стал одним из главных сотрудников и, можно даже сказать, душою этого издания. В первой книге «Трудов» Лейбниц напечатал свою теорему о выражении отношения окружности к диаметру посредством бесконечного ряда; в другом трактате он впервые ввел в математику так называемые «показательные уравнения»; затем опубликовал упрощенный способ вычисления сложных процентов и пожизненных рент и многое другое. Наконец, в 1684 году Лейбниц напечатал в том же журнале систематическое изложение начал дифференциального исчисления. Все эти трактаты, особенно последний, опубликованный почти тремя годами раньше появления в свет первого издания «Начал» Ньютона, дали науке такой огромный толчок, что в настоящее время трудно даже оценить все значение реформы, произведенной Лейбницем в области математики. То, что смутно представлялось умам лучших французских и английских математиков, исключая Ньютона с его методом флюксий, стало вдруг ясным, отчетливым и общедоступным, чего нельзя сказать о гениальном методе Ньютона.

Особенно плодотворной была научная деятельность Лейбница в области математики. В 1666 он опубликовал свою первую математическую работу "Размышления о комбинаторном искусстве". Лейбниц заложил основы символической логики. Исследовал свойства некоторых кривых (в частности, цепной линии), разложение функции в ряды, ввел понятие определителя и выдвинул некоторые идеи, касающиеся теорий определителей, которые впоследствии развивали А. Вандермонд, О. Коши, К. Гаусс и К. Якоби. Лейбниц до некоторой степени проложил путь таким новым дисциплинам, как политическая экономия и сравнительное языкознание. Но важнейшей его заслугой является то, что он, одновременно с И. Ньютоном, но независимо от него, завершил создание дифференциального и интегрального исчисления. При этом он исходил не из квадратуры кривых, как Ньютон, а из проблемы касательных. В это же время Лейбниц пошел еще дальше в создании нового исчисления - установил зависимость между прямой и обратной задачами о касательных. Через год он пришел к выводу, что «из обратного метода касательных выходит квадратура всех фигур». В октябре 1675 Лейбниц уже пользуется обозначением Sl для суммы бесконечно малых и операцию, противоположную суммированию, обозначает, подписывая букву **d** под переменной, а затем рядом с ней: **dx**. Символ интеграла в современной форме впервые встречается в его работе "О скрытой геометрии" и указывает, что эта операция обратна дифференцированию.

Лейбниц вводит показательную функцию в самом общем виде: $\mathbf{u^v}$. Лейбниц решил проблему касательных с помощью дифференциального исчисления. При этом он изложил правила дифференцирования произведения, степени, неявной функции. Эти результаты он опубликовал только в 1684 в работе "Новый метод максимумов и минимумов", где впервые назвал свой алгоритм дифференциальным исчислением. В этой работе Лейбница излагаются основы дифференциального исчисления, правила дифференцирования выражений. В 1693 Лейбниц опубликовал первые образцы интегрирования дифференциальных уравнений с помощью бесконечных рядов. Используя геометрическое истолкование отношения **dy/dx**, он кратко разъясняет признаки возрастания и убывания, максимума и минимума, выпуклости и вогнутости (следовательно, и достаточные условия экстремума для простейшего случая), а также точки перегиба. Попутно вводится понятие «разности разностей» (кратные дифференциалы), обозначаемые **ddv**. Лейбниц ввел много математических терминов, которые теперь прочно вошли в научную практику: функция, дифференциал, дифференциальное исчисление, дифференциальное уравнение, алгоритм, абсцисса, ордината, координата, а также знаки дифференциала, интеграла, логическую символику и т. д. Причём имя Ньютона в первой части этой книги даже не упоминается, а во второй заслуги Ньютона описаны не вполне ясно. Тогда Ньютон не обратил на это внимания. Его работы по анализу начали издаваться только с 1704 года. Это послужило причиной давно тлеющего, но вспыхнувшего в 1708 г. нелепого спора о приоритете с Ньютоном.

Готфрид Лейбниц сыграл важную роль в истории создания электронно-вычислительных машин: он предложил использовать для целей вычислительной математики бинарную систему счисления с цифрами 0 и 1, на которой основана современная компьютерная техника, писал о возможности машинного моделирования функций человеческого мозга. Ему же принадлежит термин «модель». В физике Готфриду Лейбницу принадлежит первая формулировка закона сохранения энергии («живых сил»). «Живой силой» (кинетической энергией) он назвал установленную им в качестве количественной меры движения единицу-произведение массы тела на квадрат скорости (в противоположность Декарту, который считал мерой движения произведение массы тела на скорость; Лейбниц назвал формулировку Декарта «мертвой силой»). Эти воззрения Лейбница привели к теореме, которая стала основанием всей современной динамики. Она гласит, что приращение живой силы системы равно работе, произведенной этой движущейся системой. Зная, например, массу и скорость падающего тела, мы можем вычислить работу, произведенную им во время падения. Лейбниц сформулировал «принцип наименьшего действия» - один из основополагающих вариационных принципов физики. Лейбницу принадлежит ряд открытий в специальных разделах физики: теории упругости, теории колебаний и др. Собранный материал в области палеонтологии Готфрид Лейбниц обобщил в работе «Протогея» (1693), где высказал мысль об эволюции Земли. С именем Лейбница в науке связано много открытий и гипотез, которые позже получили признание. Если в механике ему принадлежит понятие о "живых силах", то в геологии-мысль, что Земля имеет историю. Он также высказал правильное предположение о происхождении ископаемых остатков животных и растений, отстаивая важную для биологии мысль об эволюции. Он обосновал необходимость регулярно мерить у больных температуру тела. Задолго до Зигмунда Фрейда он привёл доказательства существования подсознания человека.

В 1697 году, во время путешествия Петра I по Европе, русский царь познакомился с Лейбницом. Правда, это была случайная встреча, когда император изучал морское дело в Голландии. В 1711 г во время торжеств, посвящённых свадьбе

наследника престола Алексея Петровича с представительницей правящего ганноверского дома, принцессой Брауншвейгской Софией Христиной, состоялась их вторая встреча в Ганновере. На этот раз встреча имела заметное влияние на императора. В следующем году Лейбниц имел более продолжительные встречи с Петром, и, по его просьбе, сопровождал его в Теплиц и Дрезден. Это свидание было весьма важным и привело в дальнейшем к одобрению Петром создания Академии наук в Петербурге, что *послужило началом развития научных исследований в России по западноевропейскому образцу и впоследствии консультирует его по самым разным вопросам.* От Петра Лейбниц получил титул тайного советника юстиции и пенсию в 2000 гульденов. Лейбниц предложил проект научных исследований в России, связанных с её уникальным географическим положением, таких, как изучение магнитного поля Земли, отыскание пути из Арктики в Тихий океан. Также Лейбниц предложил проект движения за объединение церквей, которое должно было быть создано под эгидой русского императора.

Готфрид Лейбниц оказал многообразное влияние на современную науку и философию. Лейбниц является одним из основателей современной математической логики. Он внес серьезный вклад в важнейший раздел физики — динамику. Он был также пионером в геологии. Но особым успехом пользовались его метафизические теории. В начале 18 века в Германии возникает школа Х. Вольфа, во многом базировавшаяся на философских идеях Лейбница. Вольфовская школа стала одним из столпов европейского Просвещения. Влияние Лейбница испытали и другие крупнейшие мыслители Нового времени: Д. Юм, И. Кант, Э. Гуссерль. Велик интерес к Лейбницу и в современной, прежде всего аналитической, философии. Особое внимание привлекает его различение «истин разума» и «истин факта», а также концепция возможных миров.

Два последних года жизни Готфрид Вильгельм Лейбниц провел в постоянных физических страданиях. Он умер 14 ноября 1716 года. Пренебрежение власть имущих и ненависть церковников к великому мыслителю преследовали его и после смерти. Целый месяц тело философа лежало в церковном подвале без погребения. Лютеранские пасторы, почти открыто называвшие Лейбница "безбожником", ставили под сомнение саму возможность захоронения его на христианском кладбище. Когда в конце концов скромный кортеж направился к могиле, за гробом шли только несколько человек, почти все из них случайные лица, а от двора не присутствовал никто. И один из немногих свидетелей церемоний, понимавший подлинное значение того, что произошло, заметил: *"Этот человек составлял славу Германии, а его похоронили как разбойника".* Основанная Лейбницем Берлинская академия наук, давно уже избравшая другого президента под предлогом, что Лейбниц прекратил научную деятельность, в то время ни словом не помянула своего основателя. Лондонское королевское общество считало неприличным хвалить соперника Ньютона. Только в Парижской академии наук Фонтенелль прочел знаменитую похвальную речь Лейбницу, в которой признал его одним из величайших ученых и философов всех времен. После философа осталось значительное печатное и более обширное рукописное научно-философское наследие. Многие его идеи остались нереализованными. Но то, что он сделал в науке и философии, составляет эпоху в развитии европейской научной мысли.

Лейбниц не совершал ратных подвигов. Он просто жил с превышением обычной нормы человеческих сил и усилий. Судьба большую часть жизни хранила его от физических болезней. Только последние годы его мучила подагра, с которой он боролся, зажимая больные ноги в специально сконструированные тиски. Когда боль отступала, он продолжал свой рабочий день. *Ведь гений — это никогда не останавливающийся герой*. Лейбниц - математик и физик, правовед и историограф,

археолог и лингвист, экономист и политик - ученый нового типа, он был великим изобретателем и организатором научных академий и обществ. Готфрид Вильгельм Лейбниц стал первым гражданским лицом Германии, которому был воздвигнут памятник, и неспроста. В честь Лейбница получили название кратер и самая высокая горная цепь на Луне, университет в Ганновере. В этом же городе в его честь открыта Европейская академия естественных наук (ЕАЕН), объединяющая в своих рядах лучших умов человечества, действительными членами которой становятся наиболее достойные в своей области ученые. Надпись под портретом Готфрида Лейбница в дипломе этой академии гласит: *Он сделал для человечества больше, чем Платон, Аристотель и Архимед вместе взятые*. Одним из первых в Казахстане академиком ЕАЕН стал почетный заведующий кафедрой нашего университета, доктор физико-математических наук, профессор К.М. Мукашев. Кажется, именно для таких, как он написал свой афоризм великий Лейбниц: *Любить - это находить свое собственное счастье в счастье других. Вечное стремление к новым наслаждениям и новым совершенствам - это и есть истинное счастье.*

Работа выполнена под руководством профессора Мукашева К.М. при поддержке гранта ректора КазНПУ им. Абая по теме «*Разработка не имеющего аналогов лабораторного оборудования для средних школ по электронике*».

УДК 537.591.15

Т.Х. Садыков

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТОКОВ НЕЙТРОНОВ НА ВЫСОТЕ ГОР

(*г.Алматы, Физико-технический институт МОН РК*)

НМ – 06 нейтрондық монитормен алынған эксперимент нәтижелері баяндалады. Қондырғы теңіз деңгейінен 1700 м биіктікте орналасқан. Монитор НМ-06 биіктаулы Тянь-Шань бекетінде құрылып жатқан көпдеңгейлі «ATHLET» кешенінің құрама бөлігі болып табылады. Қондырғыда нейтрондық санауыштардың тіркеу табалдырығы анықталып, нейтрондық санауыштардағы сигналдардың уақыттық үлестірілімінің өзгерісі зерттелінді. Бұл сигналдарды бастапқы энергиясы $E>3 \cdot 10^{15}$ эВ болатын кең ауқымды атмосфералық нөсерлер діңгегінің адрондары туғызады.

Experimental results obtained on the neutron monitor NM-06. Installation is located at an altitude of 1700 meters above sea level. It is a part of a multi-level complex «ATHLET». This complex is created around the Tien Shan high-mountain research station. The installation defined detection threshold of the neutron counters and studied the changes of time distributions of signals from the neutron counters. Last generated hadrons barrels of extensive air showers with primary energies above E> 3 × 1015 eV.

1. Введение. В рамках программы совместных исследований «Физика космических лучей высоких и сверхвысоких энергий, процессы в атмосфере и их практические приложения» между научно-исследовательскими институтами и университетами Республики Казахстан и Российской Федерации создается экспериментальный комплекс «ATHLET», (A1maty Three Leve1 Experiment Tecnical), состоящий из трех однотипных установок для исследования широких атмосферных ливней (ШАЛ), которые располагаются на различных высотах - 800, 1700 и 3340 м над

уровнем моря. Общей особенностью всех установок является использование нейтронных мониторов для регистрации адронной компонеты ШАЛ. Комплекс предназначен для исследования энергетического спектра и массового состава первичного космического излучения в области энергий 10^{15}-10^{18} эВ, вариаций интенсивности космических лучей, регистрации вспышек на Солнце и др. Одной из задач, решаемых в настоящее время на комплексе «ATHLET», является изучение на различных высотах эффекта запаздывающих частиц, и определение порога регистрации нейтронов [1].

2. Описание установки «НМ-06». Установка «НМ-06» (1700 м н.у.м, глубина в атмосфере 835 г/см^2, 10 км от Тянь-Шаньской высокогорной научной станции (ТШВНС)) включает в себя стандартный нейтронный монитора IGY [2] и расположенный над ним детектор электронно-фотонной компоненты на ионизационных счетчиках СИ5Г. В дальнейшем установку предполагается оснастить центральной ливневой системой на сцинтилляционных детекторах.

Регистрация данных на новой установке ведется по методике, аналогичной той, что применяется на нейтронном супермониторе ТШВНС. Импульсы нейтронных счетчиков и электронно-фотонных детекторов после формирования поступают на управляемые счетчики, которые для каждого канала позволяют измерить число импульсов в 80-ти последовательных временных интервалах длительностью 60 мкс каждый. Временное разрешение нейтронных каналов монитора составляет 2 мкс, каналов электронно-фотонного детектора - 5-8 мкс. Такое относительно высокое разрешение достигается за счет пропорционального (а не гейгеровского) режима работы как нейтронных счетчиков, так и детекторов электронно-фотонной компоненты.

Начало отсчета времени в каждом событии определяется ливневым триггером, который вырабатывается при одновременном (в интервале 2 мкс) срабатывании любой пары из 12-ти нейтронных счетчиков монитора. Это условие определяет отбор случаев прохождения через монитор стволов ШАЛ достаточно большой мощности. При измерении спектра кратностей в качестве триггерного использовался импульс от любого из нейтронных счетчиков.

Целью настоящего сообщения является обзор полученных результатов относительно спектра кратностей, определение порога регистрации потока нейтронов, а также временных распределений интенсивности нейтронов, наблюдаемых на установке.

3. Спектры кратностей нейтронов *M*

Классификация зарегистрированных в нашем эксперименте событий ведется по суммарному числу импульсов, поступивших от всех 12-ти нейтронных счетчиков СНМ8 монитора в течение 4800 мкс после начала события - кратности нейтронов - M. В работе [3] получена формула $E_h=032.(M)^2$ ГэВ, связывающая кратность M с энергией одиночных адронов для нейтронного супермонитора НМ64; по крайней мере в области значений $M < 200$. Для работы с монитором НМ-06 необходимо получить подобную формулу связи. Так как свинцовый генератор мониторов НМ64 и НМ-06 имеет одинаковую толщину (153 г/см^2), ожидалось, что их спектры кратностей должны быть подобны и отличаться только по интенсивности из-за того, что эффективность регистрации нейтронов в этих установках отличается в 2.2 раза [2].

Спектр измерялся в два приема. На первом этапе монитор НМ-06 был перевезен на Тянь-Шаньскую станцию и для него был измерен спектр кратностей на высоте 3340 м. После этого монитор НМ-06 был окончательно смонтирован на Промежуточной станции космических лучей, где был получен его спектр кратностей для высоты 1700 м. Оба эти спектра, вместе со спектром кратностей Тянь-Шаньского монитора, представлены на рисунке 1.

Рисунок 1 - Интегральные спектры кратности нейтронного монитора НМ-06 на различных высотах над уровнем моря в сравнении со спектром Тянь-Шаньского монитора НМ64.

На рисунке 1 можно провести сравнение спектров монитора НМ-06 на двух уровнях: 690 г/см$^{-2}$ и 835 г/см$^{-2}$. Полная интенсивность нейтронных импульсов от 12-ти счетчиков монитора на этих двух уровнях составляет ~3600 имп./мин. и ~1200 имп./мин. соответственно. Отношение этих интенсивностей позволяет определить пробег для поглощения нейтронов в атмосфере L=132 г/см^2, что в пределах ошибок эксперимента согласуется с классическим результатом [4], а также с данными монитора НМ64, работающего на установке КАЗНУ [5].

Так как полная интенсивность импульсов в одной секции Тянь-Шаньского супермонитора НМ64 площадью 6 м^2 равна 28000 имп./мин., то отношение интенсивностей, приходящихся на 1 м^2 площади мониторов НМ64 и НМ-06 составляет 2.6. Используя эту цифру, можно получить оценку эффективности регистрации испарительных нейтронов в мониторе НМ-06. Для монитора НМ64 эта эффектность известна из наших измерений с Pu-Be нейтронным источником, а также измерений [6] и составляет (5.0-5.3)%. Деля эту величину на 2.6, для эффективности IGY получаем (1.9-2.1) %. Это число хорошо согласуется с данными [7].

Различие в наклонах между спектрами мониторов НМ-06 и НМ64 объясняется различием в эффективности регистрации испарительных нейтронов и, по-видимому, конструктивными особенностями этих мониторов. Поскольку формы спектров оказались различными, для получения формулы связи между М и $E_к$ для монитора НМ-06 необходимо провести вычислительные процедуры, подобные описанным в [3].

Спектр нейтронных кратностей монитора НМ-06 можно использовать для того, чтобы сопоставлять данные, полученные от этого монитора, с данными других установок. Как показано в [1], эффект запаздывающих частиц на мониторе Тянь-Шаньской станции начинает проявляться в событиях, имеющих кратность М>100. Поскольку значения интенсивности событий в каждой точке представленных спектров умножены на величину М^2, линии равной интенсивности для этого графика представляют собой прямые, наклонные к оси абсцисс (несколько таких линий отмечено пунктирными прямыми на рис.1). Для того чтобы определить, какая область значений кратности М для высоты 1700 м соответствует событиям с М>1000 на 3340 м, необходимо сместиться от точки М~1000 на верхнем спектре к нижнему спектру в направлении, параллельном прямой М^2. Видно, что соответствующее значение интенсивности на 1700 м составляет М~150-200. В случае, если эффект аномально запаздывающих частиц связан с какими-то особенностями в составе или взаимодействиях первичных

космических частиц, именно эти значения кратности являются нижней границей диапазона, в котором можно ожидать появления аномалий во временных распределениях интенсивности нейтронов на высоте 1700 м. С другой стороны этот эффект можно объяснить началом насыщения скорости счета нейтронных счетчиков установки из-за конечного разрешения счетчиков при высоких плотностях потока нейтронов. Как видно их рис.1 с места пересечения прямых 1 и 2 начинается насыщение нейтронных счетчиков установки.

4. Временные распределения нейтронов. На рисунке 2 показаны временные распределения нейтронных сигналов от монитора НМ-06, наблюдаемые на двух уровнях в атмосфере. Эти распределения получены путем усреднения кривых интенсивности нейтронов, зарегистрированных в индивидуальных событиях, которые имеют близкие значения кратности нейтронов М.

При малых значениях кратности временные распределения нейтронов в мониторе описываются единой функцией $Д \sim 0.72 \cdot exp(-Г/110\ мкс) + 0.28 \cdot exp(-Г/386\ мкс)$. Экспоненциальный вид распределений сохраняется вплоть до $M \sim 100$. Начиная с кратностей $M > 100$ - именно там, где этого и следовало ожидать, согласно выводам предыдущего параграфа, - форма распределений меняется, в них появляется максимум, отстоящий на 100-200 мкс от начала события. Наблюдаемый порог появления эффекта происходит при такой энергии ШАЛ и множественности нейтронов, когда достигается это насыщение [8]. Такой вид временных распределений качественно подтверждает поведение соответствующих распределений в супермониторе НМ64 Тянь-Шаньской станции. Их количественное различие, по-видимому, связано с различием в массах свинцового поглотителя этих двух установок.

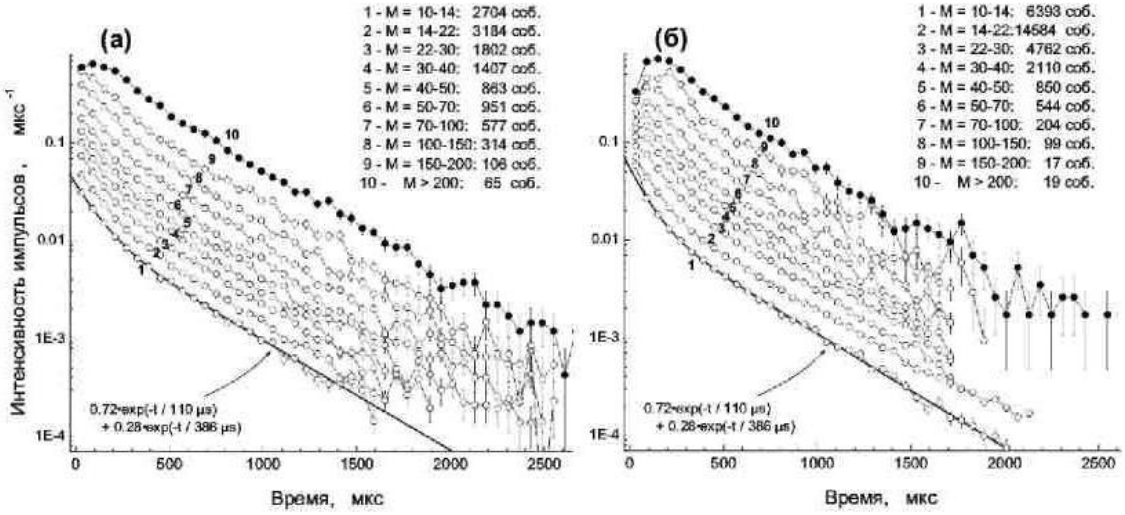


Рисунок 2 - Временные распределения нейтронных сигналов в событиях различной кратности для монитора НМ-06, наблюдаемые на глубине 690 г/см^2 (а) и 835 г/см^2 (б).

5. Заключение. Таким образом искажение временного распределения вызвано повидимому насыщением скорости счёта из-за конечного временного разрешения счётчиков при высоких плотностях потока нейтронов. Наблюдаемый порог появления эффекта происходит при такой энергии ШАЛ и множественности нейтронов, когда достигается это насыщение. Концентрация эффекта в стволе ливня вызвана крутым пространственным распределением потока энергии адронной компоненты ШАЛ.

Применение нейтронного монитора со специальной электроникой позволило обнаружить новый эффект - генерацию большого количества вторичных нейтронов в веществе детектора и вторичных гамма-квантов, генерируемых нейтронами в процессе их замедления и взаимодействия с окружающей средой. Этот эффект дополняет наше

представление о развитии ШАЛ и о процессах, которые происходят, когда ливень падает на землю.

1. Antonova V.P., Chubenko A.P., Kryukov S. V. et al. II J.Phys. G: Nucl. Part. Phys. 2002. V.28.P.251.
2. Hatton C.J. // The Neutron Monitor. Progress in elemantary particle and cosmic ray Physics. London. 1971.
3. Антонова В.П., Вильданова Л.К, Жуков А.П. и др. II Изв. РАН, Сер.физ., 2002. Т.66, 11. С. 1578.
4. Simpson J.A., Fongen W., Treiman S.B. I / Phys. Rev. A. 1953. V.90. P.934.
5. Щепетов А.Л., Оскомов В.В. и др. // Тр. 28-ой Всероссийской конф. по косм, лучам. DKL-1419.
6. Hatton C.J., CarmichaelHIl Canadian Journal of Physics. V.42, 1964, P.2443.
7. Hughes E.B. //Ph.D. Thesis. University of Leeds. 1961.
8. А.Д.Ерлыкин., // Тр. 28-ой Всероссийской конф. по косм, лучам. DKL-1521.

УДК 539. 14

Т.Х. Садыков

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТИЦ КОСМИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ МЕТОДОМ ИОНИЗАЦИОННОГО КАЛОРИМЕТРА И РЕНТГЕНОЭМУЛЬСИОННОЙ КАМЕРЫ

(*г. Алматы, Физико-технический институт МОН РК*)

Ғарыштық сәулелердің табиғатын зерттеуге арналған Теңіз деңгейінен 3340 м биіктікте орналасқан жаңа кешенді қондырғы жасалды. Қондырғы иондаушы калориметрден және рентгенэмульсиялық камерадан тұрады. Ғарыштық сәулелердің Жер атомсферасымен әсерлесуін зерттеу барысында айрықша екі оқиға тіркелген. Әсерлесуші бөлшектердің энергиясы 10^{15} эВ шамасынан жоғары екендігі анықталды. Зерттеу нәтижесі ғарыштық сәулелердің құрамындағы мұндай бөлшектердің энергиясының әсерлесу барысында ~ 20 ТэВ/мм^2 кеңістігінде бөлінетіндігін дәлелдеді.

At an altitude of 3340 m above sea level, a new integrated system for studying the nature of cosmic rays. The installation consists of an ionization calorimeter and rentgenoemulsionnoy camera. When studying the interaction of cosmis rays with the atmosphere werw recorded two special cases. Particle interaction energy is more than 10^{15} eV. Analysis of the results of the registration revealed the following: the composition of cosmic rays are the interaction energy which is released in the field of ~ 20 TeV/mm^2.

Введение. На Высокогорной станции космических лучей Физико-технического института МОН РК, расположенной на высоте 3340 метров над уровнем моря, исследуются взаимодействия космических лучей с веществом. Комплексная установка площадью 44 м^2 и толщиной 1033 г/см^2 состоит нз рентгеноэмульсионной камеры (РЭК) и ионизационного калориметра. В экспериментах с РЭК наблюдаются события с так называемым "гало" - большим диффузным пятном засветки на рентгено-графической пленке, сопровождающем следы высокоэнергичных частиц в гамма-семействах, т.е. в стволах широких атмосферных ливней (ШАЛ). К настоящему времени в экспериментах с РЭК обнаружено большое количество событий с гало. Первое такое суперсемейство “Андромеда ” описано в работе японских физиков [1] и привлекло внимание исключительно высокой энергией.

Расчеты показывают [2], что гало образуется, как правило, при падении на рентгеноэмульсионную камеру из воздуха узкого пучка частиц, обеспечивающего наблюдаемую плотность потока энергии (~20 ТэВ/мм^2). Такие пучки возникают, по-видимому, невысоко над РЭК и природа их не вполне ясна. Аналогичные события регистрировались сотрудничеством "Памир" [2], в других экспериментах [3] и в наших работах [4].

В работе [2] рассматривались возможные причины, приводящие к образованию гало, которые наблюдаются в значительной доле атмосферных взаимодействий при энергиях в сотни ТэВ и выше. Гало может быть обусловлено как эффектом перекрывания периферийных областей визуально обнаруженных высокоэнергичных ЭФК, так и большим количеством подпороговых малоэнергичных ЭФК. В каждом конкретном событии роль того или другого эффекта определяется историей развития ядерноэлектромагнитного каскада в атмосфере. В семействах с $\Sigma E_\gamma > 500$ ТэВ гало наблюдались примерно в половине событий. Однако однозначной интерпретации и полной ясности в данном вопросе нет. Требуется получение дополнительных экспериментальных данных о таких событиях, в особенности, с известной первичной энергией и при использовании ядерной эмульсии совместно с рентгеновской пленкой.

Исследование событий с «гало» методом комплексной установки. С помощью ионизационного калориметра и РЭК в нашем эксперименте было зарегистрировано два взаимодействия в атмосфере при первичных энергиях выше 10^{15} эВ, которые характеризуются наличием "гало" в РЭК (рисунок 1) и ядерно-электронных каскадов в событий с . гало проводилось сканирование рентгеновской пленки На рисунке 1-А, Б показано гало "Шолпан", полученное в результате сканирования. По ядерной эмульсии проводились измерения энергии и координат электронно-фотонных каскадов на микроскопах МБИ-9.

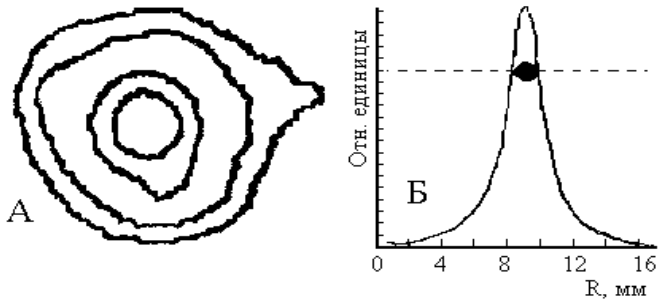


Рисунок 1 -Вид гало «Шолпан". А - изоденсы проведены на уровнях Д= 0,7; 1,0; 2,0 и 3,0. Б – распределение по плотности потемнения в центральной части гало (разрез поперек пятна).

В таблице 1 приведены основные характеристики гало по двум событиям "Шолпан" и "Анна". В первой строке таблицы приводится энергетические пороги по ядерной эмульсии, во второй - количество гамма-квантов обнаруженных по ядерной эмульсии, в третьей - энергии событий определенные по ядерной эмульсии, в четвертой и пятой - площади почернения и энергии определенные по рентгеновской пленке. В шестой - энергии, выделившиеся в адронную компоненту и определенные по ионизационному калориметру. В седьмой строке приведены показатели интегрального энергетического спектра гамма-квантов, которые отличаются от обычных на два порядка. Это свидетельствует о том, что при адрон-ядерных взаимодействиях с образованием гало происходит большая диссипация энергии [5]. Ионизационные камеры калориметра находящиеся в районе гало находились в насыщении, т.е. усилители, несмотря на динамический диапазон - 2000, не выдавали адекватной

Таблица. Основные характеристики событий с гало

№ п/п	Характеристики событий	Шолпан	Анна
1	Энергетический порог по ядерной эмульсии	0,3	0,5
2	Количество гамма-квантов обнаруженных по ядерной эмульсии	497	177
3	Энергии, определенные по ядерной эмульсии, ТэВ	690	320
4	Площадь почернения в РТ-6 с Д> 0,4, $мм^2$	163,7	126,3
5	Энергия, определенная по РТ-6, ТэВ	4200,0	3240
6	Энергия, выделившаяся в адронную компоненту и определенная по ионизационному калориметру, ТэВ.	200,0	160,0
7	Показатель энергетического спектра гамма-квантов.	0,0002	0,0008

информации о созданной в камерах ионизации. Действительно, в области гало, имеющей линейные размеры 1-2 см, сосредоточены сотни тысяч вторичных частиц, которые, естественно, не измеряются имеющейся электроникой из-за ограниченности диапазона электронного тракта.

На рисунке 2 по данным ионизационного калориметра представлено распределение по числу частиц в поперечном разрезе ливня для события “Шолпан”. Из рисунка видно, что в центральной части распределения зафиксирован факт насыщения, что регистрируется в виде провала распределения (отмечено стрелкой). На рисунке 3 показано распределение ионизации для данного события в теле калориметра. Отметим, что энергия, зарегистрированная калориметром, составляет 200 ТэВ, в то же время из рисунка видно, что на глубине 1000 г/$см^{-2}$ железного поглотителя наблюдается рост выделения энергии ядерно-электронного каскада, свидетельствующий о возможном проносе адронной компоненты и недомере энергии.

Из вышесказанного следует, что в области энергий 10^{15} – 10^{16} эВ имеется определенная доля взаимодействий, в которых существенная часть энергии выделяется в очень ограниченной (на уровне наблюдения) области ~ 1 $см^2$ и при рассредоточенных детекторах может просто не зарегистрироваться. Этот эффект приводит не только к большим неоднозначностям в процессе измерения энергии, но и к систематическому и неконтролируемому недомеру энергии первичных частиц, что неизбежно приводит к просчету взаимодействий предельных энергий.

О вкладе различных частиц в общее потемнение «гало» по данным ядерной эмульсии. Важным вопросом при изучении взаимодействий, приводящих к образованию гало в свинцовой части РЭК, является: частицами каких энергий формируется гало? Дело в том, что в работе [5] энергия электронно-фотонной свинце. Если в районе гало существует много частиц с гораздо меньшими энергиями, которые не образуют в ядерной эмульсии прямых треков частиц и вклад которых в общую энергию не учитывается, то энергия ЭФК, оцененная только по релятивистским трекам частиц, может быть определена не совсем корректно. Кроме того, более детальное выяснение микроструктуры гало в ядерной эмульсии и рентгеновской пленке поможет яснее представить себе процесс компоненты по гало оценивалась, путем подсчитывания релятивистских электронов в ядерной эмульсии и приписывания им средней энергии порядка $E_{кр.} = 7,4$ МэВ, поскольку гало наблюдается практически в области максимума развития ЭФК в

формирования гало.Для анализа было взято одно из взаимодействий (Шолпан), в котором в свинцовой части РЭК образовалось гало с видимыми размерами ~ 400 $мм^2$.

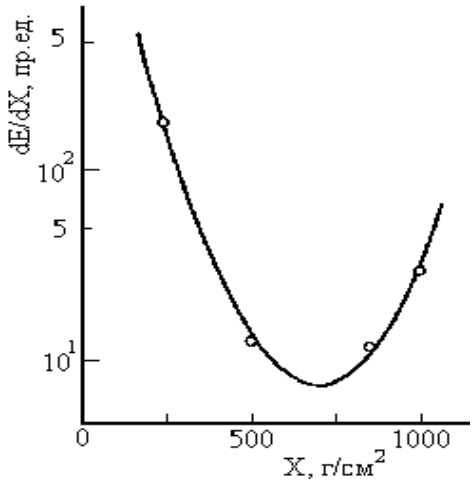


Рисунок 3 - Развитие электронно-ядерного каскада в теле калориметра события “Шолпан”.

Для определения плотности треков частиц проведено измерение числа треков на микроскопе МБИ-9 по полосе шириной 1,2 мм вдоль гало через его центр на длине ~ 10 мм. Измерения фона проводились на расстояниях - 30 см от центра гало. На рисунке 4 приведено распределение по плотности треков частиц и зерен в зависимости от расстояния от центра гало. Необходимо отметить, что трек – траектория движения заряженной частицы состоит из проявившихся зерен в ядерной эмульсии.

Были выделены отдельно треки частиц, совпадающие по направлению с наиболее энергичными гамма-квантами из анализируемого семейства, треки частиц всех направлений, а также отдельные зерна и их группы по два-три зерна. Фоновые плотности треков частиц и зерен при шестимесячной экспозиции составили для частиц, направление которых совпадает с направлением наиболее энергичных гамма-квантов $(2,0\pm0,2)\cdot10^{-3}$ частиц/мкм^2, для треков частиц различных направлений $(5,0\pm0,8)\cdot10^{-2}$ частиц/мкм^2 и для отдельных зерен и их групп 0,44±0,08 зерен/ мкм^2. Размер зерен составил 0,5—0,7 мкм^2. В среднем, для данного семейства с гало каждый трек частицы образовывал на своем пути в эмульсии 7 - 9 зерен. Поскольку гало достаточно симметрично и имеет форму круга, значение плотностей по расстоянию от центра гало усреднено по двум взаимоперпендикулярным направлениям. Из рисунка видно, что в составе гало присутствуют надфоновые треки частиц разных направлений, а также значительное количество надфоновых зерен и их групп.

Что касается треков частиц различных направлений, то это, по-видимому, малоэнергичные электроны, рассеявшиеся в свинцовом поглотителе РЭК под различными углами. Происхождение надфоновых зерен не очень ясно: они образованы электронами с энергиями менее 1 кэВ. В любом случае становится очевидным необходимость дальнейших исследований проблемы формирования гало.

Из рисунка 4 видно также, что в составе гало присутствуют надфоновые треки частиц разных направлений, а также значительное количество надфоновых зерен и их групп.

Что касается треков частиц различных направлений, то это, по-видимому, малоэнергичные электроны, рассеявшиеся в свинцовом поглотителе РЭК под различными углами. Происхождение надфоновых зерен не очень ясно: они образованы электронами с энергиями менее 1 кэВ. В любом случае становится очевидным необходимость дальнейших исследований проблемы формирования гало.

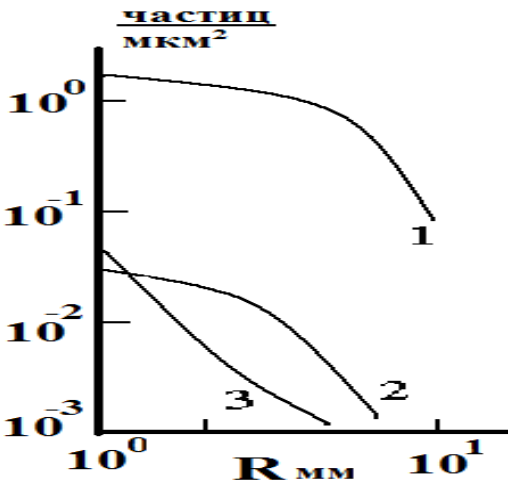


Рисунок 4. Распределение радиальной плотности частиц и зерен в гало. 1-для надфоновых отдельных зерен и их групп; 2 – для надфоновых треков различных направлений; 3 – для треков, имеющих направление совпадающее с направлением надпороговых гамма-квантов из состава гало.

Далее было проведено сравнение степени общего потемнения ядерной эмульсия с потемнением, обусловленное вкладом релятивистских частиц. С этой целью фотометрировался разрез вдоль гало по центру на фотометре МФ-4 с диафрагмой 48 мкм с шагом 100 мкм на протяжении 26 мм. На рисунке 5 цифрой 1 показано распределение по плотности потемнения через центр гало. Цифрой 2 на этом же рисунке показано распределение по плотности потемнения на этом же участке гало за счет релятивистских частиц.

Потемнение, обусловленное релятивистскими частицами определялось следующим образом. Треки подсчитывались с помощью микроскопа МБИ-9. Для пересчета плотности треков в фотометрическую плотность потемнения ядерной эмульсии было измерено несколько ЭФК на этой же пленке на расстоянии 8 см от центра семейства и гало. Путем сравнения степени потемнения ядерной эмульсии Д и плотности числа релятивистских частиц n была получена калибровочная зависимость $Д = f(n)$, показанная на рисунке 5.11-Б. Из рисунка 5.11-А видно, что релятивистскими частицами можно объяснить только~10% полного потемнения ядерной эмульсии.

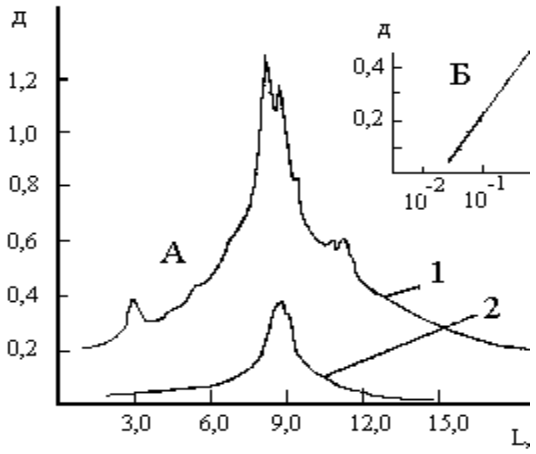


Рисунок 5 - Зависимость степени потемнения в ядерной эмульсии от плотности частиц. А, 1-распределение по плотности потемнения через центр гало. 2 - распределение по плотности потемнения на этом же участке гало за счет релятивистских частиц. Б -зависимость степени потеемнения ядерной эмульсии от плотности потока электронов.

Существенная доля степени потемнения вызвана малоэнергичными частицами (по-видимому ~1 КэВ [5]), которые образуют в эмульсии короткие треки (1-3 зерна).

Энергия гало «Шолпан», измеренная методом сканирования по методике предложенной Вротняком [6] составила 4200 ТэВ. Энергия ЭФК составляющих гало и измеренных методом счета треков составила 690 ТэВ. С учетом 10% количества электронов, имеющих релятивистские скорости, получим, что энергия, выделившаяся в гало, составляет 1200 ТэВ. Таким образом, измерения энергии гало методом, предложенным в работе [6] приводит к завышению энергии гало в 3 раза. Следовательно, при объяснении механизма рождения и развития гало, а также при определении энергии определенный вклад вносят малоэнергичные частицы.

Выводы. Наблюдение в настоящем эксперименте событий с большой концентрацией энергии в ограниченной пространственной области (~1 $см^2$) свидетельствует о большой вероятности существенного недомера энергии первичных частиц в диапазоне энергий $E= 10^{15}–10^{16}$ эВ и, соответственно, к неизбежному просчету таких взаимодействий в установках с рассредоточенными детекторами, что имеет место, к сожалению, во многих экспериментах. При объяснении механизма рождения и развития гало, а также при определении энергии нельзя игнорировать малоэнергичные частицы.

1. Akashi M., Fujimoto Y., Lattes O. et al. «Large air shower event Andromeda» //Proc. 12th Intern.Cosm.Ray Conf. Hobart, 1971, v.7, p. 2775-2778.
2. Байбурина С.Г., Борисов А.С., Гусева З.М. и др. Сотрудничество Памир, «Исследование ядерных взаимодействий в области энергий 10^{14} - 10^{17} эВ методом рентгеноэмульсионных камер в космических лучах «//Труды ФИАН, 1984, т. 154, стр. 3-141.
3. Yuldashbaev T.S., Nuritdinov Kh. «A stady of Primary Mass Composition by XREC metod at the energies 10-100 PeV» //In:Proc. 29th Intern. Cosm. Ray Conf. Pune – India. 2005.vol.6, p 156-159.
4. Babaev M.K.,.Baygubekov A.S,.Sadykov T.Kh. et oll “Research of Microstructure of event with an HALO ////In:Proc. 29th Intern. Cosm. Ray Conf. Pune – India. 2005, vol.6, p 101-104.
5. Бабаев М.К., Байгубеков А.С., Еременко Ю.А.и др. О смягчении энергетических спектров вторичных гамма-квантов при сверхвысоких энергиях //Известия РАН, сер.физ.1994. Т.58, №2, с.2-4. 164.
6. Pietrak T., Wrotniak J. //In:Proc. 16th Intern. Cosm. Ray Conf. Kyoto, 1979, vol.7, p.193-196.

ӘОЖ 378.105 7:530.141

Ә.Х. Сарыбаева

ФИЗИКА КУРСЫНАН КРЕДИТТІК ОҚЫТУ ЖҮЙЕСІНДЕ ЭЛЕКТРОНДЫҚ ОҚУЛЫҚТЫ ПАЙДАЛАНУДЫҢ ЖОЛДАРЫ

(*Түркістан қ., Қ.А.Ясауи атындағы ХҚТУ*)

В статье рассматриваются методы применения электронных учебников по курсу физики в кредитной технологии обучения. Разработана теоретическая основа совершенствования профессиональной подготовки будущих учителей средствами электронных учебников. Определены состояние и тенденции создания электронного учебника и их технологические возможности. Выявлены содержание электронных учебников и их технология применения. Созданные в процессе исследования электронные учебники повышают качество знаний и совершенствуют

профессиональную подготовку студентов, совершенствуют профессиональную подготовку будущих учителей физики путем единения теории и практики.

This article deals with methods of use of the electronic tutorial at the rate «Physics» on credit system of training. The theoretical basis of perfection of professional training of future teachers by means of electronic textbooks is developed. The condition and tendencies of creation of an electronic textbook and its technological opportunities are determined. The contents of electronic textbooks and its technology of application are revealed. The electronic textbooks, created during research, raise a quality of knowledge and improve professional training of students, improve professional training of future teachers of Physics by a unification of theory and practice.

Қазақстан Республикасында білім беруді дамытудың 2005-2010 жылдарға арналған мемлекеттік бағдарламасында «Оқу процесін ұйымдастырудың дәстүрлі жүйесінің орнына оқытудың кредиттік жүйесі енгізіледі, ол оқитындардың өз бетінше белсенді жұмыс істеуіне ынталандырады, жеке білім бағытын таңдаудың болуын, ұтқырлығын, білім туралы құжаттардың әлемдік білім беру кеңістігінде танылуына әрекет етеді»,- делінген [1].

Кредиттік оқыту жүйесі – жаңа технология, оның негізгі мақсаты әлемдік білім беру стандартына білім сапасын жақындатып, болашақ мұғалімнің нарық заманындағы бәсекеге қабілетті, өмірден өз орнын таба алуына негіз қалау болып табылады. Болашақ мұғалімдер даярлауда оқу жұмыстарын тиімді ұйымдастыра отырып, ізденімпаздыққа, дербестікке, нәтижелі сапалы еңбекке ұмтылуға шақыру. Оқытудың кредиттік жүйесі – студентке өз бетінше, шығармашылық негізінде білім алуды өз жағдайына бейімдеп білім беретін технология. Кредиттік оқыту жүйесінде оқытушы сабақта тек бір тақырыпты қамтып қоймай, тұтастай бір бөлімді игертуі тиіс. Курсты оқытуда студенттің өз бетінше жұмыс жасауының маңызы зор. Сол себепті студенттің өзіндік жұмысының екі түрінің де (ОБСӨЖ және СӨЖ) сапалы орындалуы, кредиттік технологияны оқыту процесіне табысты енгізуге тікелей әсер етеді.

Жаңа кредиттік жүйені алғашқылардың бірі болып Қ.А.Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің профессор-оқытушылары оқу үдерісінде қолданды. Біздің «Физика» кафедрасында болашақ физика мұғалімдерді даярлау бағытында осы жүйе бойынша сабақтарға оқу-әдістемелік кешендері даярланып жүргізілуде. Біздің тәжірибемізде анықталғандай, дәстүрлі жүйедегі топтарға қарағанда кредиттік жүйедегі топтарда білім сапасы әлдеқайда алда. Олай дейтініміз, біріншіден, студенттер алғашқыдай емес, жаңа жүйенің ерекшеліктерін біршама түсініп, оған мойынсына бастаған, яғни өз құқықтары мен міндеттерін танып, жоғары жауапкершілікті сезінген. Екіншіден, нақты пән бойынша алға жылжу байқалады, себебі бүкіл оқылатын пәннің сипаттамасы, мақсат-міндеттері, қысқаша мазмұны, тақырыбы және әрбір сабақ көлемі мен әдебиеттер тізімі көрсетілген жұмыс бағдарламасы (силлабус) алдын-ала студент қолына беріледі және аудиториялық сабақтан көрі аудиториядан тыс сабақтарға сағат көбірек бөлінгендіктен, студенттің өз бетінше ізденуіне уақыт мейлінше жетерлік. Силлабус алдын-ала студент қолында болғандықтан, ол өз бетінше ізденсе,онда оқытушы басшылығы бәсеңдейді деген пікір қалыптасуы мүмкін. Бірақ студентке дұрыс бағыт-бағдар беріп, оның пәнге деген қызығушылығын арттыруда, ғылыми-шығармашылық жұмыстың мазмұнын анықтауда оқытушының да көтерер жүгі аз емес.Сондықтан да, оқытушының қатысуымен жүретін студенттің өзіндік жұмыстары да (ОБСӨЖ) әлдеқайда тиімді.

Сонымен қатар, болашақ физика мұғалімдерінің кредиттік жүйе бойынша білімдерін бақылау мен бағалау рейтингттік жүйеде іске асатындықтан аудиториялық, практикалық, зертханалық сабақтарда студент тек белсенді түрде қатысуы арқылы ғана тиісті бағаға (балға) жетеді. Мысалы, «Механика» пәнін оқытуда осы пәннен

дайындалған электрондық оқулықты пайдаланудың тиімділігі байқалды. Электрондық оқулықты пайдаланып, студент кез келген уақытта сабаққа дайындала алады. Сонымен қатар, зертханалық жұмыстарды орындау барысында да біздің арнайы зертханалардағы компьютердегі виртуальдық зертханалардың да көмегімен орындай алады. ОБСӨЖ оқытушы мен студенттің бірге орындайтын жұмысы болғандықтан оны өткізу формасын оқытушы өзі таңдайды оны: тренинг, дискуссия, іскерлік немесе дидактикалық ойындар, миға шабуыл, кейс құрастыру, топ болып сұрақтарға талдау жасау арқылы өткізген тиімді.

Сонымен, қорыта айтқанда, бұл көрсеткіштер жаңа жүйенің біз көре білген тиімді жақтары. Олар:

– студенттің өз еркімен, өз бетінше ізденуі;

– студент қолында силлабустың болуы;

– бағалауда студенттің күнделікті сұралатыны, яғни оның әркез белсенділігі;

– болашақ мамандығына қажетті пәндердің негізгілерін студенттің өзі таңдауы, яғни қалауы бойынша оқуы.

Сонымен, оқу үрдісінің тиімділігін арттыру үшін, кредиттік оқыту жүйесінде электрондық оқулықтарды пайдалану қажет.

Электронды оқулықтың бір артықшылығы, студент компьютер лабораториясында сабақтан тыс уақытта жұмыс істей алады немесе үйінде өз компьютерінде дайындала алады. Қажет болған кезде, студент өзінің жеке жоспары бойынша оқытушының бақылауымен жұмыс істеуіне болады.

Электрондық оқулықты пайдалану болашақ мұғалімдердің кәсіби даярлығын және оқу үдерісін жетілдіруде міндетті компоненті болып табылады. Сондықтан да кез келген деңгейдегі білім беруде мұғалім даярлау үшін олардың болашақ кәсіби әрекетінде электрондық оқулықты қолдану қажет.

Электрондық оқулықтармен оқыту, оларды жетілдіруге қажетті жағдайларды құру, өңдеу және ендіру, жаңаны дәстүрлі әдіспен қиылыстырудың жолдарын іздеу психологиялық-педагогикалық, оқу-әдістемелік проблемаларды шешуді талап етеді. Оларды әртүрлі бағыттар қатарында ажыратуға болады:

– оқу үдерісіне электрондық оқулықты ендіру проблемасын шешу үшін бірыңғай ғылыми-әдістемелік комплексті жетілдіру;

– практикалық іс-әрекетте электрондық оқулықты пайдаланудың әдістемесін жасау;

– электрондық оқулықпен оқытатын болашақ мұғалімдерді даярлау және оны оқу процесіне ендіру;

– жоғары оқу орындарын материалдық-техникалық жабдықтау;

– қажетті әдістемелік қамтамасыздандыруды іздеу, өңдеу және құру.

«Электрондық оқулықпен оқыту» термині де әдебиеттерде әртүрлі айтылып келгені мәлім.

В.П.Тихомировтың пікірінше, электрондық оқулықпен оқыту, ақпараттық-коммуникациялық технологияларды ертерек қолдануға дағдыландырады. Бұл келешекте білімді практикалық пайдалану тиімділігін арттыруды жүзеге асырады. Ол электрондық оқыту технологиясын, білім алудың жаңа стилі және ақпараттық қоғамға лайықты өмір сүру технологиясы, үздіксіз білімді жетілдіру және іскерліктер мен дағдыларды дамытудың технологиясы деп сипаттайды [2].

О.Околелов, электрондық оқулықтың басты ерекшелігі, оқыту үдерісін басқару жүйесі, білімді жүйеге келтіру және диагностикалау құралы, сөздік әдісті қолдану, көрнекілікті пайдаланудың жоғары деңгейі, мультимедиа құралдарын, оқытудың басқа да түрлерін ұйымдастыруға мүмкіндік береді деп санайды. Ол ЭО-тың деңгейін екі түрге бөледі:

– мемлекеттік стандарт талаптарына толық сай, негізгі теориялық материалдарды қамтитын, практикалық ебдейліктер мен дағдыларды қалыптастыратын жаттығулар мен есептердің жүйесі; оқыту процесін басқару құралдары мен әдістері, қорытынды тексеру әдістері, базалық білімдерді меңгеруді бағалау деңгейі;

– қосымша теориялық материалдарды қамтушы; студенттің кәсіптік және шығармашылық сұраныстарын қанағаттандырушы бөлімдері, оқыту процесін басқарудың дидактикалық құралдары сияқты деңгейлерге жіктейді.

Сонымен бірге, электрондық оқулықтарға қойылатын талаптарды ғылыми-әдістемелік, техникалық, тәрбиелік деп үш түрге бөледі. Эксперименттік зерттеулердің нәтижесінде ЭО-тар арқылы студенттердің оқу материалы жайлы ақпаратты қабылдауы мен практикалық жұмыстарын орындаудағы белсенділіктері де 40-45 минут аралығында болатындығын көрсетті [3].

Республикалық ақпараттық білім беру орталығы құрылған. ЭО-лар әртүрлі пәндер үшін оқыту үдерісіне енгізілуде. Осы орталықта дайындалған электрондық оқулықтар дидактикалық ұстанымдар мен модульдік технология негізінде құрылып таралған (Г.К.Нургалиева, А.И.Тажигулова [4). Бұл орталықтың ақпараттық өнімдері Қазақстанда электрондық оқулықты (ЭО) жасауды жүзеге асыратын оқытушылардың, ғалымдардың, бағдарламашылардың, дизайнерлердің, хабар жүргізушілердің нағыз шығармашылық бірлестігіне айналды. Нәтижесінде дайын электрондық оқулықтарды оқытушылардың өздері толықтырып, жетілдіру тенденциясы байқалды.

050110-физика мұғалімі, 050604-физик зерттеуші мамандықтарында оқитын студенттер үшін «Механика» пәніне жоспарланған кредит саны – 3, яғни 135 сағат, оның ішінде лекцияға 15 сағат, практикалық сабаққа 15 сағат, лабораториялық сабаққа 15 сағат, оқытушы басшылығымен өтетін өзіндік жұмысқа (ОБСӨЖ) 45 сағат, студенттің өзіндік жұмысына (СӨЖ) 45 сағат бөлінген. Осыған сәйкес пәннің силлабусы, лекциялық, практикалық және лабораториялық сабақтардың күнтізбелік-тақырыптық жоспары, СӨЖ тақырыптарының тізімі дайындалды.

«Механика» бөлімі бойынша білімдер мен дағдылар бойынша жүйелеген мазмұны:

1.Кинематика. Материалдық нүктенің орын ауыстыруы. Түзу сызықты бірқалыпты қозғалыс. Қисық сызықты қозғалыс. Динамика. Ньютонның бірінші заңы. Ньютонның екінші заңы. Ньютонның үшінші заңы. Қозғалыс мөлшерінің (импульстің) сақталу заңы. Серпімділік күштері. Үйкеліс күштері. Бүкіл әлемдік тартылыс заңы. Кеплер заңдары. Инерциялық масса және гравитациялық масса. Ғарыштық жылдамдықтар. Жұмыс. Қуат және энергия. Механикалық жұмыс. Қуат. Энергия. Механикалық жүйелердегі энергияның сақталу заңы. Статика. Тепе-теңдіктің түрлері.

Тақырыпқа байланысты лекция электрондық оқулықты, көрнекілік құралдарды қолданып шолу түрінде, проблемалық мәселелерді мүмкінгінше енгізе отырып оқылады. Лекция материалдарымен жүйелі, тұрақты жұмыс студенттің өзіндік жұмысының ең негізгі бөлігі болып табылады да, келесі лекцияларды түсінуіне, практикалық, лабораториялық сабақтарда есеп шығаруға тәжірибелердің нәтижелерін дұрыс талдауға мүмкіндік береді.

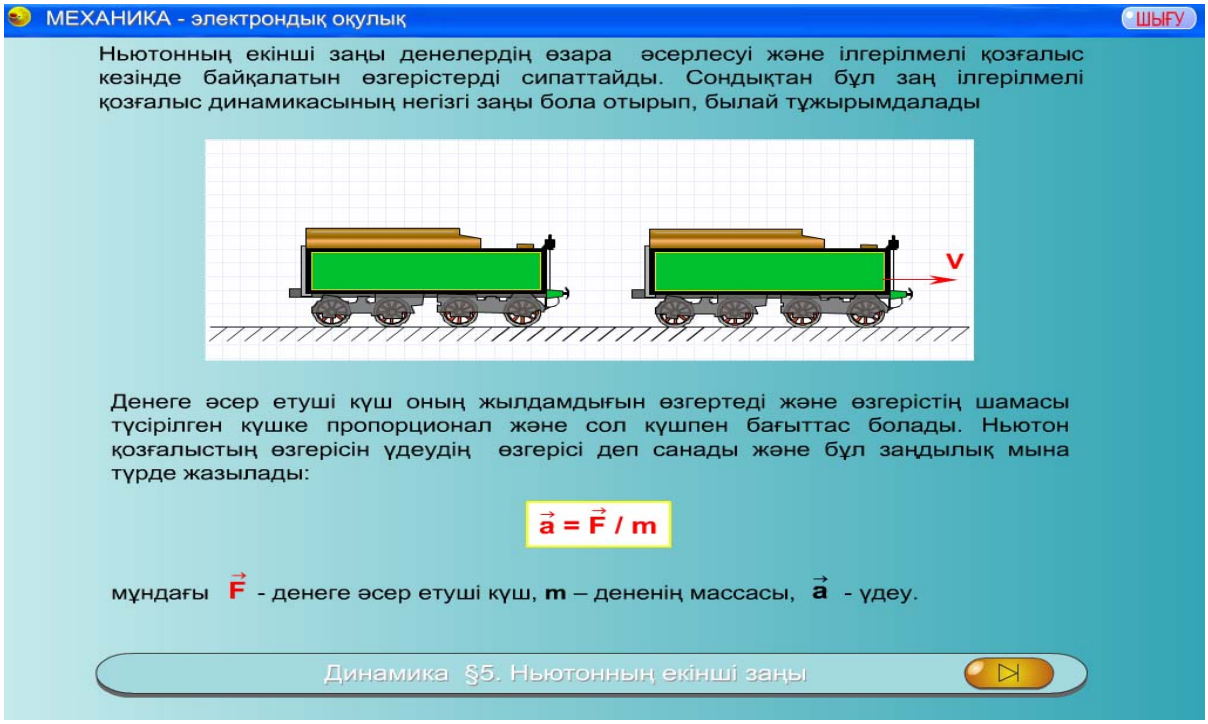
Осыған орай, 2006 жылдан бастап жоғары оқу орындарының 050110 –«физика пәнінің мұғалімі», 050604 – «физик –зерттеуші» мамандықтарында оқитын студенттерге «Механика» бөлімі тарауларындағы құбылыстар мен процестерді компьютерді пайдаланып оқыту үшін электрондық оқулық жасақтадық.

Біз жасаған электрондық оқулықты тиімді пайдаланудың жолдарын мынадай тақырыптарды оқытудын байқауға болады. ЭО-ны пайдалану арқылы өткізілген *компьютерлік сабақтың жоспары:*

Тақырыбы: *Ньютонның II-заңы* (I курс, II-семестр).

Мәселен, Ньютонның II-заңын түсіндіру үшін, мониторға «Күш, масса, үдеу» ұғымдары енгізіліп, олардың масса мен инерттілік ұғымдарымен байланыстылығы көрсетіледі. Нақты монитордағы масса мен күштің бір-біріне кері пропорционалдығы дәлеледенеді (Сурет 1).

Студенттердің бұл тақырып бойынша алған білімдерінің беріктігін тексеруге арналған компьютердегі тест сұрақтарын қолданамыз.Тест сұрақтарына жауаптарының нәтижесі монитордa көрсетіледі.



Сурет 1 - Ньютонның II-заңы тақырыбына электрондық оқулықпен өткізілген сабақтың көрінісі

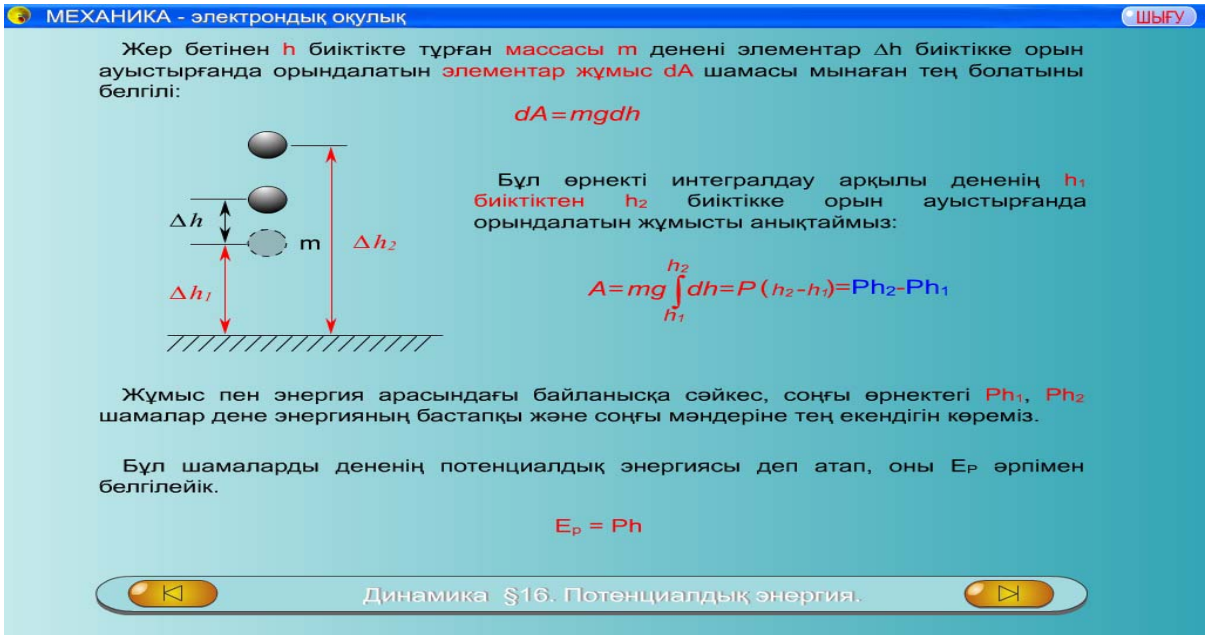
Электрондық оқулықты қолдану нәтижесінде өткізілген *сабақтың технологиясы.*

Тақырыбы: *Потенциалдық энергия*.

Потенциалдық энергия денелердің немесе олардың бөлшектерінің өзара орналасуы кезіндегі жұмыс қорымен өлшенетіндігі жайлы, материалдық нүкте ретінде қарастырылып отырған дене, өзін айнала қоршаған денелермен әсерлесе отырып, бір орыннан екінші орынға қозғалса, демек, ол денеге күштер әсер етеді. Бұл жағдайда дене күш өрісінде қозғалатындығы экранда толық түсінік анимациялардың көмегімен көрсетіледі (Сурет 2). Онан соң студентке арнайы тапсырма беріліп, оны осы ЭО көмегімен орындау тапсырылады. Соңынан алған білімдерін тексеру мақсатында төмендегідей бақылау сұрақтарына жауап аламыз.

Мұндағы әрбір тарау физикалық құбылыстардың көрсетілімдерінен тұрады. Физикалық құбылыстың барлығы мультимедиалық бейнеде көрсетіледі. Әрбір тараулардың соңындағы «Тест» тапсырмасы студенттердің білімдерін жүйелеп, бекітіп және дамыту мақсатын көздейді.

Әр сұраққа бес нұсқадан тұратын жауап жазылған, студент осылардың ішінен дұрысын таңдауы керек. Студент пен компьютер арасындағы диалог басынан соңына дейін компьютер жадында сақталады, алған бағасы дисплей экранына беріледі. Мұнда әрбір сұраққа берілген дұрыс жауап бір балл деп есептеліп, осы баллдардың қосындысы.



Сурет 2 - Потенциалдық энергия экранынан көрініс

студент білімінің көрсеткіші ретінде алынады Оқытушының студент білімін компьютер арқылы бағалауы уақытты тиімді пайдалануға, үнемдеуге мүмкіндік туғызады. Компьютер арқылы студенттердің жауаптары толық әрі әділ бағаланады

ЭО лекция барысында қаралатын оқу материалының мазмұнына логика–дидактикалық талдау жасауға негізделуі тиіс. Электрондық оқулықтың материалдары («Үйкеліс күші», «Материалдық нүктенің орын ауыстыруы», «Қисық сызықты қозғалыс» т.т.) демонстрацияланады. Мұндай талдау кредиттік жүйе бойынша оқытудың мақсатын айқындауға, студенттердің іс–әрекетін, ұйымдастыру әдістерін құруға, лекцияның негізгі мақсатына сай іс–әрекеттер түрін жоспарлауға жағдай жасайды.

1. Қазақстан Республикасында білім беруді дамытудың 2005-2010 жылдарға арналған мемлекеттік бағдарламасы. //Егемен Қазақстан, 11.10. 2004ж.
2. Тихомиров В.П. Качественное образование для всех как основа формирования знаний. // Информационное общество. 2005, № 4. –С. 12-14.
3. Околелов О. Электронный учебный курс //Высшее образование в России. – 1999. №4. –С.126-129.
4. Нургалиева Г.К., Тажигулова А.И. Опыт и преспективы информатизации образования //Вестник НЦП им.Абая. №27. – 24 с.

U.D.C. 372.851

Selim Guvercin

THE EFFECT OF INSTRUCTION WITH PROBLEM POSING ON THE MATHEMATICAL ACHIEVEMENT

(City of Almaty, Suleyman Demirel Universty Phd Student)

Текстовые задачи используются для формирования математических навыков студентов и до сих пор важны для математического образования из-за их легкого применения в повседневной жизни. Несмотря на частое использование решения текстовых задач в базовых книгах по математике, они по-прежнему трудны для многих обучающихся. В данной работе мы рассмотрим, как влияет решение текстовых задач на академические успехи в обучении математике. Учащиеся 8 классов были случайным образом разделены на две группы – экспериментальную и контрольную. В экспериментальной группе обучение велось на основе решения текстовых задач, в контрольной – традиционно. В конце исследования, результаты показывают, что учащийся в экспериментальной группе показывает значимый уровень успеха.

Word problems that have been used to develop the students 'mathematical skills and has still important for the mathematical educators because of its easy application in daily life. Despite the much more usage of word problems in basic mathematics books as an assessment, they are still difficult for many students. In this study, we examine how problem posing instruction affects the solving math word problems on the academic success in mathematics achievement. The students from 8th grades are selected randomly and divided into two groups as experimental and control groups and problem posing instruction is given to experimental group while the other group has instruction by traditionally. At the end of the research, the results indicate that the student in experimental group shows significance level of success according to Academic Success Test.

Key words: Problem posing instruction, Word problems and Academic success.

Introduction

Problem posing is central to the discipline of mathematics and the nature of mathematical thinking (Silver 1994). As an intellectual discipline,mathematics can be argued that the self directed problem posing to be solved is an important characteristic (Polya,1954). Mathematicians can solve some problems that are preapared by others or can solve some problems that have been ideintified as an important problems. But according to (Poincare ,1948) stated that the mathematicians should formulate their own problems based on thier personal experience and interests. Another important mathematians may be distinguished leaders in mathematics and mathematics education (Freudental,1973:Polya ,1954) have stated that problem posing is an important part of a student'smathematical experience. Curriculum and Evaluation Standars for School for Mathematics (NTCM,1989) expilictly states that "students should have some experince recognizing and formulating their own problems,an activity that is the heart of doing mathematics". It also states that importance duty of the mathematics teachers are to provide opportunities for students to pose their own problems: "Students should be given opportunities to formulate problems from given situations and create new problems by modifying the conditions of a given problem". The statements indicates that problem posing in mathematics teaching and learning is considered as an important factor in classroom activities. Despite the importance of problem posing as a form of mathematical activity and also its importance as an instructional activity ,there has been little systematic research on mathematical problem posing in a view of cognitive process in which students generate their own problems from a given situation or experience.

Lıterarure revıew

Actually the basis of problem solving along problem posing are costructeb by Polya (1953). Polya in his book "How to Solve it" states the attibutes of problem solving that includes four parts. First stage is understanding the problem in which you clearly understand what is unkonown ,What is date given and what is the condition to understand the problem. Second step is devising a plan to find the connection between data and the unknown . And Polya stated that "if you cant solve the proposed problem try to solve first some related problem. Could you imagine a more accessible related problem? A more special problem? An anologous problem" . In third stage ,the solver tries to cary out the plan by checking the conditions for each step. Finally ,looking back is the last step by checking the results,by checking the arguments,bey checking the methods.

Problem solving stages indicated by Polya is not different than problem posing stages and actually there is no differences between problem posing and problem solving. In their book The Art of Problem Posing (Brown and Walter ,1993) says that problem posing is deeply embedded in the activity of problem solving in two different ways. First of all,it is impossible to solve a new problem(s) without first reconstructing the task by posing new problems in the very process of solving. Second,it is frequently the cause that after we have supposedly solved a problem,we dont fully understand the significance of what we have done,unless we begin to generate and try to analyze a completeley new set of problems"

Brown and Walter (1993) suggested a new approach to problem posing and problem solving inmathematics teaching by using the "What If Not" (WIN) strategy. The strategy is based on the idea that modifying the attributes of a given problem could yield new and original problems that may gives very interesting results.In this approach ,the students are encouraged to go through three levels starting with the reaxaminig the problem to generate new problems. At the first level,the students are asked to write the list of the problem attributes.And at the second level the students should ask many questions about the attributes related "What If Not" question and then suggest alternatives to the listed attributes. The last level of problem posing ,they pose new questions by making more generalization.

Stoyanova (2000) identified three categories of problem posing experiences that can increase students' awareness of different situations to generate and solve mathematical problems 1.free situations 2.semi-structured situations and 3.structured problem –posing situations. In free problem posing situations students pose problems without any restriction. An example of the free problem posing situations . Are the tasks where students are encouraged to write problems for friends to solve or write information by giving it meaning or creating relations between provided information? Semi-structured and structured situations in which students are asked to generate problems from a presented stimulus that includes quantities information. Problem posing is also described by Dunker (1945) as the generation of a new problem or the formulation of a given problem.In the same meaning Silver (1993) described and added posing occurs before, after and during the problem solving.

Problem posing skills could be developed by giving students an ill-formulated or a partially formulated problem and asking them to restart it (Silver, Kilpatrick and Shlesinger, 1990).Although the idea is not new ,not much more work done on problem posing .Dillon(1988) and Krutetskii(1976) has the same way of manipulating the given conditions and the goals of prior posed problems. Hashimoto (1987) asking "What-if "and «What if not "and Brown Walter(1983):assuming new relationship of supply new story components during the looking back stages (Polya 1945).

Silver (1994) proposed that problem posing is important in some ways. First Problem posing increase creativity and provides exceptional mathematics abilility. Second,it improves students'problem solving ability. Third,it opens a window into students' understanding of

mathematics. Fourth,problem posing improves students'disposition towards mathematics and finally ,it heps the students how thy learn by themselves.

Brown and Walter stated that problem posing activities in mathematics not only enhance pupils'thinking but also enrich and consolidate their understanding related to mathematical concept and process.(English 1997;Brown&Walter,1993). Problem posing has a positive influence on students'ability to solve problems (Leung&Silver 1997) and it provides the opportunity for educators to get insight of students'understanding of mathematical concepts and processes (English,1997). Generaly ,English asserted that problem posing improves students'problem solving skills,attitudes and confidence in mathematics and mathematical problem solving,and contributes to a broader understanding about mathematical concepts.

Cunningham (2004) showed that providing students with the opportunity to pose problems anhanced students'reasoning and reflection.When students formulate their own problems ,it can foster the sense of ownership of the problems that results highly level of engagement and curiosity and enthusiasm towards the process of learning mathematics.

In this study ,word problems are selected as a tool for problem posing activities.Word problems have many synonymies that are application problems,verbal problems and story problems.Word problems have been used since Babylonian times (Friberg 1985) to develop learned mathematical skills and for much more practice.At all levels of classes through secondary schools use word problems.As an example:

The sum of the denominator and numerator of a fraction is 47. If 2 is subtracted from the denominator and 5 is added to numerator,the value of the fraction is 2/3, Find the fraction.

The aim of the problem is just used to make mathematical practice.And to make a relationship between sides.Word problems are also so common for all educational system that is why for all educators this is a common area to make research to give some aspects of mathematics learning (Reusser,1990).There are many studies that have focused on identifying difficulties encountered by students as they try to find the solutions for problems.

(Griffin&Jitendra,2009). Another important aspect of word problems inside the attemps done by students by reading comprehension and translate the questions in mathematical forms (Ansley&Forsyth,1990;Solvik 1999,Vilenius-Tuohimaa 2008). Linguistic factors that affect the solving of word problems are considered as relevant in the study of word problems (Abedi & Lord ,2001 ;Lager,2006; Reusser ,1990). Why did we select word problems for problem posing activities.Here also some answers:

First,these kind of problems have been found in real life with many situations.That's why students have chance to practice in everday life easily (Thorndike,1922).Lave (1992) stated that the tools of mathematics are very powerful but it depends the students who knows or not how they use them.In one way ,word problems are suitable to make application in real life.

If the practical area is large for students to make application what they learn in the class ,that is also good for problem posing.

Second, After finding the application for word problems,the students are motivated to study with word problems too much.They think that the word problems are not unuseful subjects that we learn and forget them but when we finish the school ,we will continue to use these of problems in the future.So motivation is another important factor why we select word problems for problem posing activities.

Third,For all educators ,especially for us ,to evaluate the intelligence of any kinds of mathematical ability for the students,we use word problems to understand the level of them ,because we prepare the students for the future and we direct them for coming occupational positions.

Fourth,by teaching the students word problems we extend their minds to think them creatively,to develop their problem solving abilities .By doing this ,the students race themselves by solving many problems and result of making more cognitive practice.

Aims of the study: The aim of the study can be described as follows:

1.To visualize the effect of problem posing instruction on the academic success on 8th grade students on solving word problems.

2.To direct the students to use problem posing methods during the solving math word problems.

3.To generate new problems from the existing ones for each student.

Problem of the study: What is the effect of problem posing instruction on 8th grade students'solving math word problems.

METHODOLOGY

The study is conducted by using Pre-Algebra book for 8th graders. The activities generally are prepared from this book for experimental group. There are 25 students in experimental group and 25 students for control group. Word problems are related with number and fractions ,age problems,work problems,percentage problems,mixture problems and motion problems.

Participants: Sample of the study includes 50 students from 8th grades.All students are randomly selected from the 8 classes and divided also equally according to mathematics scores from last semester. So initially the average of the classes is equal. With experimental group we solve the questions and pose the questions by the properties of problem posing methods discussed before. Control group students solved the questions by traditional way ,just teachet come to class and solve questions not discussing more the solutions.

Research Method:This research is an experimental design research. The model of research is post test control grouped experimental design. The experimental and control groups have equal average initially according to school mathematics marks from last semester. Our aim is to measure the academic achievement at the end of the study by controlling the results of Academic Success Test that is specially designed by experienced teahers from the head of Mathemtics department.

Academic Success Test: The test questions are prepared by experienced teachers that have been in the activities in both groups ,The test consisit of 18 questions from each of types of word problems suc as fractions ,age problems,work problems,percentage problems,mixture problems and motion problems. The questions are selected with the similar questions that have been found in Pre-Algebra 2 book .

Table 1.Some examples of Academic Success Test

1.The sum of half of a number and one-third of another is 22.The difference of half of the number and one sixth of the first number is 11.Find the numbers.

2. Bakıt and Nurlan can do a piece of work in $3\frac{3}{5}$ days. Bakıt alone can do the same work in 6 days. In how many days can Nurlan alone do the same work?

3. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; which one is false?

A) $\frac{a+b}{b}+\frac{c+d}{d}$ B) $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$ C) $\frac{a+2c}{b+2d}=\frac{c}{d}$

D) $\frac{5a+2c}{5b+2d}=\frac{b}{a}$ E) $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

Analysis of Data: To measure the result of the Academic Success test ,t test for independent groups are used.

Findings and interpretation

Group Statistics

	GROUPS	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
SCORES	EXPERIMANTAL	25	11.3200	2.24944	.44989
	CONROL	25	10.2000	1.60728	.32146

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
SCORES	Equal variances assumed	3.119	.084	2.026	48	.048	1.12000	.55293	.00826	2.23174
	Equal variances not assumed			2.026	43.439	.049	1.12000	.55293	.00523	2.23477

Conclusions

The instruction with problem posing on word problems is significiantly affects the problem posing and solving skills of the prospective mathematics teachers. The reason behind it the problem posing activites are given prospective teachers are increased their perpfprmance by having a chance to discuss every step of problems by teachers as well as themselves.The experimental group prospective teachers were better than control group prospective teachers in finding the missing or hidden information in a given problem and the contradictions of the problems. The results of post test scores favoring the experimental group students in all dimensions showed that instruction with problem posing also has a retention effect on understanding of a problem behavior.

The results also show that the abilities of prospective mathematics teachers were clearly developed in some dimensions such as rephrasing a problem (Polya,1957,1973), visualization of a problem (Garderen&Motague,2003: Polya,1957,1973). And qualitive reasoning bout a problem (Barlow& Gates,2006;Brown&Walter,1990;Schoenfeld,1985).

On the other hand control group students relied more on concrete or memeory images that usually led to the misunstanding of a problem. The groups are intersected in one area that was qualitative analysis because teacher oriented lessons generally based on the development of computational skills.

Our results are also agree with the Silver (1997) who asserts that problem posing oriented approach would be beneficial not only the students with high achievement and performance but also with the students who shows low achievement and low performances

1.Brown,S.I &Walter,M,I (1990). The art of problem posing(2nd ed.) Hillsdale,N,J:Lawrance Erlbaum Associates

2.Brown,S.I &Walter,M,I (1993). Problem posing:reflection and applications. Hillsdale,N,J:Lawrance Erlbaum Associates

3.Cai,J. (2003) .A perspective fot the examinig the link between Problem posing and Problem solving.
4.English,L.D. (2003) Problem posing in the elementary curriculum.In F.Lester &R.Charles Teaching mathematics through problem solving. Reston ,Virginia:National Council of Teachers of Mathematics.
5.Friere,P (1970).Pedagogy of the oppressed.New York:The Seubury Press.
6.Gonzales,N.A (1994). Problem posing:A nNeglected Component in Matmematics Courses For Prospective Elementary And Middle Scholl Teachers.
7.Kilpatrick,J (1987) Problem Formulating:Where do good problems come from?In A.H Schoenfeld (Ed). Cognitive science and mathematics education (pp.123-147). Hillsdale NJ:Erlbaum.
8.Lewis,T.Petrine,S&Hill,M.A (1998) Problem posing-Addind a creative increment toTechnological problem solving,Journal of Industrial Teacher Education(JITE) Volume 3.Number 1.
9.National Counsil of Teachers Of Mathematics (NTCM),(!(1988) Curriculum and evaluation standards for schoolmathematics,Reston,VA:National Council of Teachers of Mathematics.
10.Polya,G. (1954).Mathematics and plausible reasoning. Princeton University Press,NJ
11 Polya,G. (1957). How to solve it . Princeton University Press,NJ
12 Polya,G. (1973). : How to solve it :A new aspect of mathematical method (2nd ed.) Princeton University Press,NJ
13.Schoenfeld,A.H (1985).Mathematical problem solving .Orlando,FL:Academic Press.
14.Silver,E.A.(1994) On mathematical problem posing.For the learning of Mathematics.
15.Stoyanova ,E&Ellerton,N.F (1996). A framework for research into students'problem posing.In P.Clarkson (Ed). Technology in mathematics education (pp. 518-525). Melbourne:mathematics education research Group of Australaia.

УДК 517.946

Ж.Н. Тасмамбетов, Р.У. Жахина

ОБ УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(г.Актобе Актюбинский государственный университет им К.Жубанова)

Екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің бір арнайы жүйесінің шешімдерінің Томе қалыпты қатары түрінде болуы мүмкіндігі Фробениус-Латышева әдісін қолдана отырып анықталады. Үйлесімділік шарттары мен шешім түрі орнатылған. Мұндай шешімнің бар болуының бірінші және екінші қажетті шарттары алынған. Фробениус-Латышева әдісінің алгоритмі көрсетілген. Зерттеліп отырған жүйенің екінші ретті дербес туындылы бір теңдеумен байланысы қарастырылған.

Using method of Frobeniys-Latishev's is defined possibility of existence of the decisions in the manner of normal rows Tome's two variable one special system of the differential equations in quotient of the derived second order. Installed conditions of compatibility and type of the decisions. There are received first and second necessary conditions of existence of such decision. Algorithm of the method of Frobeniys-Latishev's is shown. Studied the relation ship of the under investigation systems with one equation in quotient of the derived second order.

Специальные функций и ортогональные многочлены двух переменных являются решениями специальных систем состоящих из двух дифференциальных уравнений в

частных производных второго порядка. Такие системы и их связь со специальными функциями двух переменных были изучены в работах Я.Горна, Ш.Эрмита, П.Аппеля и Кампе де Ферье, Г.Бейтмена и А.Эрдейи и др. Для построения решений этих систем были использованы различные методы. В данной работе для построения решений в виде нормальных рядов нами применен метод Фробениуса-Латышевой [1].

Постановка задачи. Допустим, что задана специальная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\begin{aligned}&\left(A^{(0)}\cdot x^2+a_{10}^{(0)}\cdot x+a_{01}^{(0)}\cdot y+a_{00}^{(0)}\right)\cdot Z_{xx}+\left(A^{(1)}\cdot xy+a_{10}^{(1)}\cdot x+a_{01}^{(1)}\cdot y+a_{00}^{(1)}\right)\cdot Z_{xy}+\\&\quad+\left(a_{10}^{(2)}\cdot x+a_{00}^{(2)}\right)\cdot Z_x+\left(a_{01}^{(3)}\cdot y+a_{00}^{(3)}\right)\cdot Z_y+a_{00}^{(4)}\cdot Z=0,\\&\left(A^{(2)}\cdot y^2+b_{10}^{(0)}\cdot x+b_{01}^{(0)}\cdot y+b_{00}^{(0)}\right)\cdot Z_{yy}+\left(A^{(3)}\cdot xy+b_{10}^{(1)}\cdot x+b_{01}^{(1)}\cdot y+b_{00}^{(1)}\right)\cdot Z_{xy}+\\&\quad+\left(b_{10}^{(2)}\cdot x+b_{00}^{(2)}\right)\cdot Z_x+\left(b_{01}^{(3)}\cdot y+b_{00}^{(3)}\right)\cdot Z_y+b_{00}^{(4)}\cdot Z=0,\end{aligned}\qquad(1)$$

где $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, $a_{ij}^{(k)}$ и $b_{ij}^{(k)}$ $(i=0,1;\ j=0,1;\ k=0,1,2,3,4)$ – некоторые постоянные, а $Z(x,y)$ – общая неизвестная. Заранее допускаем, что коэффициент системы (1) удовлетворяет некоторым условиям совместности [2], а также условию интегрируемости

$$1-\frac{A^{(1)}\cdot xy+a_{10}^{(1)}\cdot x+a_{01}^{(1)}\cdot y+a_{00}^{(1)}}{A^{(0)}\cdot x^2+a_{10}^{(0)}\cdot x+a_{01}^{(0)}\cdot y+a_{00}^{(0)}}\cdot\frac{A^{(3)}\cdot xy+b_{10}^{(1)}\cdot x+b_{01}^{(1)}\cdot y+b_{00}^{(1)}}{A^{(2)}\cdot y^2+b_{10}^{(0)}\cdot x+b_{01}^{(0)}\cdot y+b_{00}^{(0)}}\neq 0\qquad(2)$$

Изучаемая система интересна тем, что из неё при различных значениях коэффициентов $A^{(l)}$ $(l=0,1,2,3)$, $a_{ij}^{(k)}$ и $b_{ij}^{(k)}$ $(i=0,1;\ j=0,1;\ k=0,1,2,3,4)$ можно получить многие известные системы со списка Горна [3] и нормальные формы [4].

Поставим задачу: применяя метод Фробениуса-Латышевой определить возможности существования решений в виде нормальных рядов Томе двух переменных

$$Z=\exp Q(x,y)\cdot x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}A_{\mu,\nu}\cdot x^{-\mu}\cdot y^{-\nu}\qquad\left(A_{00}\neq 0\right)\qquad(3)$$

где $\rho,\sigma,A_{\mu,\nu}$ $(\mu,\nu=0,1,2,\ldots)$ – некоторые неизвестные постоянные, которые следует определить. Многочлен

$$Q(x,y)=\frac{\alpha_{p0}}{p}\cdot x^p+\frac{\alpha_{0p}}{p}\cdot y^p+\ldots+\alpha_{11}\cdot x\cdot y+\alpha_{10}\cdot x+\alpha_{01}\cdot y\qquad(4)$$

с неизвестными коэффициентами $\alpha_{p0},\alpha_{0p},\ldots,\alpha_{11},\alpha_{01}$ и α_{10}. Степень многочлена определяется понятием ранга $p=1+k$ (k – подранг). Понятие ранга для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений введен А.Пуанкаре (1886 г.) и обобщен на системы вида (1) Тасмамбетовым Ж.Н. [1]. Ранг составляется по наибольшим степеням независимых переменных и выбирается наибольшее из них:

$$1+\min_{(0\le\mu\le n-1)}\frac{\alpha_n-\alpha_0}{n-\mu}\le p_1\le 1+\max_{(1\le\mu\le n)}\frac{\alpha_\mu-\alpha_0}{\mu}\qquad(\text{по } x),$$

$$1+\min_{(0\le\nu\le n-1)}\frac{\beta_n-\beta_0}{n-\nu}\le p_2\le 1+\max_{(1\le\nu\le n)}\frac{\beta_\nu-\beta_0}{\nu}\qquad(\text{по } y).$$

Приведем алгоритм построения нормальных рядов Томе двух переменных (3):

Для построения решения вида (3) сначала определяется ранг $p = 1 + k$ системы (1). Если $p > 0$, то к системе (1) применяется преобразование

$$Z(x, y) = \exp Q(x, y) \cdot U(x, y) \tag{5}$$

Обычно, при этом задача распадается на два:

а) Определение вида определяющего множителя

$$\exp Q(x, y),$$

то есть нахождение неизвестных коэффициентов $\alpha_{p0}, \alpha_{0p}, ..., \alpha_{11}, \alpha_{01}$ и α_{10} многочлена двух переменных $Q(x, y)$.

Это приведет нас к первому необходимому условию существования формального решения вида (3) [5].

Теорема 1. Для того, чтобы вспомогательная система, полученная с помощью преобразования (5) из системы (1) имела хотя бы одно решение вида (3), необходимо, чтобы имели место равенства

$$b_{m0}^{(j)} = 0,\ b_{0m}^{(j)} = 0,\ b_{m-1,0}^{(j)} = 0,\ \ldots,\ b_{10}^{(j)} = 0,\ b_{00}^{(j)} = 0 \quad (j = 1, 2). \tag{6}$$

Левые части равенства (6) $b_{m0}^{(j)}$, $b_{0m}^{(j)}$, $b_{m-1,0}^{(j)}$, …, $b_{10}^{(j)}$ и $b_{00}^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ определяются приравниванием к нулю коэффициентов при наибольших степенях независимых переменных x и y. Из систем уравнений (6) находим неизвестных коэффициентов $\alpha_{p0}, \alpha_{0p}, ..., \alpha_{11}, \alpha_{01}, \alpha_{10}$.

б) Нахождение неизвестных постоянных ρ, σ и $A_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, ...)$.

Это позволяет определить вид решения вспомогательной системы

$$U(x, y) = x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} A_{\mu,\nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \qquad \left(A_{00} \neq 0\right) \tag{7}$$

Неизвестные постоянные ρ и σ находятся из системы определяющих уравнений вида

$$\begin{aligned} f_{00}^{(1)}(\rho, \sigma) &\equiv a_{00}^{(0)} \cdot \rho(\rho - 1) + a_{00}^{(1)} \cdot \rho\sigma + a_{00}^{(2)} \cdot \rho + a_{00}^{(3)} \cdot \sigma + a_{00}^{(4)} = 0, \\ f_{00}^{(2)}(\rho, \sigma) &\equiv b_{00}^{(0)} \cdot \sigma(\sigma - 1) + b_{00}^{(1)} \cdot \rho\sigma + b_{00}^{(2)} \cdot \rho + b_{00}^{(3)} \cdot \sigma + b_{00}^{(4)} = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $a_{00}^{(i)}$, $b_{00}^{(i)}$ $(i = \overline{0,4})$ известные постоянные. В конкретных системах, в зависимости от формы задания исходной системы (1) вид системы определяющих уравнений (8) меняются.

Неизвестные коэффициенты $A_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, ...)$ ряда (7) находятся из системы рекуррентных последовательностей

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} A_{\mu-m,\nu-n} \cdot f_{m,n}^{(j)}(\rho - \mu + m, \sigma - \nu + n) = 0 \qquad \left(m, n = 0, 1, 2, ...;\ \mu, \nu = 0, 1, 2, ...\right) \tag{9}$$

Сформулируем вторую необходимую условию существования формального решения вида (3).

Теорема 2. Для того, чтобы, вспомогательная система имела решения вида (7), необходимо, чтобы пара (ρ, σ) была корнем системы определяющих уравнений вида (8), где $f_{00}^{(j)}(\rho, \sigma)$ $(j = 1, 2)$ есть коэффициенты при наибольших степенях системы характеристических функций, полученной из вспомогательной системы путем подстановки вместо неизвестной $Z(x, y) = x^{\rho} \cdot y^{\sigma}$.

Теорема 3. Если системы характеристических уравнений (6) имеют только простые пары корней, то система (8) при положительном ранге $p>0$ и антиранге $m\le 0$ допускает четыре формальных решения вида (3).

Переходим к изучению системы (1), используя выше приведенный алгоритм применения метода Фробениуса-Латышевой. Для этой системы: ранг $p\le 0$ и антиранг $m\le 0$. Тогда, в формальном решении многочлен $Q(x,y)\equiv 0$. Остается определить вид решения (7).

В этом случае, на основании теоремы составляется система характеристических функций, подставляя в (1) вместо неизвестной $Z(x,y)=x^{\rho}\cdot y^{\sigma}$.

$$\begin{aligned}
Z_1\left[x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\right] &\equiv x^{\rho-2}\cdot y^{\sigma-1}\cdot\Big\{a_{00}^{(1)}\cdot\rho\cdot\sigma\cdot x+a_{00}^{(0)}\cdot\rho\cdot(\rho-1)\cdot y+\Big[a_{10}^{(0)}\cdot\rho(\rho-1)+\\
&+a_{01}^{(1)}\cdot\rho\sigma+a_{00}^{(2)}\cdot\rho\Big]\cdot xy+\Big[a_{10}^{(1)}\cdot\rho\sigma+a_{00}^{(3)}\cdot\sigma\Big]\cdot x^2+a_{01}^{(0)}\cdot\rho\cdot(\rho-1)\cdot y^2+\\
&+\Big[A^{(0)}\cdot\rho\cdot(\rho-1)+A^{(1)}\cdot\rho\sigma+a_{10}^{(2)}\cdot\rho+a_{01}^{(3)}\cdot\sigma+a_{00}^{(4)}\Big]\cdot x^2y\Big\},\\
Z_2\left[x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\right] &\equiv x^{\rho-1}\cdot y^{\sigma-2}\cdot\Big\{b_{00}^{(0)}\cdot\sigma\cdot(\sigma-1)\cdot x+b_{00}^{(1)}\cdot\rho\cdot\sigma\cdot y+\Big[b_{01}^{(0)}\cdot\sigma(\sigma-1)+\\
&+b_{10}^{(1)}\cdot\rho\sigma+b_{00}^{(3)}\cdot\sigma\Big]\cdot xy+b_{10}^{(0)}\cdot\sigma\cdot(\sigma-1)\cdot x^2+\Big[b_{00}^{(2)}\cdot\rho+b_{01}^{(1)}\cdot\rho\sigma\Big]\cdot y^2+\\
&+\Big[A^{(2)}\cdot\sigma\cdot(\sigma-1)+A^{(3)}\cdot\rho\sigma+b_{10}^{(2)}\cdot\rho+b_{01}^{(3)}\cdot\sigma+b_{00}^{(4)}\Big]\cdot xy^2\Big\}
\end{aligned}\tag{10}$$

Отсюда убеждаемся, что систему определяющих уравнений в общем случае найти не удается. Поэтому, будем искать подходящие случаи.

1. Пусть коэффициенты $a_{01}^{(0)}=0$ и $b_{10}^{(0)}=0$.

Тогда из (10) получим следующую систему характеристических функций

$$\begin{aligned}
Z_1\left[x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\right] &\equiv x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\Big\{\Big[A^{(0)}\cdot\rho\cdot(\rho-1)+A^{(1)}\cdot\rho\sigma+a_{10}^{(2)}\cdot\rho+a_{01}^{(3)}\cdot\sigma+a_{00}^{(4)}\Big]+\\
&+\frac{\Big[a_{10}^{(0)}\cdot\rho(\rho-1)+a_{01}^{(1)}\cdot\rho\sigma+a_{00}^{(2)}\cdot\rho\Big]}{x}+\frac{\Big[a_{10}^{(1)}\cdot\rho\sigma+a_{00}^{(3)}\cdot\sigma\Big]}{y}+\\
&+\frac{a_{00}^{(1)}\cdot\rho\sigma}{xy}+\frac{a_{00}^{(0)}\cdot\rho(\rho-1)}{x^2}\Big\},\\
Z_2\left[x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\right] &\equiv x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\Big\{\Big[A^{(2)}\cdot\sigma\cdot(\sigma-1)+A^{(3)}\cdot\rho\sigma+b_{10}^{(2)}\cdot\rho+b_{01}^{(3)}\cdot\sigma+b_{00}^{(4)}\Big]+\\
&+\frac{\Big[b_{01}^{(0)}\cdot\sigma(\sigma-1)+b_{10}^{(1)}\cdot\rho\sigma+b_{00}^{(3)}\cdot\sigma\Big]}{y}+\frac{\Big[b_{00}^{(2)}\cdot\rho+b_{01}^{(1)}\cdot\rho\sigma\Big]}{x}+\\
&+\frac{b_{00}^{(1)}\cdot\rho\sigma}{xy}+\frac{b_{00}^{(0)}\cdot\sigma(\sigma-1)}{y^2}\Big\}.
\end{aligned}\tag{11}$$

Интересующая нас система определяющих уравнений относительно особенности (∞,∞) имеет вид

$$\begin{aligned}
\varphi_{00}^{(1)}(\rho,\sigma) &\equiv A^{(0)}\cdot\rho(\rho-1)+A^{(1)}\cdot\rho\sigma+a_{10}^{(2)}\cdot\rho+a_{01}^{(3)}\cdot\sigma+a_{00}^{(4)}=0,\\
\varphi_{00}^{(2)}(\rho,\sigma) &\equiv A^{(2)}\cdot\sigma(\sigma-1)+A^{(3)}\cdot\rho\sigma+b_{10}^{(2)}\cdot\rho+b_{01}^{(3)}\cdot\sigma+b_{00}^{(4)}=0.
\end{aligned}\tag{12}$$

Известно, что система (12) имеет до четырех пар корней (ρ_i,σ_i) $(i=1,2,3,4)$ позволяющее определить до четырех решений вида (7) [5], где неизвестные

коэффициенты $A_{\mu,\nu}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,...)$ находятся путем составления системы рекуррентных последовательностей вида (9).

Систему характеристических функций (11) выбираем таким образом, чтобы выполнялись необходимые условия существования нормальных решений.

2. Допустим, что коэффициенты $a_{00}^{(0)} = a_{01}^{(0)} = 0$ и $b_{00}^{(0)} = b_{10}^{(0)} = 0$. Тогда система характеристических функций (11) принимает вид

$$\begin{aligned} Z_1\left[x^\rho \cdot y^\sigma\right] &\equiv x^\rho \cdot y^\sigma \cdot \left\{\left[A^{(0)} \cdot \rho \cdot (\rho-1) + A^{(1)} \cdot \rho\sigma + a_{10}^{(2)} \cdot \rho + a_{01}^{(3)} \cdot \sigma + a_{00}^{(4)}\right] + \right. \\ &\left. + \frac{\left[a_{10}^{(0)} \cdot \rho(\rho-1) + a_{01}^{(1)} \cdot \rho\sigma + a_{00}^{(2)} \cdot \rho\right]}{x} + \frac{\left[a_{10}^{(1)} \cdot \rho\sigma + a_{00}^{(3)} \cdot \sigma\right]}{y} + \frac{a_{00}^{(1)} \cdot \rho\sigma}{xy}\right\}, \\ Z_2\left[x^\rho \cdot y^\sigma\right] &\equiv x^\rho \cdot y^\sigma \cdot \left\{\left[A^{(2)} \cdot \sigma \cdot (\sigma-1) + A^{(3)} \cdot \rho\sigma + b_{10}^{(2)} \cdot \rho + b_{01}^{(3)} \cdot \sigma + b_{00}^{(4)}\right] + \right. \\ &\left. + \frac{\left[b_{00}^{(2)} \cdot \rho + b_{01}^{(1)} \cdot \rho\sigma\right]}{x} + \frac{\left[b_{01}^{(0)} \cdot \sigma(\sigma-1) + b_{10}^{(1)} \cdot \rho\sigma + b_{00}^{(3)} \cdot \sigma\right]}{y} + \frac{b_{00}^{(1)} \cdot \rho\sigma}{xy}\right\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Легко заметить, что система определяющих уравнений снова запишется в виде (12), а соответствующая исходная система имеет вид

$$\begin{aligned} &\left(A^{(0)} \cdot x^2 + a_{10}^{(0)} \cdot x\right) \cdot Z_{xx} + \left(A^{(1)} \cdot xy + a_{10}^{(1)} \cdot x + a_{01}^{(1)} \cdot y + a_{00}^{(1)}\right) \cdot Z_{xy} + \\ &\quad + \left(a_{10}^{(2)} \cdot x + a_{00}^{(2)}\right) \cdot Z_x + \left(a_{01}^{(3)} \cdot y + a_{00}^{(3)}\right) \cdot Z_y + a_{00}^{(4)} \cdot Z = 0, \\ &\left(A^{(2)} \cdot y^2 + b_{01}^{(0)} \cdot y\right) \cdot Z_{yy} + \left(A^{(3)} \cdot xy + b_{01}^{(1)} \cdot y + b_{10}^{(1)} \cdot x + b_{00}^{(1)}\right) \cdot Z_{xy} + \\ &\quad + \left(b_{10}^{(2)} \cdot x + b_{00}^{(2)}\right) \cdot Z_x + \left(b_{01}^{(3)} \cdot y + b_{00}^{(3)}\right) \cdot Z_y + b_{00}^{(4)} \cdot Z = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Связь изучаемых систем с одним уравнением в частных производных второго порядка. При конкретных значениях постоянных коэффициентов из системы (14) можно получить ранее известные системы П.Аппеля и Я.Горна, то есть её частные случаи охватывает обширный класс известных систем, решениями которых являются многие известные гипергеометрические функций и ортогональные многочлены двух переменных.

Действительно, система Аппеля (F_1) является наиболее изученным интересным частным случаем системы (14):

$$\begin{aligned} &x(1-x) \cdot Z_{xx} + y(1-x) \cdot Z_{xy} + \left[\gamma - (\alpha+\beta+1) \cdot x\right] \cdot Z_x - \beta \cdot y \cdot Z_y - \alpha \cdot \beta \cdot Z = 0, \\ &y(1-y) \cdot Z_{yy} + x(1-y) \cdot Z_{xy} + \left[\gamma - (\alpha+\beta'+1) \cdot y\right] \cdot Z_y - \beta' \cdot x \cdot Z_x - \alpha \cdot \beta' \cdot Z = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

где $\alpha, \beta, \beta', \gamma$ – некоторые постоянные.

Ранг системы $p \le 0$. Особенности системы определяются приравниванием к нулю коэффициентов при старших производных: $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$, $(1;1)$, $(\infty;0)$, $(0;\infty)$, $(1;\infty)$, $(\infty;1)$ и $(\infty;\infty)$.

В монографии П.Аппеля и Кампе де Ферье [6] приводится 60 решений этой системы построенных вблизи указанных особенностей. Эта работа продолжается до сих пор и в [7] доказана, что существует всего 120 решений этой системы. Я.Горн доказал, что существует всего 34 гипергеометрических систем двух переменных вида (F_1). Однако, для других систем поведение решений вблизи особенностей остается малоизученным. Кроме того, в (15) есть не учтенная особенность. Для того, чтобы эту особенность установить следует систему (15) привести к одному дифференциальному

уравнению в частных производных второго порядка методом, приведенным в [6]. Получается уравнение вида

$$B_0(x,y)\cdot\frac{d^3z}{dx^3}+B_1(x,y)\cdot\frac{d^2z}{dx^2}+B_2(x,y)\cdot\frac{dz}{dx}+B_3(x,y)\cdot Z=0, \qquad (16)$$

где

$$\begin{aligned}
&B_0(x,y)=x\cdot(1-x)\cdot(1-y),\\
&B_1(x,y)=(\gamma+1-\beta')\cdot(1-x)\cdot(y-x)+(\gamma-\alpha-\beta-2)\cdot x\cdot(y-x)-\\
&\qquad -(\beta+\beta'+1)\cdot x\cdot(1-x), \qquad (17)\\
&B_2(x,y)=(\beta+1)\cdot\left[(\alpha+\beta+\beta'+1-\gamma)\cdot x-\gamma\cdot(1-x)+(\beta'-\alpha-1)\cdot(y-x)\right],\\
&B_3(x,y)=\alpha\cdot\beta\cdot(\beta+1).
\end{aligned}$$

Фиксируя $y=y_0$, мы неизвестное $Z(x,y)$ представим как функцию $Z=Z(x,y_0)$. Тогда уравнение (16) представляет уравнение 3-го порядка относительно переменной x с коэффициентами вида (17). Обозначим наибольшие степени независимой переменной x через β_i $(i=0,1,2,3)$:

$\beta_0=3$ – наибольшая степень коэффициента $B_0(x,y)$,

$\beta_1=2$ – наибольшая степень коэффициента $B_1(x,y)$,

$\beta_2=1$ – наибольшая степень коэффициента $B_2(x,y)$,

$\beta_3=0$ – наибольшая степень коэффициента $B_3(x,y)$.

Для определения подранга коэффициентов уравнения (16) составляем разности:

$$k_1=\frac{\beta_1-\beta_0}{1}=\frac{2-3}{1}=-1,\quad k_2=\frac{\beta_2-\beta_0}{2}=\frac{1-3}{2}=-1,$$

$$k_3=\frac{\beta_3-\beta_0}{3}=\frac{0-3}{3}=-1. \qquad k_{\max}=-1.$$

Поэтому, ранг уравнения (16) равен $p_1=1+k_{\max}=1-1=0$. Выполняется условие $p\le 0$, то есть после приведения системы (15) к уравнению вида (16) ранг системы не меняется. Такие же рассуждения можно повторить и относительно переменной y и убедиться, что ранг системы (15) относительно переменной y также не меняется.

Определим особенности уравнения (16) приравнивая к нулю коэффициента

$$B_0(x,y)=x\cdot(1-x)\cdot(y-x)=0.$$

Отсюда убеждаемся, что уравнение (16) имеет особенности: $x=0$, $x=1$, $x=\infty$, $x=y$. Аналогично убеждаемся, что уравнение, составленное относительно переменной y также имеет особенности: $y=0$, $y=1$, $y=\infty$, $y=x$. Поэтому, ранее приведенным особенностям системы (15) добавляется также особенность $x=y$. Однако, непосредственное решение уравнения (16) осуществимо только при фиксированных значениях $y=y_0$ и в общем случае не облегчает изучение систем вида (15). Значит, следует искать другие методы исследования, и вернемся к системе (15).

Составляем систему характеристических функций

$$\begin{aligned}
Z_1\left[x^\rho\cdot y^\sigma\right]\equiv x^\rho\cdot y^\sigma\cdot\Big\{&-\left[\rho(\rho-1)+\rho\sigma+(\alpha+\beta+1)\cdot\rho+\beta\cdot\sigma+\alpha\beta\right]+\\
&+\frac{\rho(\rho-1)+\rho\sigma+\gamma\cdot\rho}{x}\Big\},\\
Z_2\left[x^\rho\cdot y^\sigma\right]\equiv x^\rho\cdot y^\sigma\cdot\{&-\left[\sigma(\sigma-1)+\rho\sigma+(\alpha+\beta'+1)\cdot\sigma+\beta'\cdot\rho+\alpha\beta'\right]+
\end{aligned}$$

$$+\frac{\sigma(\sigma-1)+\rho\sigma+\gamma\cdot\sigma}{y}\Bigg\}.$$

Система определяющих уравнений относительно особенности $(\infty;\infty)$ запишется в виде

$$\varphi^{(1)}(\rho,\sigma)\equiv-\left[\rho\cdot(\rho-1)+\rho\cdot\sigma+(\alpha+\beta+1)\cdot\rho+\beta\cdot\sigma+\alpha\cdot\beta\right]=0,$$
$$\varphi^{(2)}(\rho,\sigma)\equiv-\left[\sigma\cdot(\sigma-1)+\rho\cdot\sigma+(\alpha+\beta'+1)\cdot\sigma+\beta'\cdot\rho+\alpha\cdot\beta'\right]=0.$$

или

$$\begin{cases}\varphi^{(1)}(\rho,\sigma)\equiv(\rho+\beta)\cdot(\rho+\sigma+\alpha)=0,\\ \varphi^{(2)}(\rho,\sigma)\equiv(\sigma+\beta')\cdot(\rho+\sigma+\alpha)=0.\end{cases}\tag{18}$$

Легко убедиться, что система определяющих уравнений (18) относительно особенности имеет три пары корней: $(\rho_1;\sigma_1)=(-\beta;-\beta')$, $(\rho_1;\sigma_2)=(-\beta;\beta-\alpha)$, $(\rho_2;\sigma_1)=(\beta'-\alpha;-\beta')$.

Решение, соответствующее показателю $(\rho_1;\sigma_1)=(-\beta;-\beta')$ дает нормальное решение системы (15) вблизи особенности $(\infty;\infty)$:

$$Z_3=x^{-\beta}\cdot y^{-\beta'}\cdot F_1(\beta+\beta'+1-\gamma,\beta,\beta',\beta+\beta'+1-\alpha;\ \frac{1}{x},\frac{1}{y})=$$
$$=x^{-\beta}\cdot y^{-\beta'}\cdot\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\beta+\beta'+1-\gamma)_{m+n}\cdot(\beta)_m\cdot(\beta')_n}{(\beta+\beta'+1-\alpha)_{m+n}\cdot m!\cdot n!}\cdot x^{-m}\cdot y^{-n},\tag{19}$$

то есть получено решение вида (7) для конкретной системы (15) из класса гипергеометрических систем двух переменных.

С помощью понятия ранга, мы можем заранее установить, что решение (19) системы (15) сходящиеся.

Теорема 4. Для вспомогательной системы, полученной из исходной системы (1) с помощью преобразования, (15) необходимым и достаточным условием существования регулярного решения в виде обобщенного степенного ряда двух переменных (7) является выполнение условия: вблизи особенности $(\infty;\infty)$ подранг $k\le-1$ по обеим переменным x и y одновременно.

В нашем случае $p=1+k=1-1\le0$. И в нормальном решений (3) многочлен двух переменных $Q(x,y)\equiv0$. Получено регулярное вблизи особенности $(\infty;\infty)$ решение (19).

Таким образом, нами установлены два частного случая исходной системы (1), имеющие решения в виде нормальных рядов. Приведенный пример показывает, что эти исследования действительно связаны с исследованием специальных функций двух переменных. При этом применение метода Фробениуса-Латышевой позволяет установить ряд других систем, решениями которой являются специальные функций и ортогональные многочлены двух переменных. Однако, в случае иррегулярной особенности, существует именно решение вида (3) и получается расходящийся нормальный ряд.

1. Тасмамбетов Ж.Н. Нормальные решения специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с полиномиальными коэффициентами.// Автореферат дисс… Доктора физ.-мат. наук, Алматы, 2004.

2. Wilczynski E.J. Projective differential Geometry of Curves and Ruled surfaces. Leipzig: Leubner, 1906. - 120p.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М, 1965. - 294с.
4. Суетин П.К. Ортогональные многочлены по двум переменным. М: Наука, 1988. - 384с.
5. Тасмамбетов Ж.Н.,Тасмамбетова А.Ж. Необходимые условия существования решений систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // Труды Международной научной и научно-методической конференции. "Наука и образование-97", Шымкент, 1997. - с.180-186.
6. Appell P. and Kampe de Feriet M.J. Functions hypergeometriges of hyperspheriges Polynomes d'Hermite, Paris, Gauthier-Villars, 1926. - 434p.
7. Mourya D.P. On Appell's system of partial differential equation // Glas. Mate., 1969, V.4(24), p. 207-211.

УДК 517.958:536.2:621:791:631.31

Ф.С. Телгожаева

ПРИМЕНЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННОГО МЕТОДА В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

(г. Алматы, КазНУ имени аль-Фараби)

Мақалада өлшеуге мүмкін емес аймақ температурасын қалпына келтірудің кері есебі қарастырылған. Бұл есеп термомеханикалық электробайланысты деформациялау арқылы жер қыртысын өңдеуші машиналардың бөлшектерін қалпына келтіруде туындайды. Қойылған кері есеп тиімділік әдісі арқылы шешіледі. Оған сәйкес түйіндес есеп үшін градиент функционал жазылған. Жылуөткізгіштік коэффициентін анықтауда бөлшек күйін нақтылау үшін коэффициентті кері есеп шешілген. Тиімділеу әдісімен коэффициентті кері есеп шешімінің алгоритмі келтірілген.

In this paper we consider the inverse problem to restore the temperature in inaccessible for measurement. This problem arises when processing parts electric-thermo-mechanical deformation. The inverse problem is solved by the optimization method. Discharged functional gradient and the corresponding adjoint problem. To clarify the details of the state solved the inverse problem of determining the thermal conductivity. An algorithm for solving the inverse coefficient problem of optimization methods.

Оптимизационный метод определения температуры труднодоступной для измерения

Рассмотрим задачу определения температуры поверхности труднодоступной для измерения. Найти $T_{иск}(t)$ - из соотношений:

$$c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right),\quad 0<x<l,\quad 0<t<t_{\max}, \tag{1}$$

$$T\big|_{t=0}=T_0,\quad 0\le x\le l, \tag{2}$$

$$\lambda(x)\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0}=q_{изм}(t),\quad T\big|_{x=l}=T_{иск}(t),\quad 0<t<t_{\max}, \tag{3}$$

по известной дополнительной информации: $T(0,t;T_{иск})=T_{изм}(t),\quad 0<t<t_{\max}$.

Пусть $p(t)$ - приближенное решение обратной задачи. Рассмотрим функционал:

$$J(p) = \int_0^{t_{\max}} \left[T(0,t;p) - T_{изм}(t)\right]^2 dt . \quad (4)$$

Пусть известно приближение $p^{(n)}(t)$. Последующие приближения определим из:

$$p^{(n+1)}(t) = p^{(n)}(t) - \alpha_n \nabla J(p^{(n)}) . \quad (5)$$

Здесь: α_n - коэффициент спуска, который определяется из условия: $J(p^{(n)} - \alpha_n \nabla p(p^{(n)})) = \min_{\alpha>0} J(p^{(n)} - \alpha \nabla J(p))$, $\nabla J(p)$ - градиент функционала.

Получим формулы для градиента функционала, по аналогии как в работе [1]. Зададим приращения: $p + \delta p$, $\delta T(x,t) = T(x,t;p+\delta p) - T(x,t;p)$. Приращение функционала, имеет вид:

$$\Delta J(p) = 2\int_0^{t_{\max}} \left[T(0,t;p) - T_{изм}(t)\right]\delta T(0,t)dt + \left\|\delta T\right\|^2_{L_2(0,t_{\max})} .$$

Для приращения $\delta T(x,t)$ имеем следующую задачу:

$$c\frac{\partial}{\partial t}(\delta T) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial}{\partial x}(\delta T)\right), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < t_{\max} , \quad (6)$$

$$\delta T(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \quad (7)$$

$$\lambda(0)\frac{\partial}{\partial x}(\delta, T)\Big|_{x=0} = 0, \quad 0 < t \le t_{\max} , \quad (8)$$

$$\delta T(l,t) = \delta p, \quad 0 < t \le t_{\max} . \quad (9)$$

Далее умножим обе части уравнения (7) на функцию $\psi(x,t)$ и проинтегрируем по x от 0 до l, по t от 0 до $t_{\max}$, имеем:

$$\int_0^l \int_0^{t_{\max}} c\frac{\partial}{\partial t}(\delta T)\psi(x,t)dtdx = \int_0^{t_{\max}} \int_0^l \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial}{\partial x}\delta T\right)\cdot\psi(x,t)dxdt . \quad (10)$$

Обозначим левую часть через J_1, а правую часть через J_2, и применяя интегрирование по частям, получим выражение:

$$J_1 = \int_0^l \left[\delta T(x,t)\psi(x,t)\Big|_0^{t_{\max}} - \int_0^{t_{\max}} \delta T\frac{\partial\psi}{\partial t}dt\right]dx = \int_0^l \left[\delta T(x,t_{\max})\psi(x,t_{\max}) - \delta T(x,0)\psi(x,0) - \int_0^{t_{\max}} \delta T\frac{\partial\psi}{\partial t}dt\right]dx$$

Учитывая, условия (8) и полагая что:

$$\psi(x,t_{\max}) = 0 \quad (11)$$

получим: $J_1 = -\int_0^l \int_0^{t_{\max}} \delta T\frac{\partial\psi}{\partial t}dtdx$.

Далее проведем аналогичные выкладки для J_2. Учитывая условия (8), (9) и полагая:

$$\psi(l,t) = 0, \quad 0 < t < t_{\max} , \quad (12)$$

$$\lambda(x)\frac{\partial}{\partial x}\psi\Big|_{x=0} = 2\left[T(0,t:p) - f(t)\right], \quad 0 < t < t_{\max} , \quad (13)$$

соотношение для J_2, примет вид:

$$J_2 = \int_0^{t_{\max}} \left[-\delta p\lambda(l)\frac{\partial}{\partial x}\psi\Big|_{x=l} + 2\delta T(0,t)\cdot\right] + 2\delta T(0,t)\cdot\left[T(0,t;p) - T_{изм}(t)\right] + \int_0^{t_{\max}} \int_0^l \delta T\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx$$

В результате соотношение (10) примет вид:

$$-\int_0^l\int_0^{t_{\max}}\delta T\frac{\partial\psi}{\partial t}dtdx=\int_0^{t_{\max}}\int_0^l\delta T\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx+2\int_0^{t_{\max}}\delta T(0,t)\left[T(0,t;p)-T_{изм}(t)\right]dt-\int_0^{t_{\max}}\delta p\lambda(l)\frac{\partial}{\partial x}\psi\Big|_{x=l}dt$$

Полагая, что имеет место

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right),\quad 0<t<t_{\max},\quad 0<x<l,\tag{14}$$

получим, окончательно:

$$\nabla J(p)=\lambda(l)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t)\big|_{x=l},\tag{15}$$

где $\psi(x,t)$ - решения сопряженной задачи (11)-(14).

Алгоритм решения оптимизационной задачи выглядит так:

1^0 Зададим начальные приближение $p^{(0)}(t)$, и решим прямую задачу (1)-(3), получим $T^{(0)}(x,t;p^{(0)})$

2^0 Вычислим краевое условие (13) и решая сопряженную задачу получим $\psi^{(0)}(x,t;p^{(0)})$

3^0 Вычислим градиент функционал (15), получим $\nabla J(p^{(0)})(t)$.

4^0 Очередное приближение $p^{(n+1)}$, вычисляем по формуле (5)

5^0 Проверяем значение функционала (4). Если он достиг минимума, то задача решена.

Определение коэффициента теплопроводности

Для уточнения свойств детали после обработки с точки зрения практики, представляет интерес определения коэффициента теплопроводности.

Волновой процесс теплопереноса детали описывается с помощью уравнения гиперболического типа:

$$\rho\frac{\partial^2T}{\partial t^2}+c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda(x)}{c}\frac{\partial T}{\partial x}\right),\quad 0<x<l,\quad 0<t<t_{\max},\tag{16}$$

$$T(x,0)=\mu'(x),\quad \frac{\partial T}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\tag{17}$$

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0}=q,\quad T(l,t)=g(t).\tag{18}$$

где $\rho=c\tau_r$, c - удельная объемная теплоемкость, $\lambda(x)$ - коэффициент теплопроводности, T - температура.

Пусть относительно решения прямой задачи (16)-(18) известны дополнительная информация:

$$T(0,t)=f(t),\quad t\in[0,t_{\max}].\tag{19}$$

Обратная задача формулируется следующим образом: Найти функцию $a(x)=\dfrac{\lambda(x)}{c}$ из соотношении (16)-(18) по известной дополнительной информации (19).

Пусть $p=p(x)$ - приближенное решение обратной задачи. Рассмотрим функционал:

$$J(p)=\int_0^{t_{\max}}\left[T(0,t;p)-f\right]^2dt.$$

Получим алгоритм решения обратной коэффициентной задачи, как в работе [2].

Зададим приращения: $\delta p=\delta p(x),\quad \delta T=T(x,t;p+\delta p)-T(x,t;p)$.

Для приращения δT, получим задачу:

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\delta T)+\frac{\partial}{\partial t}(\delta T)=\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial}{\partial x}\delta T\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta p\frac{\partial}{\partial x}T\right),\quad 0<x<l,\quad 0<t\le t_{\max},\quad (20)$$

$$\delta T(x,0)=0,\ \left.\frac{\partial\delta T}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad (21)$$

$$-\lambda(x)\frac{\partial}{\partial x}(\delta T)\Big|_{x=0}=0,\quad \delta T(l,t)=\delta p.\quad (22)$$

Умножим обе части уравнения (20) на φ, и интегрируем по x от 0 до l и по t от 0 до $t_{\max}$, получим:

$$\int_0^{t_{\max}}\int_0^{l}\left[p\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\delta T)+\frac{\partial}{\partial t}(\delta T)\right]\varphi(x,t)dxdt=\int_0^{t_{\max}}\int_0^{l}\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial}{\partial x}\delta T\right)\varphi(x,t)dxdt+$$

$$+\int_0^{t_{\max}}\int_0^{l}\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta p\frac{\partial}{\partial x}T\right)\varphi(x,t)dxdt \quad (23)$$

Обозначим левую часть через J_1, а слагаемое правой части соотношения (23) через J_2, J_3, и используя формулу интегрирования по частям, проведем серию преобразовании по каждому в отдельности.

Учитывая условия (21), и полагая: $\varphi(x,t_{\max})=0,\quad \varphi_t(x,t)\big|_{t=t_{\max}}=0$. Получим:

$$J_1=\int_0^{l}\int_0^{t_{\max}}\delta T(x,t)\rho\varphi_{tt}(x,t)dtdx-\int_0^{l}\int_0^{t_{\max}}\delta T(x,t)\varphi_t(x,t)dtdx.\quad (24)$$

Преобразуем слагаемые правой части. Учитывая условия (22) и полагая

$$\varphi(0,t)=0,\quad p(l)\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=0}=2\left[T(0,t;p)-f\right]\quad (25)$$

получим:

$$J_2=2\int_0^{t_{\max}}\left[T(0,t;p)-f\right]dt+\int_0^{t_{\max}}\delta\rho(t)p(0)\left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=0}\right)dt+\int_0^{t_{\max}}\int_0^{l}\delta T\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi\right)dxdt$$

$$J_3=\int_0^{t_{\max}}\left[\delta p(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}T\right)\varphi(x,t)\Big|_0^{l}-\int_0^{l}\delta p(x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi\frac{\partial T}{\partial x}dx\right]dt$$

Подставляя выражения J_1, J_2, J_3 в исходные уравнения (23) и полагая, что

$$\rho\varphi_{tt}(x,t)-\varphi_t(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi\right)\quad 0<x<l,\quad 0<t<t_{\max}.$$

Получим:

$$\nabla J(a)=\int_0^{t_{\max}}\frac{\partial}{\partial x}\varphi\frac{\partial}{\partial x}Tdt.\quad (26)$$

Алгоритм определения коэффициента теплопроводности:

1^0 Задаем начальные приближении $p^{(0)}(t)$, решаем задачу (16)-(18), при получим $T^{(0)}(x,t;p^{(0)})$

2^0 Вычисляем краевые условия (25) и решаем сопряженную задачу находим $\varphi^{(0)}(x,t;p^{(0)})$

3^0 Вычисляем градиент по формуле (26)

4^0 Вычисляем методом наискорейшего спуска (5) очередное приближение

5^0 Проверяем значение функционала, если он не достиг минимума, то $p^{(0)}(x) = p^{(n)}(x)$ и переход к пункту 1, если достиг то 6^0

6^0 Принимаем за приближенное решение обратную задачу функцию: $p^{(n+1)}(x)$.

1. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. – М.: Наука, 1988. – 286 с.
2. Кабанихин С.И., Искаков К.Т. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. - Новосибирск, 2001. – 316 с.

УДК 517.958:536.2:621:791:631.31

Ф.С. Телгожаева

УСЛОВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

(*г. Алматы, КазНУ имени аль-Фараби*)

Мақалада гиперболо-параболалық теңдеулер үшін коэффициентті кері есеп қарастырылған. Кері есеп шешімінің шартты орнықты бағалауы алынған. Орнықтылықты зерттеу үшін бастапқы есеп екінші ретті интегралдық Вольтера теңдеулер жүйесіне келтірілген. Кіріс мәліметтеріне және кері есеп шешіміне нақтылық класстары енгізілген. Шартты орнықтылық бағалауы H^1 кеңістік нормасында алынған.

In this paper we consider the inverse coefficient problem for a hyperbolic-parabolic equation. Obtain a stability estimate for solving the inverse problem. To investigate the stability of the original problem is reduced to a system of integral equations of Volterra second kind. Introduced the class of the correctness of inverse problems and input data. Evaluation of the stability conditions obtained in H^1 normal space.

Сведение исходной задачи к системе интегральных уравнений

Рассмотрим обратную коэффициентную задачу. Найти $\lambda(z)$ из соотношении:

$$\rho\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(z)\frac{\partial T}{\partial z}\right),\quad 0<z<l,\quad 0\le t\le t_{\max}, \tag{1}$$

$$T\big|_{t=0}=\varphi_0(z),\quad \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad 0\le z\le l\ ,$$

$$\lambda(z)\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}=q_1(t),\quad T(l,t)=q_0(t),\quad 0<t<t_{\max}.$$

По известной дополнительной информаци: $T(0,t)=f(t)$.

Приведем уравнение (1) к удобному виду для исследования. Для этого введем замену:

$$x=\Theta(z)=\int_0^z\frac{d\xi}{c(\xi)};\quad c^2(z)=\frac{\lambda(z)}{\rho},\quad z=K(x),\ S(x)=\left[\frac{c(z)}{c(0)}\right]^{1/2};\quad U(x,t)=T(K(x),t)\cdot S(x),$$

$$a(x)=\frac{S''(x)}{S(x)}-2\left[\frac{S'}{S}\right]^2,\quad \rho_0=1/\rho.$$

Тогда уравнение (1) переходит в следующее:

$$U_{tt}=U_{xx}-a(x)U-\rho_0U_t,\quad 0<x<\Theta(l)=L,\quad 0<t<t_{\max}. \tag{2}$$

Начальные данные:

$$U\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad U_t\big|_{t=0}=0 \tag{3}$$

Краевые условия:

$$a(x)\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=0}=q_1(t),\ U(L,t)=g_1(t). \tag{4}$$

Пусть задана дополнительная информация:

$$U(0,t;a)=f_1(t) \tag{5}$$

Тогда обратная задача формулируется следующим образом: найти $a(x),\ U(x,t;a)$ из соотношений (2)-(4) по известной дополнительной информации (5).

Далее сведем обратную задачу к интегральной постановке. Нам необходимо получить интегральное уравнение относительно искомого коэффициента $a(x)$. Для этого приведем задачу (2)-(4) к виду:

$$v_{tt}=v_{xx}-a(x)v-\rho_0v_t,\quad 0<t<L,\quad 0<t<t_{\max} \tag{6}$$

$$v(x,0)=\varphi''(x)-a(x)\varphi(x),\quad u_t(x,0)=0 \tag{7}$$

$$a(0)\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=0}=Q(t) \tag{8}$$

$$v(L,t)=g(t) \tag{9}$$

$$v(0,t;a)=f_0(t) \tag{10}$$

Задача (6)-(10) получается из (2)-(5) если продифференцировать уравнение (6) дважды по t, и положить $v=U_{tt}$.

Приведем вывод условия (7). Имеем:

$$U_{xx}(x,0)=\varphi''(x),\quad (U_t)_{tt}=v_t\big|_{t=0}=0.$$

Тогда $(U_{tt})_{t=0}=(U_{xx})_{t=0}-a(x)U\big|_{t=0}-\rho v_t\big|_{t=0}$.

Учитывая приведенные выше соотношения, имеем:

$$v(x,0)=\varphi''(x)-a(x)\varphi(x).$$

Далее обозначим: $Q(t)=Q_1''(t),\quad g(t)=g_1''(t),\quad f_0(t)=f_1''(t)$. Запишем формулу Даламбера:

$$v(x,t)=F(x,t)+\frac{1}{2}\int_0^x\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}Pv\,d\tau d\xi,\quad (x,t)\in\Delta(T,0), \tag{11}$$

где: $F(x,t)=\frac{1}{2}\left[f_0(t+x)+f_0(t-x)\right],\quad \rho_0=1/\rho,\quad Pv=a(x)v+\rho_0v_t,$

$$\Delta(T,0)=\left\{(x,t),\quad 0\le x\le T,\quad -T+x\le t\le T-x\right\}.$$

Положим в (11) $t=0$ и воспользуемся условием (7). Получим:

$$a(x)\varphi(x)=\varphi''(x)-f_0(x)-\int_0^x\int_0^{x-\xi}Pv\,d\tau d\xi \tag{12}$$

Для упрощения изложения, положим $\varphi(x)=-1,\quad f(x)=[\varphi''(x)-f_0(x)]/\varphi(0)$, поскольку $\varphi(0)$ - это известные данные. Тогда (12) примет вид:

$$a(x) = f(x) + \int_0^x \int_0^{x-\xi} Pv\,d\tau d\xi .$$

Так как в операторе Pv присутствует производная функции v по t, продифференцируем (11) по t. Имеем:

$$v_t(x,t) = F_t(x,t) + \frac{1}{2}\int_0^x \left[Pv(\xi, t+z-\xi) - Pv(\xi, t-z+\xi)\right] d\xi$$

Таким образом, мы получим замкнутую систему интегральных уравнений. Запишем ее в виде:

$$v(x,t) = F(x,t) + \frac{1}{2}\int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} Pv\,d\tau d\xi, \quad (x,t) \in \Delta(T,0), \tag{13}$$

$$v_t(x,t) = F_t(x,t) + \frac{1}{2}\int_0^x \left[Pv(\xi, t+z-\xi) - Pv(\xi, t-z+\xi)\right] d\xi, \quad (x,t) \in \Delta(T,0), \tag{14}$$

$$a(x) = f(x) + \int_0^x \int_0^{x-\xi} Pv\,d\tau d\xi . \tag{15}$$

Перепишем систему полученных интегральных уравнений (13)-(15) в операторной форме:

$$Y = \Phi + A(Y). \tag{16}$$

Здесь: $Y(x,t) = (Y_1, Y_2, Y_3)^T$, $\Phi(z,t) = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)^T$, $A(Y) = (A_1(Y), A_2(Y), A_3(Y))^T$,

$$Y_1(x,t) = v(x,t), \quad Y_2(x,t) = v_t(x,t), \quad Y_3(x,t) = a(x),$$

$$\Phi_1(x,t) = F(x,t), \quad \Phi_2(x,t) = F_t(x,t), \quad \Phi_3(x,t) = f(x).$$

$$A_1(Y) = \frac{1}{2}\int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} PY(\xi,\tau)\,d\tau d\xi, \quad A_2(Y) = \frac{1}{2}\int_0^x \left[PY(\xi, t+z-\xi) - PY(\xi, t-z+\xi)\right] d\xi ,$$

$$A_3(Y) = \frac{1}{2}\int_0^x \int_0^{x-\xi} PY(\xi,\tau)\,d\tau d\xi .$$

Теперь формулировка обратной задачи выглядит так: по известному вектору $\Phi(x,t) = \left(F(x,t), F_t(x,t), f(x)\right)$ найти вектор $Y(x,t) = \left(v(x,t), v_t(x,t), a(x)\right)$ из системы интегральных уравнений (16).

Изучение устойчивости обратной коэффициентной задачи

Определим выражение $\sum(L, M_1, M_2, M_3, M_4, \rho, \Phi, \varphi_0, g, a_*)$ как класс решений обратной задачи. Например, $a(x) \in \sum(\cdot)$. Если $a(x)$ удовлетворяет условиям:

$$a(x) \in H_1(0,L) \cap C(0,L), \quad \|a\|_{H_1(0,L)} \le M, \quad 0 < a_* \le a(x), \quad x \in (0,L).$$

Определим $F(L, \nu, k_0)$ как класс исходных данных. Например, $f \in F(\cdot)$, если f удовлетворяет условиям:

$$f \in H_1(0,2L), \quad \|f\|_{H_1(0,2L)} \le \nu, \quad f(+0) = k_0 .$$

Предположим, что для $f^{(1)}, f^{(2)} \in F(\cdot)$ существуют $a^{(1)}, a^{(2)} \in \sum(\cdot)$, удовлетворяющие обратной задаче:

$$v_{tt}^{(i)}(x,t) = v_{xx}^{(i)} - pv^{(i)}, \quad (x,t) \in \Delta(T,0),$$

$$v^{(i)}(x,0) = a(x), \quad v_t^{(i)}\big|_{t=0} = 0,$$

$$a(0)\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0} = Q(t), \quad v(L,t) = g(t),$$

$$v^{(i)}(0,t;a) = f_0^{(i)}(t), \quad i = 1,2.$$

Здесь $Pv^{(i)} = a^{(i)}v^{(i)} + \rho_0 v_t^{(i)}$. Тогда замкнутая система (12) имеет вид:

$$Y^{(i)} = \Phi^{(i)} + A(Y^{(i)}), \quad i = 1,2 \ ,$$

$$Y^{(i)} = \left(Y_1^{(i)}, Y_2^{(i)}, Y_3^{(i)}\right)^T, \quad \Phi^{(i)} = \left(\Phi_1^{(i)}, \Phi_2^{(i)}, \Phi_3^{(i)}\right)^T,$$

$$Y_1^{(i)} = U^{(i)}(x,t) \quad Y_2^{(i)} = U_t^{(i)}(x,t), \quad Y_3^{(i)} = a^{(i)}(x),$$

$$\Phi_1^{(i)} = F^{(i)}(x,t) \quad \Phi_2^{(i)} = F_t^{(i)}(x,t), \quad \Phi_3^{(i)} = f^{(i)}(x),$$

$$A_1(Y^{(i)}) = \frac{1}{2}\int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} PY^{(i)}(\xi,\tau)d\tau d\xi \ ,$$

$$A_2(Y^{(i)} = \frac{1}{2}\int_0^x \left[PY^{(i)}(\xi, t+z-\xi)\right] - PY^{(i)}(\xi, t-z+\xi),$$

$$Y_1^{(i)} = U^{(i)}(x,t) \quad Y_2^{(i)} = U_t^{(i)}(x,t), \quad Y_3^{(i)} = a^{(i)}(x),$$

$$A_3(Y^{(i)}) = \int_0^x \int_0^{x-\xi} PY^{(i)}(\xi,\tau)d\tau d\xi \ .$$

Считаем, что $Y = \left(Y_1, Y_2, Y_3\right) \in L_2(\Delta(T,0))$, если $Y_1, Y_2 \in L_2(\Delta(T,0)), \quad Y_3 \in L_2(0,L)$. Определим скалярное произведение и норму:

$$< Y^{(1)}, Y^{(2)} >= \sum_{k=1}^{2} \int_0^l \int_0^{2l-z} Y_k^{(1)}(z,t) Y_k^{(2)}(z,t) dtdz + \int_0^L Y_k^{(1)} Y_k^{(2)}(z)dz \ , \qquad \left\|Y\right\|^2 =< Y, Y > .$$

Теорема: (об условной устойчивости) Предположим, что для $\Phi^{(i)} \in L_2(0,L), \quad i = 1,2$ существует $Y^{(i)} \in L_2(\Delta(T,0)), \quad i = 1,2$ как решение обратной задачи $Y^{(i)} = \Phi^{(i)} + A(Y^{(i)}) \quad i = 1,2$. Тогда:

$$\left\|Y^{(1)} - Y^{(2)}\right\|^2 \le C\left\|f^{(1)} - f^{(2)}\right\|^2_{H_1(0,2L)}$$

где:

$$C = \left[6l + 6\left(\frac{4}{c^2} + Y_*^4\right)\left(1 + 12Y_*^2 l\right)\right] \cdot \exp\left\{Y_*^2\left[24l + 8\left(\frac{4}{c^2} + Y_*^4\right)\left(1 + 36Y_*^2 l\right) + 6\Phi^2 + 8Y_*^4\right]\right\}$$

$$Y_* = \max\left\{\left\|Y^{(1)}\right\|, \left\|Y^{(2)}\right\|\right\}, \qquad \Phi_* = \left\|f^{(1)}\right\|_{H_1(0,2L)}.$$

Схема доказательства теоремы аналогично как в работе [1], полученной для изучения устойчивости решения обратной задачи акустики.

1. Кабанихин С.И., Искаков К.Т. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. - Новосибирск, 2001. – 316 с.

УДК 621.01

З.Г. Уалиев, А.Г. Петренко*, Д.А. Идрисова*

АНАЛИЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ НА ЭЛЕКТРОННО ВЫСИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

*(г.Алматы, КазНПУ имени Абая, *-магистрант)*

Берілген жұмыста жазық рычактың механизімдерге ЭЕМ арқылы анализ жасалынды. Механизімдерді базалық нүктелер жүйесі түрінде бейнелеудің ынғалы екендігі көрсетілген. Нәтижесінде аралас базалық нүктелер матрицасы алынды. Механизімдердің құрылымдарына және кинематикасына машиналық анализ жасалынды. Екінші сыныпты (класты) механизмдердің кинематикасына анализ жасау есептері шешілді.

In the given work the analysis of flat lever mechanisms on the COMPUTER is considered. More convenient I representation of mechanisms in the form of systems of base points. Matrixes of adjacent base points are as a result received, the machine analysis of structure and kinematics of mechanisms is carried out. The problem kinematics of the mechanism of the second class dares.

Автоматизация структурного анализа рычажных механизмов на ЭВМ более удобным является представление механизма в виде системы базовых точек, совпадающих с центрами кинематических пар и шатунными точками звеньев, на движение которых наложены связи. Число степеней свободы механизма, как системы базовых точек определяется по формуле:

$$W=2(m - m_c)- r_n \qquad (1)$$

Здесь т - число базовых точек механизма, тс - число базовых точек, связанных со стойкой, r_n - число поводков.

В стержневых механизмах часто встречается жесткое звено с тремя и более шарнирами, составляющее кинематическую пару с другими звеньями.

Трехшарнирное звено, эквивалентное системе из трех шарниров и трех поводков согласно (1) имеет степень свободы $W =2\times3 – 3=3$, что соответствует степени свободы твердого тела на плоскости.

Определим число поводков, которое *m* – угольный многоугольник обращает в одно жесткое звено и позволяет в структурной форме (1) учитывать *m*- шарнирное звено. Подставляя в (1) $m_c = 0$ и W = 3 имеем:

$$r_n = 2m -3 \qquad (2)$$

На рисунке 1 представлены примеры m (m =2,3,4,5) – шарнирных звеньев в виде структурно –Эквивалентной системы поводков (СЭСП).

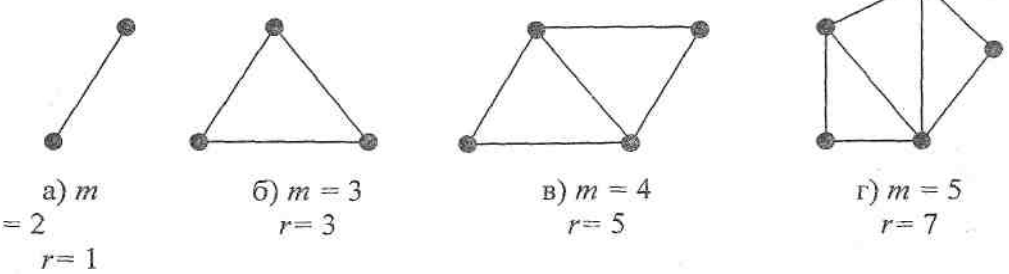


Рисунок 1. Различные варианты жестких звеньев m – угольников

Плоскому механизму, преобразованному в СЭСП, можно поставить в соответствие граф, m вершин которого соответствуют *m* БТ механизма. Для представления полученного графа в ЭВМ используется матрица, элементы которой заполняются согласно следующему логическому правилу:

а) элементы, соответствующие БТ, не связанным со стойкой, примем равными не единице, а длинам соответствующих поводков, т.е.

$$a_{jk} = a_{kj} = \begin{cases} i_{kj} - \text{если } j \text{ и } k \text{ связаны поводком} \\ 0 - \text{в противном случае по всем } (k,j)(1,2...,m) \end{cases}$$

б) матрица смежности вершин дополняется одной строкой и одним столбцом, элементы которых определяются как

$$a_{m+1,k}, a_{k+1} = \begin{cases} (x_k, y_k - \text{если } k\text{-ая соответсвует неподвижному шарниру} \\ (0,0) - \text{в противном случае где } k = \overline{1,m+1} \end{cases}$$

Полученную матрицу принято называть матрицей смежности базовых точек. На основе анализа элементов матрицы смежности БТ можно проводить машинный анализ структуры и кинематики механизма.

Двухповодковая группа

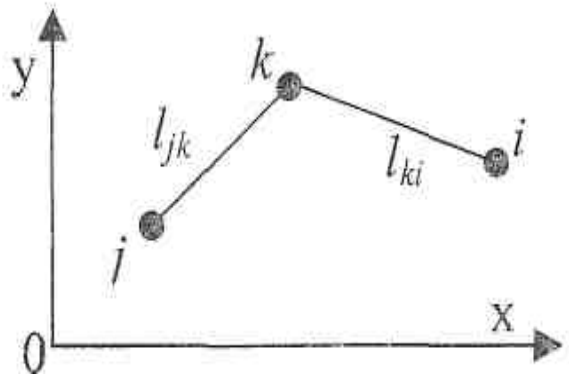


Рисунок 2

Кинематическая связь между {j}-ой {k}-ой БТ накладывается в виде длины поводка a_{jk} (рисунок 2) и уравнение связи записывается

$$(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 = l_{jk}^2 2$$

$$j,k = \{\overline{1,m}\} \qquad (3)$$

Число уравнений вида (3) равно числу поводков *г,,*. Если считать, что координаты m_c и ведущих шарниров *W* известными, то число неизвестных координат БТ механизма в (3) будет равно *2M,* где

$$M = m - m_c - W \qquad (4)$$

В группах Ассура II координаты внешних шарниров считаются заданными, неизвестными являются координаты одного внутреннего шарнира. Рассмотрим рисунок 2. Решение системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} (x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 = l_{jk}^2 2 \\ (x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 = l_{kj}^2 2 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

можно представить в виде:

$$(x_k)_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A};$$

$$(y_k)_{1,2} = a(x_k)_{1,2} + b \tag{6}$$

где

$$A=l+a^2 \quad B=a(y_j - b) \quad C = x_j + (y_j - b)^2 - j_{jk}^2 \tag{7}$$

$$a = \frac{x_j - x_j}{y_j - y_j};$$

$$b = \frac{j_{jk}^2 - j_{kj}^2 + x_j^2 - x_j^2 + y_j^2 + y_j^2}{2(y_j - y_j)};$$

$$y_i \neq y_i \tag{8}$$

При $y_i \neq y_i$; $x_i \neq x_i$ система разрешается относительно

$$(y_k)_{1,2} \neq x_i$$

При $y_i \neq y_i$; $x_i \neq x_i$ задача не имеет решения.

В случае наслоения нескольких групп Ассура в механизме II класса всегда найдется последовательность троек БТ такая, что неизвестными будут лишь координаты одной (средней из них).

Таким образом, задача анализа кинематики механизма II класса сводится к последовательному решению совокупности М систем из двух уравнений вида (5).

1. Теория машин и механизмов // Левитский Н.И. / М.: Наука, 1990. - 592 с.
2. Математическое моделирование динамики механизмов и машин *II* Джолдасбеков У.А., Молдабеков М.М., Уалиев Г.У./ Алматы: Казак университеті, 1998.- 230 с.
3. BorlandC++5 // П. Киммел / «ВНУ-Санкт-Петербург»,2001.- 970 стр.

УДК 621.039

К.С. Шадинова, Р.М. Муратханова, Ж.А. Кутелова, Ж. Танаткызы

ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ В КОНТЕКСТЕ С ПАТОЛОГИЕЙ ОРГАНИЗМА

(*г. Алматы, КазНПУ имени Абая*)

Жұмыста диагностикалық зерттеулерді жүргізуде айрықша үлесі бар ультрадыбыс тербелістерінің маңызды көрсеткіштері талданады. Физикалық параметрледің биологиялық нысандармен арадағы функционалдық байланысы қарастырылады. Сол үшін қажетті ультрадыбыстық құралдардың мағлұматтық тұрғыдан мүмкіндігі көбірек импульстық режимін пайдаланудың маңыздылығы дәлелденеді. Осы режимнің негізгі көрсеткіштеріне импульстардың қайталану жиілігі, ұзақтылығы, импульстың кеңістікте орын алатын қашықтығы жатады. Ультрадыбыстың таралу өрісінің тексерілетін нысан ішінде қалыптасу мәселесі де назардан тыс қалмайды.

Discusses the most promising in terms of diagnostic studies parameters of ultrasonic vibrations. Determined the functional relationship between the physical parameters with the parameters of a biological object.Justifies the need to use for diagnostic purposes is more informative - pulse mode ultrasonic devices. These parameters include the mode pulse repetition frequency, duration and spatial extent of the pulse. Equally important are the questions of formation of near-zone distribution of the ultrasonic field inside the investigation.

В условиях рыночных отношений многие медицинские организации, с целью привлечения клиентов на свою сторону, принимают все меры по улучшению уровня лечебных и диагностических услуг. Причиной оттока пациентов от традиционно действующих клинических учреждений в условиях повышенной заболеваемости населения особенно в зонах с неблагоприятной экологической обстановкой, является слабая их оснащенность современной диагностической техникой, а следовательно, и низкий процент выявления патологии в организме больного. Все это вынуждает специалистов искать новые пути решения данной проблемы. Одним из приоритетных направлений в этом плане являются поиск, разработка и внедрения новых инновационных технологий в лечебную практику. Следует отметить, что в системе здравоохранения эти технологии имеют разносторонний характер, прежде всего должны быть низко затратными и ресурсосберегающими. Только тогда можно обеспечить высокий уровень рентабельности лечебных организаций при высоком качестве оказываемых услуг. В этом плане большое будущее принадлежит ультразвуковым методам терапии и диагностики. Последние относятся к одной из наиболее развитых современных отраслей науки и техники и переживает достаточно бурный рост на стыке нескольких направлений, в том числе медицины, электроники, биоакустики и информационной технологии [1,2].

Ультразвуковые исследования основаны на взаимодействии упругих колебаний достаточно высокой частоты с биологическим объектом с последующим сбором информации из зоны интереса под различными углами. Получение информации можно разделить на два физических процесса – излучение ультразвуковых колебаний с внедрением в исследуемой объект и формирование акустического изображения в поле действия упругих волн. Поэтому освоение принципа действия ультразвуковых приборов и понимание физических основ метода ультразвуковых исследований являются решающим условием грамотной эксплуатации сложных диагностических средств на назначению и позволяет избежать бездумного их применения. Исходя из этого изложение учебных материалов, посвященных данному вопросу, должно базироваться на все -стороннем изучении физических свойств ультразвуковых колебаний, методов их получения, процессов и явлений, связанных с распространением и взаимодействием упругих волн с тканью человека. Прежде всего будущий специалист должен уяснить себе, что звук-это механическая продольная волна, в которой колебания частиц среды находятся в той же плоскости, что и направление распространения энергии. В месте с волной переносится энергия. Перенос энергии осуществляется за счет колебательных процессов материи, но при этом сама материя сохраняет свое присутствие, но не перемещается в месте с энергией. Таким образом, в отличие от электромагнитных волн для распространения звуковых волн обязательно нужна среда, в которой они распространяется с определенной скоростью.

Для описания любой волны используется ряд параметров, как частота, длина волны, скорость распространения, период, амплитуда, интенсивность и другие. Если частота, амплитуда, интенсивность колебаний определяются источником, то длина волны и скорость распространения зависит от акустических свойств среды. Скорость распространения звука прямо пропорциональна упругости (Е) и обратно пропорционально плотности (ρ) среды:

$$\vartheta_{зв} = \frac{E}{\rho};$$

Усредненная скорость ультразвука в тканях тела человека составляет 1540м/с. Именно на эту скорость рассчитываются все проектируемые ультразвуковые приборы диагностики. Другим не менее важным параметром среды является ее акустическое сопротивление Z, определяемое как произведение плотности среды ρ и скорости распространения звука в среде:

$$Z = \rho\vartheta_{зв}$$

В ультразвуковой диагностике вместо непрерывных колебаний обычно используются импульсные процессы, для описания которых привлекают такие дополнительные параметры, как частота повторения импульсов, длительность и пространственная протяженность импульса. Под пространственной протяженностью понимают длину пространства X_0, в котором размещается один ультразвуковой импульс (рисунок 1). Для определения пространственной протяженности ультразвукового импульса необходимо знать скорость его распространения в различных средах. Зная скорость распространения ультразвука в заданной среде, можно оценить и пространственную протяженность импульса ультразвука по формуле:

$$X_0 = \frac{cn}{f} = \lambda n$$

где c - скорость распространения ультразвука в среде;
f - частота ультразвуковых колебаний;
λ - длина волны ультразвука в среде.
n- число периодов колебаний в импульсе.

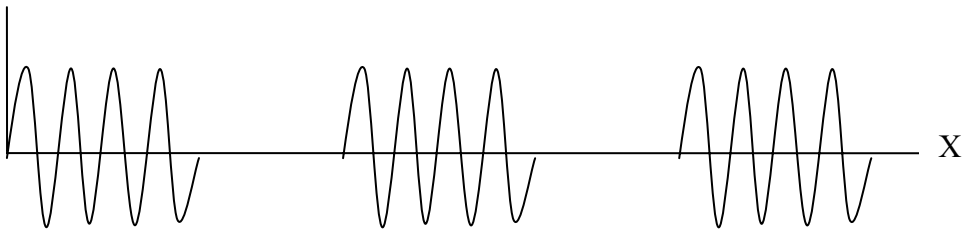


Рисунок 1. Протяженность ультразвукового импульса в пространстве.

На примере рисунка 1 при n=4, f=1 МГц для мягкой ткани, в которой скорость распространения ультразвука составляет с=1500м/с, пространственная протяженность достигает

$$X_0 = \frac{1500 \cdot 10^3 \cdot 4}{10^6 (Гц)} = 6мм$$

Простой дисковый ультразвуковой преобразователь в условиях непрерывного излучения формирует акустическое поле, изменяющееся с расстоянием от поверхности излучателя. Его можно распределить на ближнюю и дальнюю зоны (рисунок 2). В ближней зоне поле сужается вплоть до фокусного расстояния излучателя. Это расстояния зависит от диаметра излучателя и определяется отношением:

$$X_{\min} = \frac{D^2}{4\lambda},$$

где D- диаметр излучателя; λ - длина волны ультразвуковых колебаний.
За ближней зоной акустическое поле расширяется и образует дальнюю зону конусной формы. Ультразвуковую диагностику патологии организма с достаточно большой

точностью можно обеспечить при высокой степени фокусировки акустического поля. В этом случае говорят о разрешающей способности метода. Различают боковую и осевую разрешающую способности метода. Под боковой разрешающей способностью понимают минимальное расстояние между двумя ближайшими объектами, которые расположены вдоль направления распространения энергии ультразвука, и могут быть представлены на экране монитора как отдельные элементы. На осевую разрешающую способность влияет пространственная протяженность ультразвукового импульса, то есть чем короче импульс, тем выше разрешение по осевому направлению.

Рисунок 2. Формирование ближнего и дальнего поля
ультразвукового преобразователя.

Таким образом, на основе краткого анализа физических свойств ультразвуковых колебаний, применяемых для диагностических целей, удается установить аналитическую и логическую связь между параметрами акустического поля и исследуемого объекта. На основе этих данных в дальнейшем можно рассмотреть возможность сканирования акустическим полем с целью обнаружения глубоко расположенных патологических образований в организме.

1. Banjavic RA. Design and maintenance of a quality assurance for diagnostic ultrasound equipment. - Semin. Ultrasound -1983, 4. PP.10-26.
2. American Institute of Ultrasound in Medicine. AIUM Bioeffects Committee. - J. Ultrasound Med. - 1983, 2. PP. 14-16.

Работа выполнена под руководством профессора Мукашева К.М. при поддержке гранта ректора КазНПУ им. Абая по теме: «Исследование аномальных атмосферных явлений в контексте физики космических лучей».

УДК 517.956.3+519.642.5

Б.Б. Шолпанбаев

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА В ДВУМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

(*г.Алматы, КазНПУ имени Абая*)

In this article we consider the inverse coefficient problem for Maxwell's equations (wave version). To solve the inverse problem we use the method of linearisation. A numerical algorithm for solving direct and inverse problems for the geoelectric in linearized two-dimensional formulation is considered. We investigate the method of treatment difference schemes for solving the inverse problem. The algorithm can be applied for solving inverse problems for identifying archaeological sites.

Мақалада Максвелл теңдеулер жүйесінің(толқындық түрі) кері коэффициенттік түрі қарастырылады. Кері есепті шешуде линеаризация әдісі қолданылған. Линеаризацияланған екі өлшемді геэлектрика теңдеуінің тура және кері есептерін шешудің сандық алгоритмі қарастырылады. Кері есептерді шешудегі айырымдық

сүлбені түрлендіру әдісі қолданылуы келтірілген. Есептерді шешу алгоритмін археологиялық объектілерді анықтау кері есептерінде қолдануға болады.

1. Постановка задачи в двумерном случае

В данной работе мы рассмотрим прямую и обратную задачу геоэлектрики в двумерной постановке, сформулированной в работе [1].

В случае выбора источника возмущения и ряда предположении общая постановка задачи для системы уравнении Максвелла значительно упрощается и возможно применить метод линеаризации [2].

Для линеаризованной постановки обратной задачи подробно опишем численный метод её решения, с целью в дальнейшем применить в обратных задачах по определению археологических объектов не разрушая верхние структуры Земли.

Создание неразрушающих методов исследования структуры Земли, при поиске полезных ископаемых и различных объектов, составляет актуальную проблему отечественной и зарубежной практики. Такие исследования важны при изучении покрытии автодорог, аэродромов и других объектов в том числе археологических захоронении.

Рассмотрим один из простейших вариантов указанной задачи, когда источником стороннего тока является достаточно длинный кабель, расположенный по центру и протянутый вдоль по оси x_2. В этом случае, пренебрегая влиянием концов кабеля и боковых границ дороги, для компоненты E_2 вектора электрической напряженности имеем следующую задачу Коши[1]:

$$\mathrm{e}\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{t}^2}\mathrm{E}_2 + \mathrm{y}\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{E}_2 = \frac{1}{\mu}\Delta_{x_1x_3}E_2 - p(x_1)q(x_3)r'(t), \tag{1}$$

$$E_2\,|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}E_2\,|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

Здесь: ε, μ -диэлектрическая и магнитная проницаемость, σ -проводимость, $p(x_1)$ и $q(x_3)$ -функции, описывающие поперечные размеры источника.

$$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_{отн}, \qquad \varepsilon_0 = 8{,}85410^{-12}\frac{\Phi}{M},\ \mu = \mu_0\mu_{отн}, \quad \mu_0 = 1{,}25710^{-6}\frac{\Gamma}{M}, \quad \mu_{отн} = 1,$$

Таким образом, постановка прямой задачи состоит в следующем. По известным значениям функции $\varepsilon(x_1, x_3), \sigma(x_1, x_3)$ и положительной постоянной μ определить функцию E_2 как решение обобщенной задачи Коши из соотношений (1)-(2).

Пусть относительно решения прямой задачи (1)-(2) известна дополнительная информация в плоскости $x_3 = 0,$ вида:

$$E_2(x_1, 0, t) = f(x_1, t). \tag{3}$$

Обратные задачи в общем случае состоят в следующем:

Задача I. По известным значениям $\varepsilon(x_1, x_3)$, μ и дополнительной информации (3) определить $\sigma(x_1, x_3), E_2(x_1, x_3, t)$, из соотношении (1)-(2).

Задача II. По известным значениям $\sigma(x_1, x_3), \mu$ и дополнительной информации (3) определить $\varepsilon(x_1, x_3), E_2(x_1, x_3, t)$ из соотношении (1)-(2).

2. Метод линеаризации.

Для решения обратных задач, применим метод линеаризации. Метод линеаризации является одним из наиболее распространенных при исследовании обратных задач в случае, когда о решении обратной задачи известно, что оно мало отличается от некоторой заданной функции. Начиная с работы [2] метод линеаризации активно используется в теории обратных задач для гиперболических уравнении. Рассмотрим

задачу II для определения $\varepsilon(x_1, x_3)$ при $x_3 > 0$ в уравнении (1), полагаем что μ-const, а функция $\varepsilon(x_1, x_3)$ известна при $x_3 \le 0$. Функция $\sigma(x_1, x_3)$ считается всюду известной и достаточно гладкой [2].

Конкретизируем постановку прямой задачи. Предположим, что о решении прямой задачи:

$$\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_2 + \sigma \frac{\partial}{\partial t} E_2 + r_0 \delta(x_3, t) = \frac{1}{\mu} \Delta_{x_1 x_3} E_2, \tag{4}$$

$$x_1, x_3 \in R, \qquad t \ge 0$$

$$E_2\big|_{t<0} = 0 \tag{5}$$

известна следующая дополнительная информация:

$$E_2\Big|_{x_3=0} = f_1(x_1, t), \quad x_1 \in R, \qquad t \ge 0 \tag{6}$$

Так как все коэффициенты уравнения (4) при $x_3 \le 0$ известны, решаем при $x_3 \le 0$ прямую смешанную задачу (4) - (5), используя дополнительную информацию (5) как граничное условие. Тогда известна и частная производная функции $E_2(x_1, x_2, t)$ по x_3 при x_3=+0:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} E_2\Big|_{x_3=+0} = f_2(x_1, t), \qquad x_1 \in R, \qquad t \ge 0 \tag{7}$$

Полагаем, что $\varepsilon(x_1, x_3)$ имеет следующую структуру:

$$\varepsilon(x_1, x_3) = \varepsilon_0(x_3) + \varepsilon_1(x_1, x_3) \tag{8}$$

и функции $\varepsilon_0(x_3)$ и $\varepsilon_1(x_1, x_3)$ удовлетворяют условиям:

$$\varepsilon_0 \in C^3(R), \qquad \|\varepsilon_0\|_{C^2(R)} \le M_1, \qquad 0 < M_2 \le \varepsilon_0(x_3) \le M_3,$$
$$x_3 \in R; \qquad M_j = const, \qquad j = 1,2,3, \tag{9}$$

$$\sup\{\varepsilon(x_1, x_3)\} \subset (-D_1, D_1) * (0, h), \tag{10}$$

$$\varepsilon_1 \in C^2((-D_1, D_1) * (0, h))$$
$$\|\varepsilon_1\|_{C^2((-D_1, D_1)*(0,h))} << M_2 \tag{11}$$

Полагаем, что $\sigma(x_1, x_3)$ удовлетворяет условиям, аналогичным (8) - (10):

$$\sigma(x_1, x_3) = \sigma_0(x_3) + \sigma_1(x_1, x_3) \tag{12}$$

$$\sup\{\sigma_1\} \in (-D_1, D_1) * (0, h) \tag{13}$$

$$\sigma_1 \in C^2((-D_1, D_1) * (0, h)), \|\sigma_1\|_{C^2((-D_1, D_1)*(0,h))} << M_2 \tag{14}$$

Условия (9), (13) означают, что функции $\varepsilon_1(x_1, x_3)$ и $\sigma_1(x_1, x_3)$ тождественно равны нулю вне прямоугольника $(-D_1, D_1) * (0, h)$. Предположения относительного специального вида источника $r_0 \delta(x_3, t)$ и коэффициентов $\varepsilon(x_1, x_3)$ и $\sigma(x_1, x_3)$ позволяют линеаризовать прямую и обратную задачи, используя решение прямой одномерной задачи:

$$\varepsilon_0 u_{tt}^{(0)} + \sigma_0 u_t^{(0)} + r_0 \delta(x_3, t) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} u^{(0)}, \quad x_3 \in R, \quad t \ge 0 \tag{15}$$

$$u^{(0)}\big|_{t<0} \equiv 0. \tag{16}$$

Обозначим через T_h минимально возможное время, за которое возмущение, порожденное источником $r_0 \delta(x_3, t)$, при всех $x_1 \in R$ успеет достигнуть глубины $x_3 = h$

и вернутся обратно. Тогда при достаточно большом $D = D(D_1, T_h, h) > 0$ решение прямой задачи (4) - (5) для $t \in (0, T_h)$ не будет зависеть от x_1 при $|x_1| > D$, и, следовательно, будет совпадать с $u^{(0)}(x_3, t)$-решением прямой задачи (15) - (16). Функция $u^{(1)}(x_1, x_3, t) = E_{(2)}(x_1, x_3, t) - u^{(0)}(x_3, t)$ будет при $t \in (0, T_h)$ удовлетворять следующим соотношениям:

$$\varepsilon_0 u_{tt}^{(0)} + \varepsilon_1 u_{tt}^{(1)} + \varepsilon_1 u_{tt}^{(0)} + \sigma_1 u_t^{(0)} + \sigma_0 u_t^{(1)} + \sigma_1 u_t^{(0)} = \frac{1}{\mu} \Delta_{x_1 x_3} u^{(1)}. \tag{17}$$

Если в (17) отбросить произведение малых сомножителей $\varepsilon_1 u_{tt}^{(1)}$, и $\sigma_1 u_t^{(1)}$, то получим прямую линеаризованную задачу относительно $u(x_1, x_3, t) \approx u^{(1)}(x_1, x_3, t)$

$$\varepsilon_0 u_{tt} + \sigma_0 u_t = \frac{1}{\mu} \Delta_{x_1 x_3} u - \varepsilon_1 u_{tt}^{(0)} - \sigma_1 u_t^{(0)} \tag{18}$$

$$x_3 \in (0, h), \quad x_1 \in (-D, D), \quad t \in (0, T_h)$$

$$U\big|_{t<0} \equiv 0 \tag{19}$$

$$U\big|_{x_3=0} = f_1^{(1)}(x_1, t) \tag{20}$$

$$U\big|_{x_1=\pm D} = 0 \tag{21}$$

Здесь $f_1^{(1)}(x_1, t) = f_1(x_1, t) - u^{(0)}\big|_{x_3=0}$, Обозначим $f_2^{(1)}(x_1, t) = f_2(x_1, t) - u_{x_3}^{(0)}\big|_{x_3=0}$, и к соотношениям (18) - (21) в силу (7) добавим следующее:

$$u_{x_3}\big|_{x_3=0} = f_2^{(1)}(x_1, t) \tag{22}$$

Решение обратной задачи (4) - (6) в линейном приближении при $t \in (0, T_h)$, можно осуществить в следующем:

1) решаем обратную задачу определения $\varepsilon_0(x_3)$ из соотношений (15)-(16) с учетом дополнительной информации:

$$u^{(0)}\big|_{x_3=0} = f_1(x_1^0, t), \quad t \geq 0,$$

Здесь в качестве x_1^0 фиксированная точка, удовлетворяющую условию $|x_1^0| > D$;

2) решаем прямую задачу (15)-(16) на глубину h и находим $u_t^{(0)}, u_{tt}^{(0)}$;

3) решаем обратную задачу (18)-(22), т.е. задачу определения функции $\varepsilon(x_1, x_3)$ по известным $\varepsilon_0(x_3)$, $\sigma_0(x_3)$, $\sigma_1(x_1, x_3)$, $u_t^{(0)}$, $u_{tt}^{(0)}$.

По аналогичной схеме можно решать задачу отыскания $\varepsilon(x_1, x_3)$, если $\sigma_1(x_1, x_3)$ считать известной.

Приведем алгоритм решение линеаризованной двумерной обратной задачи (18)-(22). Перейдем к новым переменным:

$$z = \varphi(x_3), \quad y = x$$

и к новым функциям

$$w(y, z, t) = u^{(1)}(x_1, x_3, t), \quad p(y, z) = \frac{\varepsilon(x_1, x_3)}{\varepsilon_0(x_3)},$$

$$r(y, z) = \frac{\sigma_1(x_1, x_3)}{\varepsilon_0(x_3)}$$

В новых обозначениях обратная задача (18)-(22) имеем:

$$L_{(1)}w = -p(y,z)u_{tt} - r(y,z)u_t, \quad t \in R_+, \quad z \in R_+; \tag{23}$$

$$w\big|_{t=0} = 0, \quad w_t\big|_{t=0} = 0, \tag{24}$$

$$w\big|_{y=\pm D} = 0, \tag{25}$$

$$w\big|_{z=0} = f_1(y,t), \tag{26}$$

$$w_z\big|_{z=0} = f_2(y,t), \tag{27}$$

Здесь $L_{(1)}w = w_{tt} + aw_t - b^2 w_{yy} + \dfrac{b'(z)}{b(z)} w_z.$ Используя представление $u(z,t) = s(z)\theta(t - |z| + \tilde{u}(z,t))$, вычислим значение

$$\lim_{t \to z+0} w(z,y,t) = \frac{1}{4} s(z)\, p(y,z). \tag{28}$$

Таким образом, вместо обратной задачи (23) -(27) рассматривем обратную задачу для уравнения

$$L_{(1)}w = -p(y,z)u_{tt} - r(y,z)u_t, \quad t > z > 0, \tag{29}$$

с условиями на характеристической поверхности (28) и с граничными условиями (25)-(27).

Перейдем к описанию численного алгоритма построения. Разложим все входящие в (25) -(29) функции в ряды Фурье по системе функции $Y_k(y) = \exp\left\{\dfrac{ik\pi}{D} y\right\}$

$$w(y,z,t) = \sum_k w_{(k)}(z,t) Y_k(y), \tag{30}$$

$$p(y,z) = \sum_k p_{(k)}(z) Y_k(y), \tag{31}$$

$$r(y,z) = \sum_k r_{(k)}(z) Y_k(y), \tag{32}$$

$$f_j(y,t) = \sum_k f_{j(k)}(t) Y_k(y), \tag{33}$$

Учитывая, что a, b, u не зависят от у, подставляя в (25) -(29) вместо w, p, r, f_1, f_2 правые части равенств (30) -(33) и приравнивая коэффициенты при $Y_k(y)$ для каждого целого *k,* получим следующую систему обратных задач:

$$L^{(k)}_{(1)} w_{(k)} = -p_{(k)}(z)u_{tt} - r_{(k)}(z)u_t, \quad t > z > 0 \tag{34}$$

$$w_{(k)}\big|_{t=z} = \frac{1}{4} s(z)\, p_{(k)}(z), \tag{35}$$

$$w_{(k)}\big|_{z=0} = f_{1(k)}(t), \;\; w_{(k)z}\big|_{z=0} = f_{2(k)}(t), \tag{36}$$

Здесь $L^{(k)}_{(1)} w_{(k)} = w_{(k)tt} + aw_{(k)t} - w_{(k)zz} + b^2 k^2 w_{(k)} + \dfrac{b'}{b} w_{(k)z}.$

Согласно монографии [3] система обратных задач (34)- (36) образует регуляризирующее семейство по отношению к обратной задаче (23) -(29) в следующем: решая обратную задачу (34)- (36) для всех *k*, удовлетворяющих условию $|k| \le m$, построим функции $p_m(y,z)$

$$p_m(y,z) = \sum_{|k| \le m} p_{(k)}(z) Y_k(y), \tag{37}$$

такую, что при всех $z \in [0,T]$ (где *T*>0-произвольное фиксированное число из интервала $(0,T_h)$)

$$\lim_{m \to \infty} \| p(y,z) - p_m(y,z) \|_{L_2(-D,D)} = 0.$$

Для приближенного нахождения $p(y,z)$ достаточно решить обратную задачу (34)- (36) для всех k, не превосходящих по модулю некоторого натурального m. Фиксируем целое k и $T \in [0,T_h]$ и опишем способ нахождения $p_{(k)}(z)$ на основе метода обращения разностной схемы в области $\Delta(T) = \{(z,t):\ z \in (0,T),\ z < t < 2T - z\}$.

Пусть N –натуральное число, $h = T/N$, и всем известным функциям в (34)- (36) сопоставим их разностные аналоги

$$a_j = a(jh), \quad b_j = b(jh), \quad r_{(k)j} = r_{(k)}(jh), \quad s_j = s(jh),$$
$$u^n_{(1)j} = u_{tt}(jh,nh), \quad u^n_{(2)j} = u_t(jh,nh),$$
$$f^n_{i(k)} = f_{i(k)}(nh), \quad i = 1,2.$$

Неизвестным функциям $w_{(k)}(z,t), \quad p_{(k)}(z)$ сопоставим разностные аналоги $w^n_{(k)j}, \quad p_{(k)j}$, и напишем конечно-разностный аналог обратной задачи (34)- (36):

$$\frac{w^{m+1}_{(k)j} - 2w^m_{(k)j} + w^{m-1}_{(k)j}}{h^2} - \frac{w^m_{(k)j+1} - 2w^m_{(k)j} + w^m_{(k)j-1}}{h^2} + a_j \frac{w^{m+1}_{(k)j} - w^{m-1}_{(k)j}}{2h} + (b_j k)^2 w^m_{(k)j} +$$
$$+ \frac{b_{j+1} - b_{j-1}}{2hb_j} \frac{w^m_{(k)j+1} - w^m_{(k)j-1}}{2h} = -p_{(k)j} U^m_{(1)j} - r_{(k)j} U^m_{(2)j}; \tag{38}$$

$$w^m_{(k)0} = f^m_{1(k)}, \quad w^m_{(k)1} = f^m_{1(k)} + hf^m_{2(k)}; \tag{39}$$

$$w^j_{(k)j} = -\frac{1}{4} s_j p_{(k)j}. \tag{40}$$

Значения $w^j_{(k)j}$ при $j = 0, \ j = 1$ определяются из условии (39).

Если при всех $i: 0 \le i \le j, \quad w^j_{(k)j}$ уже найдено, то переход на слой с номером $i = j+1$ осуществляется с помощью (38). Но зная $w^j_{(k)j+1}$ находим $p_{(k)j+1}$ из (40)

$$p_{(k)j+1} = -4w^{j+1}_{(k)j+1} / s_{j+1}$$

Выше мы описали применение метода обращения разностных схем для решения обратной задачи, описанной в работе [2]. В настоящем для решения обратной задачи применим оптимизационный метод, достаточно подробно описанный в монографии [4]. Повторяя все выкладки из работы [4] [см. Глава 5] для нашего случая получим численный алгоритм решения обратной задачи (34)-(36).

1. Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи геоэлектрики. М.:Наука, 1991.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., О трех линеаризованных обратных задачах для гиперболических уравнений //Докл. АН СССР, 1966, Т.171, №6.
3. Кабанихин С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. Новосибирск.:Наука, 1988.
4. Кабанихин С.И., Искаков К.Т. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. Новосибирск.:РИЦ НГУ, 2001.

ҚҰРМЕТТІ ОҚЫРМАНДАР!

2005 жылы 09 маусым жұлдызындағы ҚР Білім және ғылым саласындағы қадағалау және аттестациялау Комитеттің №476 бұйрығымен диссертацияның негізгі ғылыми нәтижелерін жариялау үшін Абай атындағы ҚазҰПУ Хабаршы журналы келесі мамандықтар бойынша басылымдар Тізіміне енгізілгенін хабарлаймыз:

- 01.01.00 топ мамандықтары бойынша – физика-математика ғылымдары (математика);
- 01.02.00 (01.02.01, 01.02.04, 01.02.06) мамандқтары бойынша – физика-математика ғылымдары (механика);
- 05.00.00 (05.02.18) мамандықтары бойынша – техникалық ғылымдар;
- 13.00.00 (13.00.02) мамандықтары бойынша – педагогика (оқыту және тәрбиелеу теориясы мен әдістемесі /математика, физика, информатика/) ғылымдары;
- 01.04.00 топ мамандықтары бойынша - физика-математика ғылымдары (физика).

2009 жылдан бастап Инженириng және Технология Институтымен (Ұлыбритания) ақпараттық-қолдау қызмет көрсетуге жасалған келісім-шарттың (№2, 12.01.2009ж.) негізінде Абай атындағы ҚазҰПУ «Физика-математика сериясы» бойынша Хабаршы журналында жарияланатын мақалалардың рефератывті ақпараты INSPEC электронды мәліметтер қорына енгізіледі.

«ХАБАРШЫ. ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ҒЫЛЫМДАРЫ СЕРИЯСЫ» ЖУРНАЛЫНА БАСЫЛАТЫН МАҚАЛАЛАРДЫ БЕЗЕНДІРІЛУГЕ ҚОЙЫЛАТЫН ТАЛАПТАР

I. Қажетті материалдар

1.Парақтары төменгі жағында карандашпен нөмірленген мақаланың қатты көшірмесі (5 парақтан аспау керек);
2.Мақалаға жазылған қысқаша түйіндердің қатты көшірмесі (1 дана). Ағылшын тілінде жазылған андатпа міндетті түрде берілуі керек. Сонымен қатар, ағылшын тілінде жазылған мақаланың аты, автор (-лар) туралы мәліметтер: фамилиясы, аты, әкесінің аты, аббревиатурасыз (қысқартылмаған) жұмыс орыны беріледі ;
3 Мақаланың және мақалаға жазылған түйіннің электрондық түрі;
4.Автор (авторлар) жайында мәліметтердің қатты көшірмесі (1 дана): Ф.А.Ә. толығымен, жұмыс орны (ұжым аты, жоғары оқу орынның толық аты, және қысқартылған аты), атқаратын қызметі, жұмыс телефоны, үйдің мекен-жайы, үй телефоны, ғылыми дәрежесі, ғылыми атағы, e-mail.

II. Мақаланы безендіру ережесі

1.Мақала мәтіні Word 97, 2000, 2003 XP редакторында бір интервал арқылы терілу керек;
2.Парақ пішімі : 210 x 297 mm (A4);
3. Жоғары, төменгі, оң жақтағы, сол жақтағы бос өрістері: – 2,5 см;
4.Парақ беттері нөмірленбейді;
5.Шрифт: Times New Roman (қазақ, орыс, ағылшын тілдері үшін);
6. Мақала мәтіні ендігі бойынша формматталуы керек.

III. Формула жазуға қойылатын талаптар

Өлшемдері : Обычный – 11 пт, Крупный индекс – 6 пт, Мелкий индекс – 5 пт, Крупный символ – 24 пт, Мелкий символ – 4 пт (математикалық редактор $\sqrt{\alpha}$).

IV. Әдебиеттер тізімі, мақалада пайдаланылған әдебиеттер мәтінде пайдалану ретіне сәйкес қолжазбаның соңында келтіріледі. Мақаладағы әдебиетке сілтеу квадраттық жақшада беріледі, мысалы, [1], [2,3], [4-7].

V. Мақаланың түрі

1.Сол жақ жоғарғы бұрышта бас әріптермен ӘОК (кегль №13);
2.Жартылай қарайтылған кіші әріптермен (кегль №13) ортада автордың (авторлардың) фамилиясы және аты-жөні;
3.Бір бос жолдан кейін жартылай қарайтылған бас әріптермен (кегль №13) мақала аты;
4.Бір бос жолдан кейін дөңгелек жақшада автор (авторлар) жұмыс істейтін қала және ұжымның аты (кегль №11);
5. Бір бос жолдан кейін мақалаға әрбір тілде 5-7 сөйлемнен тұратын андатпа (егер мақала қазақ тілінде жазылса – андатпа орыс тілінде және ағылшын тілінде, мақала орыс тілінде жазылса – андатпа қазақ және ағылшын тілінде, мақала ағылшын тілінде жазылса – андатпа қазақ және орыс тілінде) (кегль №11) ;
6. Бір бос жолдан кейін мақала мәтіні (кегль №12);
7. Егер әдебиеттерге сілтемелер бар болса, онда мәтіннен кейін екі бос жол тастап (кегль №11) кіші әріптермен – пайдаланылатын әдебиеттер тізімі. Бірлік интервал.

VI. Мақалаларды жариялау тілдері – қазақ, орыс, ағылшын тілдері.

Редакцияға түскен мақалаларға білім саласы бойынша мамандар мен ғылымдар пікір береді. Пікір негізінде редакция алқасы авторға мақаланы тағы да толықтыруға (түзетуге) ұсыныс жасауы, не мүлдем қайтарып беруі мүмкін.

Мекен-жайы: Алматы қаласы, Төле би 86 көшесі, Абай атындағы ҚазҰПУ, физика-математика факультеті, жұмыс телефоны - **8(727) -2 61-15-76, e-mail Vestnik_KazNPU@mail.ru**

УВАЖАЕМЫЕ ЧИТАТЕЛИ!

Информируем Вас, что в соответствии с приказом Комитета по надзору и аттестации в сфере образования и науки МОН РК №476 от 09 июня 2005 года Вестник КазНПУ имени Абая входит в Перечень изданий для публикации основных научных результатов диссертаций по следующим позициям:

- по специальностям группы 01.01.00 – физико-математические науки (математика);
- по специальности 01.02.00 (01.02.01, 01.02.04, 01.02.06) – физико-математические науки (механика);
- по специальности 05.00.00 (05.02.18) – технические науки;
- по специальности 13.00.00 (13.00.02)–педагогические науки (теория и методика обучения и воспитания /математика, физика, информатика/);
- по специальностям группы 01.04.00 - физико-математические науки (физика).

С 2009 г. действует Договор с Институтом Инженеринга и Технологий (Великобритания), (№2 от 12.01.2009 г.) на оказание информационно-сопроводительных услуг, согласно которому реферативная информация о статьях, публикуемых в Вестнике КазНПУ имени Абая, вносится в электронную базу данных INSPEC.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ ПУБЛИКУЕМЫХ В ЖУРНАЛЕ «ВЕСТНИК. СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ»

I. Представление необходимых материалов

1.Статья в твердой копии с пронумерованными, внизу по центру карандашом, страницами (не более 5 страниц)

2.Краткие аннотации, к статье в твердой копии (1 экз.). Аннотация на английском языке составляется и приводится в обязательном порядке. Также указываются названия статьи, информация об авторе (-ах) на английском языке: Ф.И.О., места работы без аббревиатур (сокращений).

3 Статья и аннотации к статье в электронном виде.

4.Сведения об авторе (авторах) на твердой копии (1 экз.): Ф.И.О. полностью, место работы (название организации, вуза без сокращений и сокращенное название), должность, рабочий телефон, домашний адрес, домашний телефон, ученая степень, ученое звание, e-mail.

II. Правила оформления статей.

1.Текст статьи должен быть набран в word 97, 2000, 2003 XP через одинарный интервал;

2.Формат листа : 210 x 297 mm (A4);

3.Поля : верхнее, нижнее, правое, левое – 2,5 см;

4.Страницы статьи не нумеруются

5.Шрифт: Times New Roman (для каз., рус. и англ.языков);

6.Текст статьи должен быть отформатирован по ширине.

III. Требования к написанию формул

Размеры : Обычный – 11 пт, Крупный индекс – 6 пт, Мелкий индекс – 5 пт, Крупный символ – 24 пт, Мелкий символ – 4 пт (математ. редактор $\sqrt{\alpha}$)

IV. Список литературы, использованной в статье, составляется по ходу упоминания ее в тексте и приводится в конце рукописи. Ссылки в тексте на литературу даются в квадратных скобках, например, [1], [2,3], [4-7].

V. Вид статьи

1.УДК в левом верхнем углу прописными буквами (кегль №13);

2.Полужирным строчными буквами (кегль №13) по центру инициалы и фамилия автора (авторов);

3.Через пустую строку полужирным прописными буквами (кегль №13) название статьи;

4.Через пустую строку в круглых скобках, город и название организации, где работает автор (авторы) (кегль №11);

5. Через пустую строку аннотации в 5-7 предложениях на каждом языках (если статья написана на казахском языке, то аннотация на русском и английском языках, если статья написана на русском языке – аннотация на казахском и английском языках, если статья написана на английском языке – аннотация на казахском и русском языках) (кегль №11);

6.Через пустую строку текст статьи (кегль №12);

7.Если есть ссылки на источники, то после текста статьи, через две пустые строки строчными буквами (кегль №11) – перечень используемой литературы. Интервал - одинарный

VI. Языки издания (вещания) статей – казахский, русский, английский.

Поступившие в редакцию статьи рецензируются ведущими специалистами и учеными по отраслям знаний. На основании рецензии редколлегия может рекомендовать автору доработать статью или отказать в публикации.

Адрес: г.Алматы, ул.Толе би 86, КазНПУ им.Абая, Физико-математический факультет

рабочий телефон 8(727) -2 61-15-76, e-mail Vestnik_KazNPU@mail.ru