Казахский национальный педагогический университет имени Абая

УДК 37.016.02:512(574) На правах рукописи

НУРБАЕВА ДИЛАРА МУРАТОВНА

Методические особенности обучения курсу алгебры в школе и педагогическом вузе

6D010900 – Математика

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Научные консультанты:
Абылкасымова Алма Есимбековна,
доктор педагогических наук, профессор,
член-корреспондент НАН РК

Туяков Есенкельды Алыбаевич,
кандидат педагогических наук, доцент

Смирнов Владимир Алексеевич,
доктор физико-математических наук,
профессор МПГУ

Республика Казахстан
Алматы, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

В настоящей диссертации использованы ссылки на следующие стандарты:

Закон Республики Казахстан «Об образовании»: принят 27 июля 2007 года, № 319-III (с изменениями и дополнениями по состоянию на 11.07.2017 г.).

Государственная программа развития образования и науки Республики Казахстан на 2016-2019 годы // Указ Президента Республики Казахстан от 1 марта 2016 года, № 205.

Послание Президента Республики Казахстан – Лидера нации Н.А.Назарбаева народу Казахстана. Стратегия «Казахстан-2050»: новый политический курс состоявшегося государства. – Астана, 14.12.2012 г.

Послание Президента Республики Казахстан – Лидера нации Н.А.Назарбаева народу Казахстана «Третья модернизация Казахстана: глобальная конкурентоспособность». – Астана, 31.01.2017 г.

Государственный общеобязательный стандарт среднего образования (начального, основного среднего, общего среднего образования) // утвержден Постановлением Правительства Республики Казахстан от 23 августа 2012 года №1080.

Государственный общеобязательный стандарт высшего образования // утвержден Постановлением Правительства Республики Казахстан от 23 августа 2012 года №1080.

Типовые учебные программы по общеобразовательным предметам, курсам по выбору и факультативам для общеобразовательных организаций // утверждены приказом Министра образования и науки Республики Казахстан от 3 апреля 2013 года №115.

Типовая учебная программа по учебному предмету «Алгебра» для 7-9 классов уровня основного среднего образования по обновленному содержанию // Приложение 10 к приказу и.о. Министра образования и науки Республики Казахстан от 25 октября 2017 года, №545.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

КазНПУ им. Абая – Казахский национальный педагогический университет имени Абая

Вуз – высшее учебное заведение

Педвуз – педагогическое высшее учебное заведение

ЕНТ – единое национальное тестирование

СНГ – Содружество Независимых Государств

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Интенсивное внедрение инновационных технологий и новых подходов к обучению в отечественную систему школьного образования, а также функционирование в республике различных типов организаций общего среднего образования требуют соответствующей модернизации и в вузовской системе образования, в особенности в педагогических вузах [1].

Для подготовки высококвалифицированных педагогических кадров, в частности учителей математики, немаловажное значение имеет качество математических знаний вчерашних школьников, нынешних первокурсников, поступивших на образовательную специальность «5В010900 – Математика». То, насколько глубоко и прочно овладевают выпускники средних школ основами математики, в какой степени у них выработана и сформирована самостоятельная учебно-познавательная деятельность, в значительной степени предопределяет успешность их обучения и в вузе.

Согласно Государственному общеобязательному стандарту среднего образования (начального, основного среднего, общего среднего образования), утвержденному постановлением Правительства Республики Казахстан за №1080 от 23 августа 2012 года, с седьмого по девятый классы основной школы изучается учебный предмет «Алгебра», а в старшей школе, с десятого по одиннадцатый классы – «Алгебра и начала анализа» [2]. Таким образом, алгебра занимает важное и значительное место в системе школьного математического образования.

В соответствии с Государственной программой развития образования и науки Республики Казахстан на 2016-2019 гг. в настоящее время идет процесс обновления содержания среднего образования, которое направлено на обучение и развитие творческой, критически мыслящей личности, умеющей применять полученные знания в жизни, способной к непрерывному самосовершенствованию и самореализации в будущей профессиональной деятельности [3].

Главное место в курсе алгебры занимает вопрос о решении уравнений. Так, при изучении курса математики в 5-6 классах, учащиеся обучаются решению линейных уравнений с одной и двумя неизвестными и их систем. Далее, в курсе алгебры школьники обучаются решению квадратных уравнений с одной неизвестной и частному типу уравнений четвертой степени, которые сводятся к квадратным (биквадратные уравнения). Дальнейшее изучение уравнений происходит в курсе высшей алгебры, который делится на два больших раздела. Один раздел – это основы линейной алгебры, в содержание которой входит решение произвольных систем уравнений первой степени, то есть линейных уравнений. Во второй раздел входит алгебра многочленов, где рассматриваются уравнения произвольной степени от одного неизвестного. Причем, в алгебре многочленов важен не поиск корней уравнения, а вопрос об их существовании.

Вузовский курс алгебры характеризуется высоким уровнем абстракции, строгой научностью изложения, а также множеством теоретических выкладок, для изучения которого требуется соответствующий уровень подготовки обучающихся. В Казахском национальном педагогическом университете имени Абая в образовательной программе специальности «5В010900 – Математика» дисциплины «Алгебра-1» и «Алгебра-2» являются компонентами по выбору из цикла базовых дисциплин. На их изучение отводится по 2 кредита (90 часов), то есть 15 часов лекций, 15 часов практических занятий, 30 часов самостоятельной работы студента под руководством преподавателя (СРСП) и 30 часов самостоятельной работы студента (СРС). Обучение указанным дисциплинам запланировано по образовательной программе на первом курсе (1, 2 семестры). Первокурсники, имеющие разный уровень математических знаний, неподготовленные к самостоятельной учебно-познавательной деятельности, затрудняются в восприятии учебного материала. Кроме того, содержание курса алгебры в педвузе направлено на углубление только теоретических знаний обучающихся и слабо скоррелировано с содержанием школьного курса, что нарушает принципы непрерывности и преемственности в обучении.

Рассмотрение в единстве содержательного и процессуального аспектов преемственности в системе «школа-педвуз-школа» позволяет обеспечить взаимосвязь между уровнями современной системы образования, а также способствует повышению качества математических знаний школьников и формированию готовности выпускников педагогического вуза к профессии учителя математики.

Все это приводит к изысканию и разработке новых подходов к обучению курсу алгебры и рассмотрению возможности применения в учебном процессе общедоступных компьютерных программ таких, как, например, GeoGebra. Также, необходим пересмотр образовательных программ педагогических специальностей вузов, который должен быть нацелен на обеспечение преемственности с обновленным содержанием среднего образования и усиление методической подготовки будущих учителей математики.

Отбор содержания курса алгебры для подготовки будущих учителей математики следует производить, ориентируясь на формирование методических умений обучающихся в процессе его изучения, которые необходимы им в будущей профессиональной деятельности.

Все вышесказанное обусловило актуальность и выбор темы данного исследования.

Цель исследования – разработка методики обучения курсу алгебры в школе и педагогическом вузе.

Объектом исследования является процесс обучения курсу алгебры в школе и педагогическом вузе.

Предмет исследования – методические подходы к обучению курсу алгебры учащихся и будущих учителей математики.

Гипотеза исследования: эффективность обучения курсу алгебры в школе и педвузе повысится, если: отобрать содержание вузовского курса алгебры, имеющее практическую направленность для будущих учителей математики; выделить методические особенности обучения курсу алгебры, основанные на принципе преемственности в обучении; разработать и внедрить в учебный процесс методику обучения курсу алгебры, включающую применение компьютерной программы GeoGebra.

Исходя из цели и гипотезы исследования, были поставлены следующие **задачи исследования**:

- проанализировать современное состояние и тенденции развития методики обучения курсу алгебры в школе и педагогическом вузе;
- исследовать преемственность между содержанием, методами, формами обучения курсу алгебры в школе и педвузе;
- выявить методические особенности обучения курсу алгебры в школе и педвузе;
- разработать методику организации обучения курсу алгебры учащихся и будущих учителей математики;
- проверить эффективность разработанной методики обучения курсу алгебры в школе и педагогическом вузе.

Для решения поставленных задач использовались следующие **методы исследования**: проведение теоретического анализа научно-теоретических проблем, направленных на обучение курсу алгебры, а также философской, психологической, педагогической, методической и математической литературы на основе общеобязательных стандартов образования, учебных программ, учебников, учебных пособий и учебно-методических комплексов по алгебре; проведение педагогического эксперимента для проверки гипотезы исследования и обработка его результатов; обсуждение результатов исследования на методических семинарах и научно-практических конференциях.

Теоретическую основу исследования составили философские, психологические, педагогические, методические и математические работы по проблеме исследования, труды психологов, педагогов и специалистов в области теории и методики обучения математике.

Источники исследования: закон «Об образовании» Республики Казахстан; государственная программа развития образования и науки Республики Казахстан на 2016-2019 гг.; Государственный общеобязательный стандарт среднего образования (начального, основного среднего, общего среднего образования) Республики Казахстан; учебные программы, учебники, учебно-методические комплексы; философские, психологические, педагогические, методические труды по проблемам воспитания и обучения математике.

Этапы исследования. В соответствии с целями и задачами исследовательская работа проводилась в три этапа.

На первом этапе (2014-2015 гг.) осуществлялось изучение и анализ научной, учебно-методической и педагогической литературы по проблеме исследования, содержания типовых учебных программ по учебным предметам «Алгебра» и «Алгебра и начала анализа», образовательных программ педагогических вузов, изучалось состояние исследуемой проблемы в практике общеобразовательных школ и педвузов, проводился констатирующий эксперимент.

На втором этапе (2015-2016 гг.) выявлены основные методические подходы к обучению курсу алгебры в средней школе и педвузе, разработана методика организации обучения курсу алгебры, проводился формирующий эксперимент.

На третьем этапе (2016-2017 гг.) проводился обучающий эксперимент с целью проверки эффективности предлагаемой методики организации обучения алгебре, были обобщены результаты, полученные в ходе теоретического и экспериментального исследования.

Новизна исследования:

1. Отобрано содержание курса алгебры, направленное на подготовку будущих учителей математики в педвузе.

2. Выявлены методические особенности обучения курсу алгебры в школе и педвузе в условиях обновления содержания школьного образования.

3. Разработана методика организации обучения курсу алгебры в школе и педагогическом вузе с применением компьютерной программы GeoGebra.

Теоретическая значимость исследования состоит в следующем: произведен отбор содержания курса алгебры в педвузе, позволяющий улучшить методическую подготовку будущего учителя математики; выявлены методические подходы обучения курсу алгебры в школе и педвузе.

Практическая значимость исследования заключается в том, что предложены содержание и формы проведения занятий по учебным дисциплинам «Алгебра-1» и «Алгебра-2» для педвузов и даны методические рекомендации по применению компьютерной программы GeoGebra в процессе обучения курсу алгебры в школе и педвузе. Результаты исследования могут быть использованы при совершенствовании содержания и методов обучения курсу алгебры как в средней школе, так и в педвузе при подготовке будущих учителей математики.

Положения, выносимые на защиту:

1. Результаты анализа современного состояния обучения курсу алгебры в общеобразовательной школе и педагогическом вузе.

2. Методические особенности обучения курсу алгебры в школе и педагогическом вузе в условиях обновления содержания школьного образования.

3. Методика организации обучения курсу алгебры в современной школе и педагогическом вузе.

4. Экспериментальное обоснование эффективности разработанной методики обучения курсу алгебры в школе и педвузе.

Личный вклад автора в исследуемую проблему заключается в самостоятельном выполнении работы на основе изучения научной и учебно-методической литературы, в теоретическом и практическом обосновании основных идей и положений диссертационного исследования, в разработке методики преподавания курса алгебры для школы и педвуза с применением компьютерной программы GeoGebra, а также в проведении опытно-экспериментальной работы.

Апробация практических результатов. Положения и результаты диссертационной работы обсуждены на международных научно-практических конференциях: «Актуальные проблемы преподавания математики в школе и педвузе» (Москва, 2015 год), «Радиационно-термические явления и инновационные технологии» (Алматы, 2015 год), «Актуальные проблемы обучения математике в школе и вузе в свете идей Л.С. Выготского» (Москва, 2016 год), «Математическое моделирование механических систем и физических процессов» (Алматы, 2016 год), «Цифровое образование – передовые знания и компетентность» в рамках духовного возрождения» (Аркалык, 2018 год), а также на научно-методических семинарах и заседаниях кафедры методики преподавания математики, физики и информатики института математики, физики и информатики Казахского национального педагогического университета имени Абая.

Публикации по результатам исследования. По материалам диссертационной работы опубликовано 10 печатных работ, из которых 1 – в журнале, входящем в базу данных Scopus, 4 – в изданиях, рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки Республики Казахстан, 4 – в сборниках материалов международных конференций в стране и за рубежом, 1 – в российском научном журнале.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух разделов, заключения, списка использованной литературы и приложений.

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, определены цель исследования, объект, предмет, задачи, методологические и теоретические основы и гипотеза исследования; сформулированы научная новизна, теоретическая и практическая значимость исследования; определены этапы и методы проведенного исследования, положения, выносимые на защиту, сведения об апробации и внедрении результатов исследования.

В первом разделе «Современное состояние курса алгебры в общеобразовательной школе и педагогическом вузе» проанализировано содержание курса алгебры в школе и педвузе, описаны проблемы, возникающие у учащихся и студентов при обучении данному курсу, исследованы вопросы преемственности в обучении. В работе раскрыта методика обучения курсу алгебры учащихся в современной общеобразовательной школе и будущих учителей математики в педагогическом вузе, на примере Казахского национального педагогического университета имени Абая. Рассмотрены методы, типы и формы проведения традиционных уроков в школе, а также уроков, проводимых по обновленному содержанию, и учебных занятий в вузе.

Во втором разделе «Практическая реализация методики обучения курсу алгебры в школе и педагогическом вузе» предложены методические рекомендации по методике организации обучения курсу алгебры в современной школе и педагогическом вузе, рассматривается возможность использования на уроках алгебры методов обучения, подразумевающих активную деятельность учащихся и направленных на развитие самостоятельной и исследовательской работы, приведены примеры использования компьютерной программы GeoGebra в учебном процессе школ и педвузов. Произведен отбор содержания дисциплин «Алгебра-1» и «Алгебра-2», нацеленный на улучшение методической подготовки будущих учителей математики. Обобщены, систематизированы и обработаны результаты проведенной экспериментальной работы.

В заключении сформулированы основные теоретические и практические выводы, полученные нами в ходе исследования.

В список использованной литературы включена философская, психологическая, педагогическая, методическая и специальная литература, проанализированная в ходе исследования.

В приложении приведены примеры теоретических и практических заданий, контрольные работы, которые предлагались учащимся и студентам в процессе обучения курсу алгебры, разработки лекционных и практических занятий вводного раздела дисциплины «Алгебра-1» и статистическая обработка результатов проведенной экспериментальной работы.

1 СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ И ПЕДАГОГИЧЕСКОМ ВУЗЕ

1.1 Анализ содержания школьного и вузовского курсов алгебры

На протяжении многих десятилетий и до настоящего времени была и остается актуальной проблема преподавания математики в школах и вузах не только в Казахстане, но и в странах СНГ. В своих исследованиях такие известные ученые, как Антипов И.Н., Боковнев О.А., Виленкин Н.Я., Гусев В.А., Данилов М.А., Колягин Ю.М., Короткова Л.М., Луканкин Г.Л., Мордкович А.Г. и другие рассматривали аспекты отбора содержания математического образования.

Проблеме «базового образования», как образования, полученного в результате окончания основной школы, понятие которого было введено в последнее десятилетие XX века, были посвящены работы Глейзера Г.Д., Гусева В.А., Дорофеева Г.В., Кутузова В.Ф., Метельского Н.В., Савинцевой Н.В., Саранцева Г.И., Смирновой И.М., Ткачевой М.В., Фирсова В.В. и др. В работах этих авторов были затронуты вопросы дифференциации процесса обучения.

В исследованиях таких видных ученых математиков и методистов, как Андронов И.К., Болтянский В.Г., Брадис В.М., Глейзер Г.Д., Колмогоров А.Н., Столяр А.А., Тихонов А.Н., Хинчин А.Я., Яковлев Г.Н. и др., предлагается система различных вариантов повышения качества математического образования и на этой основе разрабатываются соответствующие методические подходы.

Вопросы подготовки квалифицированного учителя математики рассматривались в трудах таких ученых-методистов, как Абылкасымова А.Е., Бабанский Ю.К., Бекбоев И.Б., Добрица В.П., Ильина Т.А., Кагазбаева А.К., Сластенин В.А. и др.

Несмотря на большое количество проведенных исследований, вопрос повышения качества методической подготовки будущих учителей математики в процессе их обучения курсу алгебры в педагогическом вузе остается востребованным и актуальным.

Как известно, к нормативно-правовому обеспечению системы образования относятся: Государственный общеобязательный стандарт образования, типовой учебный план и типовые учебные программы. Оно постоянно совершенствуется и обновляется в соответствии с современными требованиями социального общества. С 2016-2017 учебного года в систему школьного образования внедряется обновление содержания образования, требующее пересмотра и корректировки методики обучения школьным предметам.

Современная школа претерпевает такие изменения, как смена общих принципов и стиля управления, рост разнообразия учебников и пособий, изменение требований к результатам образования и оценке качества подготовки обучающихся. Происходит интенсивное становление новых организационных форм образования, особенно на старшей ступени школы: старшая школа может постепенно выделиться в отдельный тип организации образования, так называемую профильную школу; развиваются сетевые формы получения образования, экстернат, дистанционные технологии – все это говорит о необходимости пересмотра требований к подготовке педагогических кадров для осуществления своей профессиональной деятельности в общеобразовательной школе [4].

На протяжении всего существования человечества математика всегда была востребована, поскольку успешность индивидуума в социуме, умение ориентироваться в постоянно меняющемся информационном мире, требует быстрого, правильного, логичного принятия решений, для чего и нужно изучение математики [5].

Практическая значимость курса математики обусловлена тем, что ее объектом изучения являются пространственные формы и количественные отношения действительного мира. Математическая подготовка необходима для понимания принципов устройства и использования современной техники, восприятия научных и технических понятий и идей. С помощью математики моделируются, изучаются и прогнозируются многие явления и процессы, происходящие в природе и обществе.

Изучение математики, в частности алгебры, вносит определяющий вклад в умственное развитие человека. В арсенал приемов и методов человеческого мышления естественным образом включаются индукция и дедукция, обобщение и конкретизация, анализ и синтез, классификация и систематизация, абстрагирование, аналогия. Объекты математических умозаключений и правила их конструирования вскрывают механизм логических построений, вырабатывают умения формулировать, обосновывать и доказывать суждения, тем самым развивают логическое мышление. Ведущую роль играет алгебра в формировании алгоритмического мышления, воспитании умений действовать по заданному алгоритму и конструировать новые. В ходе изучения алгебры систематично и последовательно формируются навыки умственного труда – планирование своей работы, поиск рациональных путей ее выполнения, критическая оценка результатов. В ходе решения алгебраических задач развиваются творческая и прикладная стороны мышления.

Школьный курс алгебры является пререквизитом не только математических курсов в педагогических вузах, но и обеспечивает обучающихся знаниями и умениями в других сферах образовательной деятельности, ввиду межпредметных связей алгебры с другими дисциплинами.

Передача знаний и опыта всех предшествующих поколений, синтезированных в различных научных дисциплинах, молодому поколению, безусловно, важна для развития человеческого общества. Часть математических знаний для обязательного изучения в школе, которая дает представление школьникам о науке – математике в целом и помогает овладевать математическими методами и способствует развитию математического мышления, должна быть тщательно отобрана опытом последних поколений. Изменение содержания учебного предмета математики обусловлено следующими причинами:

1. Ввиду развития общества и его потребностей расширяются цели обучения и появляются новые требования к школьной подготовке, что оказывает влияние не только на определение содержания математического образования, но и на уровень овладения математическими знаниями, умениями и навыками, устанавливаемыми учебной программой.

2. Необходимость обновления содержания учебного предмета влечет сокращение устаревших и потерявших прикладную ценность и познавательность определенных тем и разделов, вследствие чего они заменяются новыми теориями, соответствующими современным взглядам и установкам.

3. Возможность более раннего изучения некоторого материала из содержания учебного предмета определяется тенденцией к усилению общего развития учащихся в процессе обучения.

4. Развитие педагогических наук, совершенствование методик обучения, внедрение инноваций в школу повышают доступность и эффективность обучения школьников [6].

В этой связи очень важно следить за постоянным развитием современного мира, за введением инноваций в различные сферы жизнедеятельности общества, которые несомненно влияют на формирование требований к содержанию математического образования.

Главными содержательными линиями школьного курса математики являются: множество чисел и операции над ними; величины и их измерения; выражения и их преобразования; функции, их свойства и графики; уравнения и неравенства, их системы; геометрические фигуры, их свойства и измерения величин; элементы математического анализа; элементы математической статистики и теории вероятностей [7].

Базовое содержание школьного курса математики, построенное по этим линиям с учетом преемственности и непрерывности образования, изучается в учебных предметах: математика (1-6 классы), алгебра (7-9 классы), геометрия (7-11 классы), алгебра и начала анализа (10-11 классы).

Реализация целей математического образования обеспечивается усвоением необходимого объема знаний всеми учащимися через обучение математике. При этом содержание образования должно:

- способствовать продуктивной математической деятельности учащихся (интеллектуальная составляющая);
- организовать усвоение всеми учащимися программных знаний по математике ввиду условий уровневой и профильной подготовки учащихся и индивидуализации обучения (организующая составляющая);
- создать условия заинтересованности учащихся в изучении математики на каждом этапе обучения (познавательная составляющая);
- раскрыть способности учащихся с целью правильного выбора учебного профиля и будущей специальности (контрольно-прогнозирующая составляющая);
- обеспечить возможность связи с другими школьными предметами (межпредметная составляющая) [7, с. 45-46].

Определение содержания курса алгебры, преподаваемого в школе и педагогическом вузе, является важным аспектом профессиональной подготовки будущих учителей математики. Решению вопроса преемственности обучения способствует присутствие в учебных планах на младших курсах педвузов таких программ математического и профессионального циклов дисциплин, которые были бы нацелены на реализацию принципа непрерывности математического образования, с тем, чтобы у студентов была возможность скорректировать и обобщить свои базовые знания по школьной математике на более высоком качественном уровне [8].

Алгебра – это основной раздел математики, который можно охарактеризовать как обобщение и расширение арифметики. В более широком смысле под алгеброй понимают раздел математики, посвященный изучению операций над элементами множества произвольной природы, обобщающий обычные операции сложения и умножения чисел [9].

Виноградов И.М. предлагает следующее деление алгебры на категории:

– элементарная алгебра;
– общая алгебра;
– универсальная алгебра;
– линейная алгебра;
– алгебраическая комбинаторика.

Элементарная алгебра изучает свойства операций с вещественными числами, где символами обозначаются постоянные и переменные, а также правила преобразования математических выражений и уравнений с использованием этих символов [10].

Школьный курс алгебры – это обучение элементарной алгебре, и только в вузе начинается изучение общей алгебры, универсальной алгебры, линейной алгебры и алгебраической комбинаторики.

В учебных программах, действующих до обновления содержания образования, которое внедряется в республике поэтапно, для 7-9 классов поставлены следующие цели обучения алгебре: освоение обучающимися базисных основ алгебры, формирование у них высокой культуры межличностного и межэтнического общения, самоопределение личности и профессиональную ориентацию. Одной из задач обучения является обеспечение качественного усвоения базисных основ алгебры, направленного на воспитание и развитие интеллектуальных качеств личности: абстрактного и логического мышления, интуиции, познавательных интересов, самостоятельности, волевых качеств и др., математической речи, алгоритмической и графической культуры [11].

Объем учебной нагрузки по предмету «Алгебра» 7-9 классов составляет 3 часа в неделю, всего 102 часа в каждом классе в течение учебного года.

В следующих таблицах показано базовое содержание курса алгебры для 7-9 классов общеобразовательной школы (таблицы 1-3), соответствующее учебной программе, утвержденной приказом Министра образования и науки Республики Казахстан №115 от 3 апреля 2013 года [11].

Таблица 1 - Базовое содержание курса алгебры 7 класса

Раздел	Темы	Кол-во часов
1	2	3
Повторение курса математики 5-6 классов	Арифметические действия над рациональными числами. Модуль числа. Прямая и обратная пропорциональная зависимости. Координатная прямая. Координатная плоскость. Формулы. Линейное уравнение с одной переменной. Линейные неравенства с одной переменной и их системы. Линейное уравнение и неравенства с одной переменной, содержащие переменную под знаком модуля. Функция. Линейная функция. Системы линейных уравнений с двумя переменными. Решение текстовых задач.	6 часов
Степень с натуральным и целым показателями	Степень с натуральным и нулевым показателем. Степень с целым показателем. Стандартный вид числа. Свойства степеней: умножение и деление степеней с одинаковыми основаниями; возведение степени, произведения и дроби в степень. Преобразование выражений, содержащих степени. Функция $y = ax^2$, её свойства и график. Функция $y = ax^3$, ее свойства и график. Функция $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$, её свойства и график.	15 часов
Одночлены и многочлены	Одночлен и многочлен. Степень одночлена и многочлена. Стандартный вид одночлена и многочлена. Сложение, вычитание и умножение многочленов. Деление одночлена и многочлена на одночлен. Разложение многочлена на множители вынесением общего множителя за скобки и способом группировки. Тождественные преобразования многочленов	16 часов
Формулы сокращенного умножения	Формула разности квадратов двух выражений. Формулы квадрата суммы и квадрата разности двух выражений. Формулы куба суммы и куба разности двух выражений. Формулы суммы и разности кубов двух выражений. Тождественные преобразования выражений.	25 часов
Рациональные дроби и действия над ними	Целое выражение. Дробное выражение. Рациональное выражение. Рациональная дробь. Основное свойство рациональной дроби. Сложение и вычитание рациональных дробей. Умножение, деление и возведение в степень рациональных дробей. Тождественные преобразования дробно-рациональных выражений.	25 часов

Продолжение таблицы 1

1	2	3
Элементы приближенных вычислений	Приближенное число. Приближенное значение. Абсолютная погрешность приближенного значения. Относительная погрешность приближенного значения. Действия над приближёнными числами	5 часов
Повторение курса алгебры 7 класса	Арифметические действия над рациональными числами. Координатная плоскость. Линейные уравнения и неравенства с одной переменной, в том числе уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Системы линейных неравенств с одной переменной. Степень с целым показателем и её свойства. Многочлены. Формулы сокращённого умножения. Арифметические действия над рациональными дробями. Тождественные преобразования рациональных выражений. Функции вида $y = kx + b$, $y = ax^2$, $y = ax^3$, $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$, их свойства и графики. Системы линейных уравнений с двумя переменными. Решение текстовых задач.	10 часов
Итого		102 часа

В разделе «Степень с натуральным и целым показателями» учащиеся овладевают умением находить значение степени с целым показателем при конкретных значениях основания и показателя степени и применять свойства степени для вычисления значений числовых выражений и выполнения простейших преобразований. Основной целью изучения раздела является сформировать понятие степени с натуральным и целым показателями, выработать умение выполнять преобразования простейших выражений, содержащих степень.

При изучении раздела «Одночлены и многочлены» у школьников вырабатывается умение выполнять действия над степенями с натуральными показателями, действия сложения, вычитания и умножения многочленов, умение разложения многочлена на множители.

В разделе «Формулы сокращенного умножения» у семиклассников вырабатываются навыки вычисления числовых выражений, используя формулы сокращенного умножения.

Далее, учащиеся знакомятся с рациональными (или алгебраическими) дробями. При изучении раздела у школьников вырабатывается умение выполнять тождественные преобразования рациональных выражений. Главное место в данной теме занимают алгоритмы действий с дробями. Учащиеся должны понимать, что сумму, разность, произведение и частное дробей всегда можно представить в виде дроби. Приобретенные в этой теме умения выполнять действия с дробями являются опорными в преобразованиях дробных выражений.

В ходе исследования выяснилось, что у учащихся 7 класса наиболее часто затруднения вызывают такие разделы, как «Одночлены и многочлены», а именно представление многочлена в виде произведения одночленов, задачи на делимость чисел, в разделе «Рациональные дроби и действия над ними» у учащихся возникают трудности при сокращении, упрощении рациональных дробей.

Семиклассники сегодня обучаются по обновленной учебной программе, в которой к прежнему содержанию учебного предмета «Алгебра» добавились два раздела: «Функция. График функции» и «Элементы статистики», а рациональные дроби и действия над ними рассматриваются в разделе «Алгебраические дроби». Если в прежних учебных программах линейная функция изучалась в 6 классе, то в настоящей программе, разработанной по принципу спиральности при проектировании содержания предмета (постепенное наращивание знаний и умений как по вертикали, так и по горизонтали, т.е. усложнение навыков по темам и по классам с учетом преемственности обучения), линейная функция изучается и в 7 классе в совокупности с квадратичной ($y = ax^2$), кубической ($y = ax^3$) и функцией обратной пропорциональности ($y = \frac{k}{x}$).

Цель обучения по обновленной учебной программе – обеспечение качественного усвоения содержания предмета «Алгебра», формирование функциональной грамотности обучающихся, в том числе интеграции с другими предметами, развитие интеллектуального уровня учащихся на основе общечеловеческих ценностей и лучших традиций национальной культуры [12]. Распределение часов по разделам и внутри разделов варьируется по усмотрению учителя. Объем учебной нагрузки остается также 102 часа.

Таблица 2 - Базовое содержание курса алгебры 8 класса

Раздел	Темы	Кол-во часов
1	2	3
Повторение курса математики 5 и 6 классов и алгебры 7 класса	Арифметические действия над рациональными числами. Степень с целым показателем и ее свойства. Линейные уравнения и неравенства с одной переменной, в том числе содержащие переменную под знаком модуля. Система линейных неравенств с одной переменной. Многочлен. Формулы сокращенного умножения. Арифметические действия над рациональными дробями. Тождественные преобразования рациональных выражений. Доказательство тождеств. Функции вида $y = kx + b$, $y = ax^2$, $y = ax^3$, $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$, их свойства и графики. Системы линейных уравнений с двумя переменными. Решение текстовых задач.	6 часов

Продолжение таблицы 2

1	2	3
Квадратные корни	Иррациональные числа. Действительные числа. Квадратный корень. Приближённое значение квадратного корня. Арифметический квадратный корень. Свойства арифметического квадратного корня. Вынесение множителя из-под знака корня. Внесение множителя под знак корня. Освобождение от иррациональности в знаменателе дроби. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни. Функция $y=\sqrt{x}$, её свойства и график.	23 часа
Квадратные уравнения	Квадратное уравнение. Неполные квадратные уравнения. Метод выделения полного квадрата двучлена. Приведённое квадратное уравнение. Формулы корней квадратного уравнения. Дискриминант. Теорема Виета. Теорема, обратная теореме Виета. Целые рациональные уравнения. Дробно-рациональные уравнения. Рациональные уравнения. Посторонний корень. Уравнения, приводящиеся к квадратным уравнениям. Биквадратное уравнение. Метод введения новой переменной. Решение текстовых задач с помощью рациональных уравнений.	31 час
Квадратичная функция	Квадратный трехчлен. Корень квадратного трехчлена. Разложение квадратного трехчлена на множители. Квадратичная функция. Функции вида $y=ax^2+n$, $y=a(x-m)^2$, $y=a(x-m)^2+n$, их свойства и графики. Квадратичная функция $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$, ее свойства и график.	15 часов
Неравенства	Квадратное неравенство. Решение квадратных неравенств с помощью графика квадратичной функции. Рациональное неравенство. Метод интервалов.	12 часов
Первоначальные сведения о теории вероятностей и математическая статистика	Случайное событие. Вероятность. Теория вероятностей. Вероятность события. Частота случайного события. Математическая статистика. Группировка и анализ статистических данных.	5 часов
Повторение курса алгебры за 8 класс	Выполнение действий над действительными числами. Тождественное преобразование рациональных выражений. Тождественное преобразование выражений, содержащих квадратные корни. Линейные, квадратные и дробно-рациональные уравнения. Линейные, квадратные и дробно-рациональные неравенства. Системы линейных неравенств с одной переменной. Метод интервалов. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Функции вида $y=kx+b$, $y=ax^2$, $y=ax^3$, $y=\frac{k}{x}\ (k\neq 0)$, их свойства и графики. Системы линейных	10 часов

Продолжение таблицы 2

1	2	3
	уравнений с двумя переменными. Решение текстовых задач.	
Итого		102 часа

Основной целью изучения раздела «Квадратные корни» является систематизировать сведения о рациональных числах и дать представление об иррациональных числах, расширив тем самым понятие числа; выработать умение выполнять простейшие преобразования выражений, содержащих квадратные корни.

При изучении раздела «Квадратные уравнения» у восьмиклассников должно вырабатываться умение решать квадратные уравнения, простейшие рациональные уравнения и применять их к решению задач. Школьники овладевают способом решения дробных рациональных уравнений, который состоит в том, что решение такого уравнения сводится к решению соответствующего целого уравнения с последующим исключением посторонних корней. Кроме того, учащиеся получают представление о графическом способе решения уравнений.

Во время изучения квадратичной функции у школьников вырабатываются навыки работы с графиком функции.

Далее, у восьмиклассников вырабатываются умения и навыки работы с квадратными неравенствами, а именно решение их с помощью графика квадратичной функции и методом интервалов. Также, школьники учатся решать системы нелинейных неравенств с одной переменной и системы квадратных неравенств.

Трудности в понимании материала у восьмиклассников возникают при изучении раздела «Квадратные корни», а именно большинство учеников часто допускают такую «грубую» ошибку как, например, $\sqrt{25} = \pm 5$, также многие учащиеся при решении задач не умеют использовать свойства квадратного корня. При решении квадратных уравнений методом выделения полного квадрата у некоторых восьмиклассников возникают затруднения в использовании этого метода. Когда учащиеся изучают способ решения уравнений с помощью дискриминанта, у них практически не возникает вопросов при решении уравнений данным способом, причем прежний метод они уже не используют. В процессе изучения теоремы Виета класс, как правило разделяется на две группы: одна из которых предпочитает решать квадратные уравнения с помощью дискриминанта, а вторая – с помощью теоремы Виета. Также возникают трудности при решении уравнений высшей степени (уравнения, приводящиеся к квадратным уравнениям), а именно школьники не могут определить выражение, которое требуется заменить новой переменной.

Такая ошибка, как присутствие посторонних корней, у восьмиклассников встречается при решении дробно-рациональных уравнений. Много вопросов и непонимание вызывает у учащихся составление уравнений при решении текстовых задач. Решая квадратные неравенства, они путаются в определении направления ветвей параболы и, как следствие, получают неправильный ответ.

В 2018-2019 учебном году 8 классы будут обучаться по типовой учебной программе, в содержание которой добавлен раздел «Элементы статистики», который заменяет раздел «Первоначальные сведения о теории вероятностей и математическая статистика».

Таблица 3 - Базовое содержание курса алгебры 9 класса

Раздел	Темы	Кол-во часов
1	2	3
Повторение курса алгебры 7-8 классов	Выполнение действий над действительными числами. Степень с целым показателем и ее свойства. Тождественные преобразования рациональных выражений. Тождественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни. Линейные, квадратные и дробно-рациональные уравнения. Линейные, квадратные и дробно-рациональные неравенства. Системы линейных неравенств с одной переменной. Метод интервалов. Линейные уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Функции вида $y = kx + b$, $y = ax^2$, $y = ax^3$, $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$, их свойства и графики. Системы линейных уравнений с двумя переменными. Решение текстовых задач.	6 часов
Уравнения, неравенства и их системы	Равносильность линейных уравнений с двумя переменными. Нелинейные уравнения с двумя переменными. Система нелинейных уравнений с двумя переменными. Решение систем нелинейных уравнений с двумя переменными. Решение текстовых задач с помощью систем нелинейных уравнений с двумя переменными. Системы нелинейных неравенств с одной переменной. Неравенства с двумя переменными. Системы нелинейных неравенств с двумя переменными. Доказательство неравенств.	25 часов
Числовые последовательности	Числовая последовательность, способы её задания и свойства. Арифметическая прогрессия. Формула *n*-го члена арифметической прогрессии. Формула для вычисления значения суммы первых *n* членов арифметической прогрессии. Геометрическая прогрессия. Формула *n*-го члена геометрической прогрессии. Формула для вычисления значения суммы первых *n* членов геометрической прогрессии. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Метод математической индукции.	22 часа
Элементы тригонометрии	Градусная и радианная меры углов и дуг. Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного угла. Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов. Тригонометрические функции и их свойства. Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения. Формулы синуса,	32 часа

Продолжение таблицы 3

1	2	3
	косинуса, тангенса и котангенса суммы и разности двух углов. Формулы тригонометрических функций двойного и половинного углов. Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму или разность. Тождественные преобразования тригонометрических выражений.	
Элементы теории вероятностей и математической статистики	Вероятность. Статистика. Генеральная совокупность. Выборка. Статистическая вероятность. Частота. Относительная частота. Элементарное событие. Классическая вероятность. Геометрическая вероятность. Изображение статистических данных. Числовые характерситики статистических данных.	6 часов
Повторение курса алгебры 7-9 классов	Выполнение действий над действительными числами. Степень с целым показателем и ее свойства.Тождественные преобразования рациональных выражений. Тождественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни. Доказательство тождеств. Рациональные уравнения. Рациональные неравенства. Метод интервалов. Решение текстовых задач. Координатная прямая. Координатная плоскость. Функции вида $y = kx + b$, $y = ax^2$, $y = ax^3$, $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$, их свойства и графики. Системы линейных неравенств с одной переменной. Системы линейных и нелинейных уравнений и неравенств с двумя переменными. Уравнения и неравенств, содержащие переменную под знаком модуля. Числовые последовательности. Тождественные преобразования тригонометрических выражений.	11 часов
Итого		102 часа

При изучении раздела «Уравнения, неравенства и их системы» у учащихся вырабатываются навыки решения систем линейных и нелинейных уравнений и неравенств с одной и двумя переменными, а также умения тождественных преобразований систем уравнений.

Далее, школьники знакомятся с числовыми последовательностями, а именно способами их задания и свойствами, арифметической и геометрической прогрессиями, с основными формулами членов прогрессий.

Основной целью изучения раздела «Элементы тригонометрии» – ввести понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла, сформировать умение вычислять по известному значению одной из тригонометрических функций значения остальных тригонометрических функций, выполнять несложные преобразования тригонометрических выражений.

Ввиду того, что на практике в большинстве случаев решением уравнения является конкретное число или пара чисел, у школьников вызывает затруднения решение линейных и нелинейных уравнений с двумя неизвестными. Трудности вызывают решение и составление систем уравнений для решения текстовых задач. Ввиду использования графического способа решения неравенств с двумя переменными, некоторые девятиклассники испытывают затруднения в решении упражнений из этой темы. При решении задач из раздела «Числовые последовательности», учащиеся часто не могут самостоятельно записать формулу, выражающую k-й член по заданной последовательности, а находить члены последовательности по заданной формуле обычно не составляет труда. Задачи из раздела «Арифметическая прогрессия» на нахождение первого положительного или первого отрицательного члена прогрессии вызывают проблемы у девятиклассников. Они привыкли работать только по готовым формулам. Также вызывают затруднения комбинированные задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии. В разделе «Элементы тригонометрии» учащиеся часто путаются в большом количестве формул.

Учебная программа основного среднего образования включает предпрофильную подготовку обучающихся, а изучение каждого предмета завершается на уровне основного среднего образования [13]. В связи с этим, в старшей школе предусмотрена дифференциация обучения, т.е. старшеклассников обучают по двум направлениям: естественно-математическое и общественно-гуманитарное. Учитывая профессиональную направленность предполагаемой будущей специальности, учащиеся 9 классов имеют возможность выбрать дальнейшее направление обучения. Такая дифференциация помогает будущим абитуриентам эффективнее подготовиться к поступлению в вуз, т.к. основной упор в обучении делается на необходимые им в будущей деятельности знания, умения и навыки. Основными практическими задачами обучения курсу алгебры и начал анализа общественно-гуманитарного направления являются: формирование представлений о математике как универсальном языке науки, как форме описания и методе познания действительности, средстве моделирования явлений и процессов; умение ясно и четко выражать свои мысли, обладать алгоритмической культурой, критическим и логическим мышлением, интуицией, способностью преодолевать трудности; овладение системой математических знаний, развитие вычислительных алгебраических умений, необходимых для применения в практической деятельности, изучения смежных дисциплин, продолжения образования [14].

Содержание курса алгебры и начал анализа естественно-математического направления имеет более практическое применение. Здесь, основными задачами обучения прикладного характера являются: обеспечение качественного усвоения базисных основ алгебры и начал анализа, направленного на развитие интеллектуальных качеств личности; усвоение новых подходов к решению задач по математике, овладение математическими знаниями, нужными для изучения смежных дисциплин на современном уровне; применения математических знаний в повседневной деятельности; формирование качеств мышления, необходимых человеку для жизни в современном обществе, для общей социальной ориентации и решения практических проблем; интеллектуальное развитие учащихся; развитие логического мышления; потенциальных творческих способностей каждого учащегося; интереса к предмету; создание условий для дальнейшего изучения предметов естественно-математического цикла; формирование умений применять изученные понятия, свойства, правила, алгоритмы и т.п., полученные результаты и математические методы для решения задач прикладного характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, калькулятора, компьютера [14, с.15-16].

В Таблицах 4-5 отражено содержание учебного предмета «Алгебра и начала анализа» для 10-11 классов естественно-математического и общественно-гуманитарного направлений, соответствующего учебным программам для указанных классов, утвержденных приказом Министра образования и науки Республики Казахстан №115 от 3 апреля 2013 года [14].

Таблица 4 - Содержание «Алгебры и начал анализа» для 10 класса

10 КЛАСС		
Наименование разделов	Кол-во часов (общественно-гуманитарное направление)	Кол-во часов (естественно-математическое направление)
1	2	3
Повторение курса алгебры 7-9 классов	6 часов	6 часов
Функция, ее свойства и график	15 часов	15 часов
Тригонометрические функции	10 часов	10 часов
Тригонометрические уравнения и неравенства	15 часов	15 часов
Производная	22 часа	22 часа
Применение производной	16 часов	16 часов
Комбинаторика и бином Ньютона	6 часов	6 часов
Повторение курса алгебры и начал анализа 10 класса	12 часов	12 часов
Итого	102 часа	102 часа

Таблица 5 - Содержание «Алгебры и начал анализа» для 11 класса

11 КЛАСС		
Наименование разделов	Кол-во часов (общественно-гуманитарное направление)	Кол-во часов (естественно-математическое направление)
1	2	3
Повторение курса алгебры и начала анализа 10 класса	6 часов	6 часов
Первообразная и интеграл	17 часов	13 часов
Степени и корни. Степенная функция	23 часа	23 часа
Показательная и логарифмическая функции	10 часов	9 часов
Показательные и логарифмические уравнения и неравенства	20 часов	19 часов

Продолжение таблицы 5

1	2	3
Уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств	-	14 часов
Вероятность	8 часов	6 часов
Повторение курса алгебры и начала анализа 10-11 классов	18 часов	12 часов
Итого	102 часа	102 часа

В начале учебного года учащиеся 10 классов изучают основные свойства функций, учатся исследовать функции и строить их графики. Закрепляются знания и умения, связанные с применением изученных ранее формул тригонометрии к преобразованию тригонометрических выражений. Идет формирование умения учащихся решать простейшие тригонометрические уравнения, знакомство с некоторыми приемами решения тригонометрических уравнений, неравенств и их систем.

При изучении разделов «Производная» и «Применение производной» вводится понятие производной, вырабатывается умение находить производные, пользуясь формулами дифференцирования. Учащиеся знакомятся с методами дифференцированного исчисления и у них вырабатывается умение применять их в простейших случаях.

В 11 классе изучение раздела «Первообразная и интеграл» нацелено на ознакомление учащихся с интегрированием как операцией, обратной к дифференцированию, на обучение применять интеграл к решению геометрических задач в простейших случаях.

Далее, старшеклассники знакомятся с показательной, логарифмической и степенной функциями, учатся решать показательные и логарифмические уравнения и неравенства.

Целью следующего раздела «Уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств» является обобщить имеющиеся у учащихся сведения об уравнениях, неравенствах, системах, познакомить их с общими методами решения, обратить внимание школьников на вопросы равносильности.

Старшеклассники изучают не только алгебру, они знакомятся с основными понятиями математического анализа. Касательно алгебры, вопросы у школьников возникают при решении систем тригонометрических уравнений и тригонометрических неравенств. Часто, им сложно дается нахождение значений углов, необходимых для решения таких систем. Также, много затруднений вызывают упражнения из раздела: «Степени и корни. Степенная функция», а именно действия со степенями с рациональным и иррациональным показателями, задания, для решения которых необходимо находить область допустимых значений, а также решение систем иррациональных уравнений и иррациональных неравенств. Требуют хорошей подготовки и упражнения из раздела «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства». Особого внимания заслуживает раздел: «Уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств», где рассматриваются общие методы решений уравнений, неравенств и их систем, решение уравнений и неравенств, содержащих переменные под знаком модуля, уравнения и неравенства с параметрами.

Одной из важных проблем школьного математического образования является проблема создания качественного учебника. Современный учитель должен научить учеников собирать нужную информацию самостоятельно, осознанно читать учебную литературу. Для этого учебник должен быть написан для учеников, а не для учителя. Только в последние годы триаду УУУ, которую раньше расшифровывали как учитель-ученик-учебник, т.е. учитель сообщал информацию ученикам, переводя язык учебника на язык общения, а учебник оставался на заднем плане, то теперь эту триаду можно расшифровывать как учебник-ученик-учитель. Такая расшифровка показывает учителя организатором и вдохновителем непосредственного общения ученика с учебником, направляя и координируя этот процесс [15].

Современный учебник должен служить для учащихся базой знаний, которые являются основой для постижения природных законов, междисциплинарных связей, выражающих устройство мира и общества, его сущность, выработку интеллектуальных и практических умений и навыков [16].

Учебный процесс в общеобразовательных школах осуществляется с использованием учебников и учебно-методических комплексов, утвержденных Министерством образования и науки Республики Казахстан. В частности, учащиеся 7-9 классов изучают курс алгебры по учебникам, разработанным коллективом авторов под руководством профессора Абылкасымовой А.Е. и по учебникам Шыныбекова А.Н. Учебники разделены на главы, а главы, в свою очередь, состоят из параграфов.

Каждый параграф учебника Абылкасымовой А.Е. начинается с перечисления опорных понятий, которые дают возможность осуществить связь ранее изученного материала с новым [17]. В данном учебнике содержится очень много полезной информации, он составлен в помощь ученикам. Учебник написан доступным языком, что облегчает усваиваемость теоретического материала школьниками. Под руководством Абылкасымовой А.Е. также разработаны учебно-методическое руководство для учителя, дидактические материалы и сборники задач для каждого класса.

Учебник по алгебре для 7 класса, соответствующий типовой учебной программе по предмету «Алгебра» для 7-9 классов уровня основного среднего образования по обновленному содержанию образования, отличается тем, что:

- обучение математике по данному учебнику можно начинать независимо от того, по какому учебнику учились в 5-6 классах. В зависимости от уровня подготовки учащихся класса учитель может изменять через систему предложенных упражнений уровень изучаемого материала на уроке;

- в учебнике сохранена традиционная для отечественного образования фундаментальность изложения теории, формирования умений и навыков. Изложение материала осуществляется кратко, глубоко, экономно и строго, раскрывая его сущность через постановку проблем и их решение и демонстрируя применение теории на примерах;

- важное внимание уделяется осознанности усвоения теории благодаря вплетению нового материала в известный, постановке проблем, требований объяснить полученные результаты при изложении теоретического материала;

- материал учебника изложен с учетом возрастных особенностей учащихся, в частности, уровнем развития их мышления. Овладение новым материалом осуществляется на основе организации деятельности учащихся с помощью системы упражнений, которые подведут учащихся к открытию новых для них знаний, самостоятельной формулировке выводов, правил, алгоритмов;

- усилена коммуникативная направленность изложения учебного материала, созданы предпосылки для формирования теоретического мышления, разработаны упражнения для организации совместной деятельности учащихся по открытию новых для них знаний для групповой, индивидуальной и самостоятельной работы;

- овладению академическим языком, развитию лаконичной и информативной математической речи, грамотному применению математического языка содействует содержание рубрики учебника «Говорите правильно»;

- по некоторым изучаемым темам учащимся даются весьма краткие исторические сведения, связанные с развитием математики. Они помещены в упражнениях группы С в связи с тем, что учащиеся самостоятельно должны найти и обработать указанную в упражнении информацию;

- учебник содержит практико-ориентированные задания разных уровней сложности.

Данный учебник ориентирует учащихся на фундаментальные знания; формирует интеллектуальные и практические умения и навыки; создает основу для организации самостоятельного получения (добывания) знаний; способствует развитию творческого, а не репродуктивного мышления; обеспечивает дифференцированный, индивидуальный подход к обучению.

Изучение курса алгебры по данному учебнику позволяет учащимся:

- понять универсальность математических методов и их роль в изучении окружающей действительности;

- изучить методы построения математических моделей для описания процессов в различных контекстах;

- осмыслить полезность приобретенных математических знаний и навыков для применения их в исследовательской деятельности и жизненных ситуациях;

- оценить важность овладения широким спектром коммуникативных навыков для решения поставленных задач;

- использовать информационно-коммуникационные технологии с целью решения различных математических задач, в том числе прикладного характера.

Учебники, разработанные Шыныбековым А.Н. имеют более научный подход к изложению материала, отчего учащиеся и учителя считают эти учебники «сложными».

Существует такая актуальная проблема, что не все школьники могут правильно работать с учебниками по математике. При решении домашних заданий они используют только записи в тетрадях и по аналогии с решениями задач в классе решают заданное на дом. Лишь малая часть ребят читают теоретический материал в учебнике, хотя он содержит нужную для дальнейшего изучения алгебры информацию и примеры решения некоторых заданий. Во время работы на уроке учитель должен научить детей работать с учебником, объяснив теоретический материал, ссылаться на его наличие в параграфах учебника. Работа с учебной литературой является неотъемлемой частью самостоятельной работы обучающегося, умения и навыки которой необходимы для дальнейшего его обучения в вузе.

Математическую подготовку учащихся в общеобразовательной школе определяет учитель математики, методическая грамотность самого учителя зависит от организации обучения его в педагогическом вузе.

Хорошая подготовка по алгебре учащегося в школе дает ему возможность дополнить и расширить свои знания в вузе. Алгебра является базовой дисциплиной в обучении будущих учителей по специальности «5В010900 – Математика».

Высшая алгебра, курс которой изучается в вузе студентами, представляет собой обобщение основного содержания школьного курса элементарной алгебры. Вопрос о решении уравнений является центральным в школьном курсе алгебры. Содержание учебного предмета построено так, что изучение уравнений начинается с простого случая, когда дано уравнение первой степени с одним неизвестным, а потом развивается в двух направлениях. В одном направлении рассматриваются системы двух и трех уравнений первой степени с двумя и, соответственно, тремя неизвестными; во втором направлении изучаются квадратное уравнение с одним неизвестным и некоторые частные типы уравнений более высокой степени, которые легко сводятся к квадратным (биквадратные уравнения). Эти два направления получают дальнейшее развитие в курсе высшей алгебры, который делится на два больших раздела. Первый раздел – это основы линейной алгебры, в котором изучается решение произвольных систем уравнений первой степени, или линейных уравнений. Второй раздел высшей алгебры – это алгебра многочленов, посвященный изучению одного уравнения от одного неизвестного, но уже произвольной степени. В алгебре многочленов центральным вопросом является не поиск корней уравнения, а вопрос об их существовании [18].

В Казахском национальном педагогическом университете имени Абая в образовательных программах специальности «5В010900 – Математика» дисциплины «Алгебра-1» и «Алгебра-2» являются компонентами по выбору из цикла базовых дисциплин, на обучение которым предусматривается по 2 кредита. Так, изучение дисциплины «Алгебра-1» предполагает 15 часов лекций, 15 часов практических занятий, 30 часов самостоятельной работы студента под руководством преподавателя (СРСП) и 30 часов самостоятельной работы студента (СРС). Такое же распределение часов предлагается на изучение дисциплины «Алгебра-2».

Цели обучения алгебре в вузе сформулированы следующим образом:

– формирование систематического образования в области математики;

– формирование научного мировозрения у студентов;

– формирование и воспитание всестороннего развития личности студентов;

– формирование математических знаний, умений и навыков, необходимых для изучения других общенаучных и специальных дисциплин;

– организация образовательного процесса на современном научном уровне по математике;

– подготовка профессиональных кадров специальности математика с социальной и гражданской ответственностью.

Придерживаясь каталога элективных дисциплин, содержание «Алгебры-1» и «Алгебры-2» излагается следующим образом:

1. *Понятие о группе, кольце, поле.* Примеры и элементарные свойства операций. Кольца и поля вычетов. Поле комплексных чисел. Изображение комплексных чисел на плоскости. Тригонометрическая форма записи комплексного числа.

2. *Матрицы и действия над ними.* Матрицы и определители. Операции над матрицами. Обратная матрица. Ранг матрицы. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения. Системы линейных уравнений. Матричные уравнения. Решение системы линейных уравнений при помощи обратной матрицы. Правило Крамера. Теорема Кронекера – Капелли. Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений. Системы однородных линейных уравнений, условия существования нетривиальных решений.

3. *Многочлены над полем.* Многочлены от одной переменной. Деление многочлена на двучлен $x - a$. Корни многочлена. Теорема о делении многочлена с остатком. Наибольший общий делитель и алгоритм Евклида. Наименьшее общее кратное. Разложение многочлена по степеням двучлена $x - a$. Неприводимые кратные множители многочлена от одной переменной. Кратные корни многочлена. Основная проблема алгебры. Многочлены над полем рациональных чисел и алгебраические числа. Поле алгебраических чисел.

4. *Линейные пространства.* Линейная зависимость и независимость векторов. Базис и размерность. Координаты вектора в данном базисе. Линейные оболочки и ранг системы векторов. Подпространства. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств. Критерий разложения пространства в прямую сумму подпространств.

5. *Евклидовы и унитарные пространства.* Изоморфизм всех n – мерных евклидовых пространств. Неравенство Коши – Буняковского. Ортогональные системы векторов. Процесс ортогонализации. Ортонормированные базисы. Ортогональное дополнение.

6. *Линейные операторы в линейных пространствах*. Линейные операторы и их матричная запись. Канонический вид линейных операторов. Собственные

векторы и собственные значения линейного оператора. Приведение матрицы к жордановой форме, построение канонического базиса.

7. *Линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах*. Линейные функционалы. Сопряженный оператор. Критерий нормальности оператора. Алгебраическая и геометрическая характеризации унитарных, ортогональных, самосопряженных и знакопостоянных операторов. Теорема о полярном разложении.

8. *Квадратичные формы*. Преобразования неизвестных квадратичной формы. Метод Лагранжа приведения квадратичных форм к каноническому виду. Критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы к главным осям.

Изучение дисциплины начинается с абстрактных понятий, в следствии чего первокурсники получают расплывчатое представление о новых объектах алгебры. Такое содержание не имеет практической направленности и не нацелено на методическую подготовку будущих учителей математики, а направлено на углубление только теоретических знаний по алгебре.

Рассмотрим какие разделы школьного курса алгебры имеют продолжение и дальнейшее развитие в вузе. Покажем это на рисунке 1.

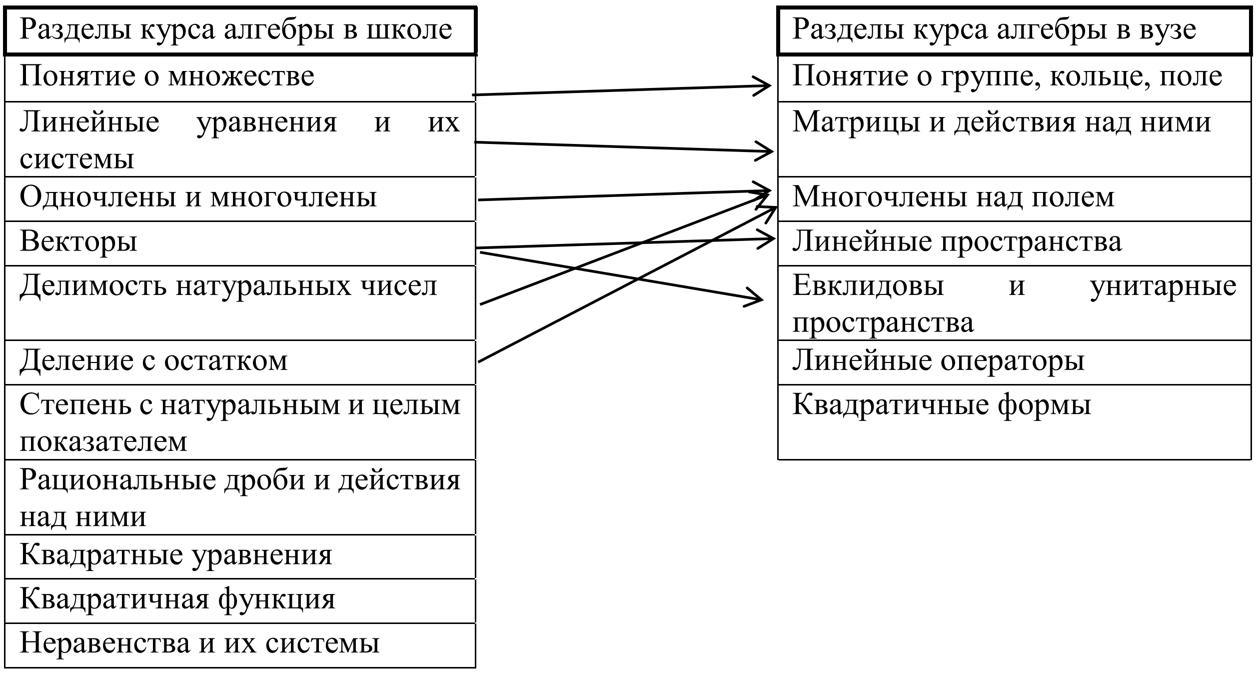

Рисунок 1 – Взаимосвязь между школьным и вузовским содержаниями курса алгебры

Вышеприведенная схема показывает, содержание курса алгебры в вузе слабо охватывает школьное содержание этого курса, что отрицательно влияет на методическую подготовку студентов педагогических вузов.

Для качественного усвоения курса алгебры необходима хорошая базовая подготовка студентов по математике в целом. Учитывая сказанное, необходимо отобрать содержание данной дисциплины максимально «близким» к школьному учебному предмету «Алгебра».

В учебных планах педагогических вузов математические дисциплины слабо скоррелированы с содержанием школьного курса математического образования, тогда как они должны быть нацелены на реализацию принципа непрерывности и преемственности.

С 2016-2017 учебного года по предложению кафедры методики преподавания математики, физики и информатики Казахского национального педагогического университета (КазНПУ им. Абая) и согласованию с республиканским учебно-методическим советом в учебные планы младших курсов были введены дисциплины, нацеленные на корректировку и обобщение базовых знаний студентов по школьной математике на более высоком уровне, и дисциплины на старших курсах, ориентированные на методическую подготовку обучающихся [8, с. 134].

Так, на первом курсе студенты помимо общеобразовательных дисциплин изучают такие математические дисциплины, как «Основы математического анализа», «Элементарная математика», «Научные основы школьного курса математики», «Алгебра-1», «Математический анализ-1», «Алгебра-2».

На втором курсе изучаются фундаментальные математические дисциплины, а именно: «Математический анализ - 2», «Математический анализ - 3», «Геометрия-1», «Геометрия-2», «Технологии критериального оценивания». На 4 семестре студенты проходят пассивную практику в школах.

С третьего курса будущим учителям математики предлагаются к изучению следующие дисциплины: «Методика преподавания математики», «Практикум по методике обучения математике», «Методы решения нестандартных задач по математике», «Дифференциальные уравнения», «Математический анализ-4», «Организация обучения математике. Современный урок», «Профильная и уровневая дифференциация обучения математике», «Методические основы решения задач», «История математики», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Математическая логика и дискретная математика». На третьем и четвертом курсах студенты проходят педагогическую и производственную практики.

Повторение школьного курса алгебры, совершенствование знаний, умений и навыков по алгебре и методическая подготовка будущего учителя математики осуществляется при изучении следующих дисциплин: «Элементарная математика» - обязательный компонент из цикла профилирующих дисциплин (2 кредита – 90 часов, из которых 15 часов лекций, 15 часов практических занятий, 30 часов СРСП, 30 часов СРС), «Методика преподавания математики» - обязательный компонент из цикла базовых дисциплин (3 кредита – 135 часов, из которых 30 часов лекций, 15 часов практических занятий, 45 часов СРСП, 45 часов СРС), «Научные основы школьного курса математики» - компонент по выбору из цикла базовых дисциплин (3 кредита – 135 часов, из которых 30 часов лекций, 15 часов практических занятий, 45 часов СРСП, 45 часов СРС), «Практикум по решению математических задач» - компонент по выбору из цикла базовых дисциплин (3 кредита – 135 часов, из которых 45 часов практических занятий, 45 часов СРСП, 45 часов СРС), «Теория вероятностей и математическая статистика» - компонент по выбору из цикла базовых дисциплин (3 кредита – 30 часов лекций, 15 часов практических занятий, 45 часов СРСП, 45 часов СРС), «Методические основы решения задач» - компонент по выбору из цикла профилирующих дисциплин (4 кредита – 30 часов лекций, 30 часов практических занятий, 60 часов СРСП, 60 часов СРС).

В содержание курса «Элементарная математика» входят такие разделы, как «Числа», «Выражения», «Функции», «Уравнения и системы уравнений», «Неравенства и системы неравенств», «Элементы математического анализа», «Элементы комбинаторики», «Планиметрия» и «Стереометрия» [19]. Целью дисциплины «Элементарная математика» является целенаправленное формирование и освоение систематизированных знаний и умений будущих учителей математики решать задачи школьного курса, необходимых при подготовке высококвалифицированных педагогических кадров по математике, обладающих высокой социальной и гражданской ответственностью, способных осуществлять профессиональную деятельность. Изучение этого курса имеет пропедевтический характер и является курсом, «выравнивающим» знания первокурсников, необходимых для дальнейшего обучения в высшей школе.

Разделы курса «Методика преподавания математики» – следующие: «Методика преподавания математики» как учебный предмет», «Математика как учебный предмет в общеобразовательной школе», «Методы и современные технологии обучения математике», «Основные содержательно-методические линии школьного курса математики и методика их изучения», «Организация учебной работы по математике в школе», «Методика преподавания математики как педагогическая наука» [20]. Данный курс подразумевает изучение студентами общей и частной методик обучения математики в целом. При рассмотрении частных методик, студенты знакомятся с методикой обучения основного школьного курса алгебры.

Следующие разделы входят в содержание курса «Научные основы школьного курса математики»: линия «Действительные числа», линия «Тождественные преобразования», линия «Алгебраические уравнения», линия «Алгебраические неравенства», линия «Элементарные функции», линия «Элементы математического анализа», линия «Тригонометрия», линия «Комплексные числа», линия «Планиметрия», линия «Стереометрия». В процессе изучения данного курса, студенты-первокурсники знакомятся с научным подходом к понятиям и определениям алгебры и геометрии, решают практические задания по этим предметам. Ввиду того, что в содержание «Планиметрии» и «Стереометрии» входит объемное количество разделов, вопросам алгебры уделяется только половина от общей нагрузки часов.

В содержание курса «Методические основы решения задач» входят разделы: «Тождественные преобразования», «Методы решения систем уравнений и неравенств», «Методы решения рациональных уравнений, неравенств и их систем», «Методы решения задач на составление уравнения и системы уравнений», «Методы решения систем иррациональных уравнений и неравенств», «Методы решения показательных и логарифмических уравнений, неравенств и их систем», «Решение рациональных неравенств», «Методы решения параметрических уравнений и неравенств». Этот курс посвящен различным приемам и способам решения алгебраических задач.

Количество курсов, содержащих школьные разделы алгебры, в образовательной программе специальности «5В010900 – Математика» КазНПУ имени Абая достаточно, но требуется методическое обеспечение в организации обучения этим дисциплинам. Взяв во внимание вышесказанное, процесс обучения курсу алгебры в педагогическом вузе должен быть построен таким образом, чтобы студенты при обучении данному курсу умели связать школьный материал учебного предмета «Алгебра» и содержание предмета в вузе, умели опираться на знания, умения и навыки, полученные в школе, и применять их при обучении в вузе. Требуется пересмотреть методику обучения курсу алгебры как в школе, так и в педагогическом вузе, где обучают будущих учителей математики.

Таким образом, анализ содержания курса алгебры в школе и педагогическом вузе показал, что содержание курса алгебры в школе является базой и пропедевтическим курсом высшей алгебры. Содержание курса алгебры в педагогическом вузе для специальности «5В010900 – Математика» не совсем соответствует требованиям профессиональной подготовки будущих учителей математики, так как имеет более научный характер. Вследствие этого, возникает необходимость пересмотра содержания дисциплин «Алгебра-1» и «Алгебра-2» в целях придания им практической направленности для полного и качественного усвоения основных понятий алгебры и совершенствования методической подготовки студентов указанной специальности.

1.2 Преемственность в обучении курсу алгебры в школе и вузе

Наше исследование рассматривает учебный процесс в системе «школа-педвуз-школа», в котором немаловажное значение имеет вопрос преемственности, подразумевающий выполнение содержательного и процессуального аспектов обучения курсу алгебры. Указанные стороны необходимо рассматривать в едином комплексе, поскольку только в этом случае можно говорить о целостности педагогического процесса. Составляющими содержательного аспекта обучения являются учебные программы по алгебре в школе и каталог элективных дисциплин, включающий описание содержания дисциплин по алгебре. Процессуальный аспект обучения характеризуется методикой его организации, а именно формами, методами и средствами обучения. В этом случае особый акцент делается на методическую подготовку будущего учителя математики, причем многим методическим приемам и применению современных средств обучения желательно студента обучать не только на занятиях по методическим дисциплинам, но и по фундаментальным математическим дисциплинам.

Проанализировав учебные программы школьного курса алгебры, рассмотрев охват и развитие отдельных школьных разделов в вузовском курсе, приходим к выводу о том, что содержательный аспект преемственности в системе «школа-педвуз» недостаточно сформирован поскольку имеется разрыв между школьными знаниями и абстрактными знаниями по алгебре в вузе. Процессуальная сторона также слабо развита, поскольку вчерашний выпускник педвуза приходит в школу неподготовленный к своей профессиональной деятельности, многому он учится в самой школе, хотя непосредственная подготовка должна проходить еще в вузе, беря во внимание все происходящие на тот момент изменения и требования к процессу обучения в школе.

В процессе обучения вчерашнего выпускника школы – сегодняшнего студента вуза возрастание объема и значимости самостоятельной работы, переход от учебно-познавательной деятельности репродуктивного характера к продуктивным ее видам, появление профессионального интереса и участие в учебно-исследовательской деятельности способствует становлению его как субъекта учебно-воспитательного процесса – равноправного и активного его участника [21].

Организация обновленного содержания образования подразумевает применение активных методов обучения на уроках, но в связи с постепенным переходом на обновленное содержание в большинстве школ уроки продолжают вести традиционно.

Считаем необходимым уделять особое внимание самостоятельной работе старшеклассников, чтобы, поступая в вуз, они были достаточно подготовлены к новой для них форме учебного процесса в вузе. Учителям, работающим в старших классах, нужно нацеливать учеников на самостоятельную и творческую работу. Поэтому, основным принципом обучения на старшей ступени школы должен быть принцип преемственности [22].

В педагогическом энциклопедическом словаре преемственность в обучении толкуется как установление связи и правильного соотношения между частями учебного предмета на разных ступенях его изучения. Преемственность, присущая современным учебным планам общеобразовательной школы, обеспечивает определенный объем знаний учащихся в соответствующих классах и равные возможности для продолжения образования [23].

Несмотря на то, что большое количество методических и психолого-педагогических исследований посвящено образовательному процессу и реализации преемственности при переходе из школы в вуз, проблема все же остается нерешенной, вследствие происходящих изменений в системе образования, и, в частности, в математическом образовании. Ю.А. Кустов в одной из своих работ справедливо замечает, что исследование процесса обучения школьника и студента ведется раздельно, то есть школьные педагоги наблюдают за учениками в школе, а педагоги вуза – за студентами в вузе, что является большим недостатком, ведь в сущности это один и тот же человек. Поэтому проблема преемственности обучения учащегося при переходе его из школы в вуз остается актуальной [24].

А.Е. Абылкасымова в своей работе «Современный урок» утверждает, что преемственность в процессе обучения реализует принцип систематичности и последовательности обучения, который основан на логической последовательности и связи между учебными предметами, изучаемыми на разных ступенях школьного обучения (в начальной, основной и средней), и предполагающий, что изучаемый материал базируется на знаниях, усвоенных учащимися ранее. Также этот принцип решает противоречие между необходимостью формирования системы знаний, умений и навыков по предметам и формированием целостного концептуального видения мира, что обеспечивается системным построением программ и учебников, установлением межпредметных и внутрипредметных связей [25].

В диссертационной работе А.М. Мубаракова указано, что «в связи с изучением алгебры ярче проявляется своеобразие и особенности преемственности обучения математике». Им успешно показан объясняющий переход от арифметических понятий к алгебраическим, где возникает противоречие. Так, начиная изучение алгебры, учащиеся встречаются со своеобразным математическим языком. В преподавании этого предмета безусловно приходится опираться на законы арифметических операций, но понятия, сложившиеся при изучении арифметики, в алгебре обретают новый смысл. Если арифметические понятия имеют житейский качественный смысл, то алгебраические – не всегда. Возьмем понятие умножения чисел: в арифметике мы можем сказать, что число увеличили в несколько раз, в алгебре – нет, т.к. это понятие принимает другой смысл. Например, $24:6=4$ (24 уменьшенное в 6 раз), чего нельзя сказать о $(-24):(-6)=4$, потому что число -24 от деления на -6 не уменьшается, и понятия самой операции учащиеся воспринимают по-другому. Преемственность в обучении, гарантирующая взаимосвязь разных этапов и ступеней обучения, дает возможность расширить и углубить знания, полученные на предыдущем этапе обучения, способствует перерастанию отдельных понятий и представлений в систему обобщенных знаний, умений и навыков обучаемых [26].

Линейно-концентрическое построение школьного курса математики подразумевает два направления реализации преемственности в обучении предмету:

1) преемственность между смежными ступенями обучения;
2) преемственность внутри каждой ступени обучения:

а) преемственность внутри каждого курса математического характера (арифметики, алгебры, алгебры и начал анализа, геометрии);

б) преемственность между курсами математического характера, в частности, между пропедевтическими и систематическими курсами (например, алгеброй и геометрией, арифметикой и алгеброй, арифметикой и геометрией и др.) [27].

Очень важно, чтобы преемственность соблюдалась на каждом этапе образования, а именно при переходе школьника из начальной школы в среднюю (из 4 в 5 класс), далее необходимо выделить переход из 6 класса в 7 класс, ввиду «деления» математики на два отдельных учебных предмета – «Алгебра» и «Геометрия», после чего переход из основной школы в старшую, где учащиеся начинают изучение предмета «Алгебра и начала анализа» [28].

Содержание обновленных учебных программ построено на принципе спиральности, который основан на том, что происходит постепенное наращивание знаний как по вертикали, так и по горизонтали (усложнение навыков по темам и по классам с учетом преемственности обучения). Считаем, что такой подход к обучению должен иметь продолжение и в высшем образовании.

Преемственность должна соблюдаться не только в содержании курсов алгебры в школе и вузе, но и в организации учебного процесса. Школьники учатся под руководством учителей, которые контролируют усвоение материала по каждому предмету, настаивают на необходимости изучения теоретического материала, при наличии пропусков или при слабом понимании материала дают дополнительные задания, способствующие усваиваемости упущенного. В вузе же практически весь процесс направлен на самообразование и на самостоятельную познавательность студентов. Конечно, ввиду возрастных особенностей школьников, школьное образование нельзя оставлять на самостоятельное обучение, но нужно готовить учащихся к процессу получения знаний в вузе, развивать в школьниках ответственность за свою успеваемость в обучении.

Основной задачей обучения математике старшего звена должно быть развитие у учеников способностей к творческому мышлению. Делая каждый шаг при решении математической задачи, учащийся должен уметь обосновывать для чего он делает конкретное действие. Старшеклассников нужно учить анализировать проблему поставленной задачи, проговаривать каждое свое действие, сделанное для решения задания, развивать математическую интуицию выбором наиболее приемлемого пути решения для конкретной задачи. Научив учащихся старших классов самостоятельно думать, проводить анализ, логически рассуждать, правильно использовать полученные знания, синтезировать большой объем поступающей информации, можно качественно подготовить абитуриента для поступления в вуз [22].

На специальности «5В010900 - Математика» и «5В060100 – Математика» вузов поступают в основном выпускники классов естественно-математического направления. При обучении курсу алгебры по этому направлению недостаточно того, что старшеклассники хорошо решают уравнения и неравенства, знают основные формулы, определения и теоремы. Для успешного обучения они должны иметь навыки самостоятельной работы по овладению знаниями, уметь выделять из множества полученной информации самое необходимое, правильно применять приобретенные знания при решении практических задач [22].

В школьной математике существует множество различных способов решения одних и тех же заданий, поэтому студенты первого курса часто отличаются друг от друга своими навыками решения задач, приобретенными в школах. Задания, предложенные преподавателем, первокурсники решают каждый своим способом, причем не всегда понимают решения своих одногруппников. Существует еще и такая проблема, что не все студенты математических факультетов имеют предрасположенность к математике, так как при выборе будущей специальности некоторые абитуриенты ориентируются не на свои способности, а лишь на возможность поступления на грант. Ведь, как известно, в настоящее время на педагогические специальности выделяется большое количество бюджетных мест. Поэтому, преподавателям педагогических вузов важно помочь таким студентам в усвоении математических дисциплин и огромное внимание уделять именно методике преподавания своего предмета [29].

Изучая алгебру в вузе, мало кто из студентов сможет связать знания, полученные в курсе алгебры средней школы с абстракцией курса алгебры в высшей школе, вследствие того, что для многих обучающихся высшая алгебра не имеет ничего общего с алгеброй, которую они проходили в школе, кроме самого названия курса. Но почему так? Ведь элементы алгебры есть уже в программе начальной школы по математике, когда ученикам говорят, что от перемены мест слагаемых их сумма не меняется, а в высшей алгебре это звучит как закон коммутативности относительно операции сложения.

Чтобы помочь студентам в усвоении дисциплины, преподаватель должен тщательно отобрать содержание курса, выделить основной необходимый материал, с которым должен непосредственно сам ознакомить обучающихся, и материал для самостоятельного изучения, знание и понимание которых в дальнейшем будет являться базой для становления их как будущих учителей математики. Также, в процессе подготовки будущих учителей математики, во время изучения абстрактных понятий алгебры, таких как группы, кольца, поля, нужно обязательно приводить примеры из школьного курса, где те же свойства и законы операций сохранены.

Например, при сложении целых чисел будут получатся только целые числа. Это пример группы на множестве целых чисел относительно операции сложения. Или, что множество натуральных чисел – это полугруппа относительно операции сложения. Студенты должны понимать, что школьная алгебра – не отдельный предмет, а то, что в ней рассматриваются лишь некоторые элементы «вузовской алгебры» [29,с. 77-80].

Вследствие малого количества часов на изучение курса алгебры в педагогическом вузе, учитывая объемное содержание курса, знания, полученные в процессе обучения, бывают очень поверхностными. Затруднения усугубляет еще и различный уровень подготовки учащихся, которые окончили разные типы школ. Поэтому, в содержание курса алгебры необходимо ввести подготовительный раздел к дальнейшему обучению высшей алгебре, в котором рассматривались бы основные алгебраические понятия. В педагогическом вузе это особенно важно, потому что при подготовке будущих учителей математики, студенты должны знать материал курса алгебры на высоком уровне. Умения и навыки первокурсников работать с основными понятиями, знать и уметь применять свойства операций и действий над множествами, уметь приводить примеры к теоретическому материалу и наглядно показать смысл каких-либо алгебраических понятий – все это несомненно играет большую роль в обучении курсу алгебры в педагогическом вузе.

Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод, что обучение курсу алгебры должно проходить поэтапно, а именно: изучение курса алгебры в школе, выравнивание полученных знаний и подготовка к дальнейшему его изучению в курсе элементарной алгебры, обучение курсу общей алгебры в вузе. И только при таком подходе к изучению алгебры соблюдается преемственность в обучении этому курсу при переходе из школы в вуз [22, с. 73-76].

Для того, чтобы решить вопрос единства содержательного и процессуального аспектов преемственности обучения курсу алгебры в школе и вузе, необходимо, во-первых, увеличить количество часов, отводящихся на изучение алгебры в педагогическом вузе, во-вторых, в содержание курса алгебры в вузе включить дополнительные разделы для подготовки первокурсников к изучению общей алгебры, в-третьих, совершенствовать методику преподавания школьного и вузовского курсов алгебры, применяя в процессе обучения наиболее удовлетворяющие современным запросам обеих систем образования методы, формы и средства обучения.

1.3 Методика обучения курсу алгебры учащихся в общеобразовательной школе и будущих учителей в педагогическом вузе

Начало процесса становления методики обучения математике связывают с работами Песталоцци И.Г. «Наглядное учение о числе» и «Наглядное учение об измерении» (1803 г.). Тем не менее, уже в «Арифметике» Магницкого Л.Ф. (1703 г.), являвшейся основным школьным учебником в течение полувека, содержались методические рекомендации по изучению арифметики. Также, некоторые предложения по использованию приемов обучения имелись в работах Платона, который положил начало логической теории понятий, Коменского Я.А., внесшего значительный вклад в создание дидактических принципов и теории организации процесса обучения. Во второй половине XVIII - первой половине XIX вв. вышли методические работы, которые стали основой методики обучения алгебре, тригонометрии и началам анализа. Общая методика преподавания математики, рассматривающая вопросы целей, методов, форм обучения, формирования понятий, работы с теоремой, начала основываться во второй половине XIX века. В конце XIX и начале XX вв. актуальным стало обсуждение идей о необходимости изменения содержания математического образования. До начала крупной реформы математического образования в 60-х гг. XX в. эти мысли не были реализованы. Значительные успехи в развитии методики обучения математике пока не принимались во внимание педагогами, которые основную задачу видели в поиске дидактических приемов учителя и способов их рационального сочетания. В связи с универсальностью характера этих приемов возникла необходимость их систематизации и обобщения. Дидактика «приняла на себя» решение этой задачи, что способствовало формированию дидактики как самостоятельной научной области. Предметные методики стали рассматриваться как приложения дидактики, другими словами, методические исследования начали проводиться по ходу дидактических идей и касались в основном методов и форм обучения предмету. Вследствие реформы содержания математического образования в середине XX века, методики обучения из прикладных дидактик перестраиваются в самостоятельные научные области, которые должны дать ответы на следующие вопросы: кого учить? зачем учить? чему учить? как учить? [30].

Усвоение новой информации, сила и гибкость ума, критичность, умение планировать действия, способность к аргументации – на все эти компоненты интеллектуального развития человека оказывает большое влияние именно школьный курс алгебры. В связи с абстрактностью алгебраического материала и отсутствием подкрепления его изложения демонстрационно-наглядным материалом, возникает необходимость использования математического моделирования, применения в обучении таких методов как анализ и синтез, индукция и дедукция, сравнение и аналогия, абстрагирование, обобщение, конкретизация, владение которыми способствует усвоению учащимися алгоритмов решения. Усвоение основных понятий, владение алгоритмами решения различного рода уравнений и неравенств, умение выполнять различные преобразования выражений, исследовать функции и строить графики – требование этих знаний от учащихся обуславливается практической направленностью курса алгебры [31]. Вследствие этого, необходимо контролировать понимание учащимися каждой темы из содержания преподаваемой дисциплины. Не только школьники, но и многие студенты стесняются спрашивать непонятные им моменты при объяснении материала или при решении конкретных заданий. Поэтому преподаватель обязательно должен говорить учащимся, что можно задавать возникающие вопросы как во время, так и вне занятий.

В отличие от других естественно-научных дисциплин, математика изучает не предметы реальной действительности, а пространственные формы и количественные отношения объективной действительности. Абстрактность, возникающая вследствие исследования математических объектов, придает математике универсальность и формально логическую выводимость. Многофункциональность математических знаний прослеживается в проникновении методов, особенно метода математического моделирования, в другие области научного знания естественно-научного направления (химия, физика, биология и др.) и гуманитарного направления (психология, экономика, лингвистика и др.). На сегодня проведение исследования в любой области знаний обязательно подкрепляется математической моделью, которая описывает взаимосвязь количественных характеристик различных явлений и процессов. Ввиду постоянно совершенствующейся компьютерной обработки данных роль математических моделей только растет [7, с. 11].

Школьное математическое образование постоянно совершенствуется. Отсюда следует логичность обновления содержания курсов математики. В одной из своих работ Абылкасымова А.Е. подчеркивает, что наряду с вопросом о содержании предмета математики, должна найти свое решение и проблема порядка и последовательности расположения материала для рационального обучения курсу. Для решения этих проблем используются результаты новых исследований отечественных и зарубежных педагогов, методистов и психологов. В работе, автор предлагает следующее определение методики: «*Методика* (от греч. *methodos* – путь исследования, теория, учение) – способ достижения цели, совокупность методов практического выполнения чего-либо. В образовательном процессе этот термин применяется к определенному предметному содержанию» [7, с.14].

Вопросам методики обучения алгебре, содержания курса этого предмета, инновациям в обучении курсу алгебры посвящен ряд исследований, среди которых работы Бондаренко Т.И., Генкуловой О.В., Горловой С.Н., Гриневой Т.В., Дроботуна Б.Н., Кадырбаевой Р.И., Кагазбаевой А.К., Карякина И.И., Косино О.А., Максютина А.А., Пустовойтенко М.В., Сотниковой О.А., Скибы М.А., Утешовой М.А. и др.

В диссертационном исследовании Кагазбаевой А.К. устанавлены противоречия между необходимостью развития системы подготовки специалистов-педагогов нового типа и недостаточной разработанностью частнодидактических проблем подготовки специалистов, между объективными потребностями практики общеобразовательных школ, в том числе и новых типов школ, и уровнем готовности учителей математики к совершенному методическому творчеству. В работе ею была разработана концепция методической подготовки учителя математики в вузе как целостной системы, предложена методика эффективного управления профессионально-методической подготовкой учителя математики, направленной на формирование и развитие у студентов методической культуры, и разработана система учебно-методических заданий по теории и методике обучения математике, направленной на формирование у студентов творческой самостоятельности, учитывающих их индивидуальные возможности и способности [32].

На основе исследования Кадырбаевой Р.И. определен объем и содержание логико-методических знаний, созданы системы упражнений логического характера и выявлены пути и средства рационализации их решения, разработаны материалы для обобщающих алгебраических уроков. Подготовленные методические пособия используются в практике работы средней школы [33].

В диссертационном исследовании Дроботуна Б.Н. была построена методическая система обучения дисциплинам логико-алгебраической ориентации, в частности алгебре. Им были разработаны учебники, учебные и учебно-методические пособия, а также работы учебно-монографического характера, доступные преподавателям вузов, рабочие программы, системы контроля, опорные конспекты и варианты контрольных работ – все эти работы посвящены изучению высшей алгебры. Им же были разработаны и опубликованы рабочие программы факультативных курсов по абстрактной алгебре и математической логике для учащихся старших классов [34].

Утешова М.А. посвятила диссертационное исследование разработке теоретической и практической обоснованной методики по использованию в учебном процессе разноуровневых заданий. Автором теоретически обосновано развитие исследовательской деятельности учащихся при обучении алгебре в основной школе, определены его пути совершенствования и разработана система разноуровневых заданий, направленных на развитие исследовательской деятельности учащихся [35].

Скиба М.А. в своем диссертационном исследовании рассматривает вопросы формирования у будущих учителей математики целостных образов, личностных структур и способностей, которые помогают самостоятельно ориентироваться в современном информационном, деятельностном мире и дает основу для отбора содержания в условиях дифференциации школ [36].

В диссертационной работе Бондаренко Т.И. были разработаны основные направления совершенствования школьного математического образования по алгебре в основной школе, методические рекомендации реализации базисной подготовки по алгебре при личностно-ориентированном подходе к учащимся, позволяющей обеспечить качественное обучение алгебре в основной школе и применение полученных знаний в других областях науки [31].

Сотниковой О.А. предложена научно аргументированная целостная теория выявления содержательных связей в курсе алгебры педагогического вуза, воплощающая продуктивную мысль единства методологии математического познания и организации процесса изучения математического материала посредством структурирования предметного содержания дисциплины с целью придания ему свойства целостности и надлежащей организации самостоятельной работы студента по раскрытию этой целостности. Ею раскрыта внутренняя взаимосвязь между определением целостности математического материала и нюансами процесса его понимания при изучении математики в вузе не только согласно линии освоения знания, но и на базе выделения идейной общности математических теорий. Также, выделены признаки понятия содержательной связи, основанные на идее целостности; представлена систематизация содержательных связей курса алгебры педагогического вуза по герменевтическим принципам, в основании которой лежат виды концептов математических понятий; уточнены элементы педагогической науки в структуре методической системы обучения математике, затрагивающие целеполагание изучения математического содержания, суть которых в том, что нацеленность обучения на понимание математического материала обуславливается особенностью процесса и результата раскрытия содержательных связей, осуществляемых самим студентом в процессе организации адекватной их деятельности на постановку учебной задачи, направленной на выявление содержательных связей, и конструированием собственной деятельности по ее решению. Выявлена система педагогических условий, формирование которых устанавливает нацеленность работы учащегося на раскрытие содержательных связей с помощью создания учебных ситуаций и организацию выполнения студентами специально подобранных учебных заданий. Автором создана модель организации обучения, сосредоточенного на выявление студентами содержательных связей [37].

Горлова С.Н. в своем диссертационном исследовании выявила значимость предметного содержания курса алгебры в формировании методических умений;

определила и решила проблему структурирования предметного содержания раздела «Линейная алгебра» и распределения объема часов, отводимых на изучение каждой темы раздела. Автором аргументирована рациональность использования учебных задач, ориентирующих студента на выполнение методических действий, в качестве средства формирования методических умений будущего учителя математики в учебной деятельности; уточнен категориальный аппарат, относящийся к понятию «методическое задание», установлены основы конструирования методических заданий и требования к их использованию [38].

В работе Пустовойтенко М.В. раскрыта специфика взаимосвязи образовательной и развивающей функций обучения алгебре в педагогическом вузе. Им установлены основные компоненты структуры интеллектуальной деятельности в контексте изучения вузовского курса алгебры (логические, языковые и алгоритмические умения, а также умение оперировать абстракциями достаточно высокого уровня). Автором разработаны основные принципы отбора содержания и организации практических занятий по алгебре с ориентацией на интеллектуальное развитие учащихся, выявлены способы активизации интеллектуальной деятельности студентов на практических занятиях по алгебре, базирующиеся на деятельностной ориентации преподавания, и определено понятие алгоритмической эвристики [39].

Максютин А.А, основываясь на содержании и итоговых целях обучения учебному курсу алгебры и начал математического анализа, определил принцип и технологию построения системы задач; предоставил теоретическое обоснование предложенного подхода к разработке сборника задач; построил многоуровневую систему учебных задач по алгебре и началам математического анализа, позволяющей достигать итоговых результатов заданного уровня и качества [40].

Гринева Т.В. в своих исследованиях акцентирует рубежи формирования понятий курса алгебры и начал анализа с учетом особенности актуализированного подхода (актуализация знаний, мотивация к изучению нового материала, построение математической модели, определение понятия в общую систему понятий, рефлексия) и устанавливает их сущность в согласовании с фазами достижения понимания учащимися исследуемого материала. Автор выявляет такие аспекты смысла математических понятий курса алгебры и начал анализа, как предметный, лингвистический, операциональный и семиотический, раскрытие которых в процессе изучения содействует формированию личностного смысла учащегося об изучаемом понятии. Ею предложены принципы многоаспектности, последовательности, целостности содержания и способов кодирования представленной информации, принцип сравнения для отбора задач [41].

В исследовании Генкуловой О.В. уточнена структура методического обеспечения индивидуальной самостоятельной деятельности студентов; разработано методическое обеспечение индивидуальной работы студентов по курсу «Методика обучения алгебре и началам анализа», которое способствует активному формированию методических умений учащихся и учитывает индивидуальные особенности студентов [42].

Вклад в методику преподавания алгебры у старшеклассников в работе Косино О.А. заключается в том, что автор рассматривает программно-методический комплекс как качественно новый системно-образующий элемент методической системы формирования познавательного интереса; дает уточнение характеристик познавательного интереса старшеклассников, его состава, функций, критериев; взяв в качестве базы выявление уровней сформированности, автор разрабатывает модель процесса формирования познавательного интереса у старшеклассников при изучении алгебры и начал анализа [43].

Все приведенные выше исследования весьма актуальны в рамках нынешнего преподавания математики. Современные цели обучения в школах и вузах существенно поменялись. Если раньше учителя и преподаватели давали как можно больше информации и контролировали ее запоминание обучающимися, то сейчас основной упор делается на развитие учащихся, на умение анализировать и синтезировать данную информацию, умение расширять кругозор, касающийся первоначальной информации. Мордкович А.Г. в своей статье «О некоторых проблемах школьного математического образования» пишет, что «Главная задача учителя сегодня – не набить головы учеников информацией, которая якобы понадобится им в дальнейшей жизни, а научить их добывать нужную информацию самостоятельно, научить осознанному чтению учебной литературы» [15].

В своем исследовании Гусев В.А. пишет об обделении во внимании эмоциональной стороны обучения при преподавании математики, т.е. практически не учитываются эмоциональные особенности личности ученика. Он убеждает, что интерес, являющийся одним из эмоциональных оценок, – это побудитель любой деятельности [44].

Большое количество современных школьников не заинтересованы в изучении математики в школе, причиной чего является недопонимание содержания материала, они проявляют интерес к изучению иностранных языков и компьютерных технологий. Многие учащиеся желают выучиться по специальностям юриста, экономиста, программиста и т.д. Ввиду своего возраста, они не понимают, что именно математические знания дают возможность овладения методами изучения и понимания окружающего мира, учат методам исследования как теоретических, так и практических проблем. Владеющие математикой всегда составляли стратегический ресурс нации [45].

Многие авторы методической литературы по математике подчеркивают необходимость развития мышления учащихся на уроках математики и отмечают, что процесс изучения этого предмета уже сам по себе приводит к умению логически, доказательно мыслить. Конечно, развитие мышления будет усиливаться, если учитель одновременно с обучением математике будет учить умелому применению различных мыслительных приемов. Учитель постоянно напоминает, что при получении новой информации, прочитав из книги, услышав на уроке или при ответе одноклассника, полезно проверить ее достоверность (прием соотнесения); преобразования, приведенные в книге, хорошо бы воспроизводить, по возможности видоизменяя их (приемы воспроизведения и реконструкции). Школьников приучают сопоставлять новый изучаемый материал с уже знакомым, устанавливать сходство и различия (прием сравнения). При воспроизведении изучаемого материала, учитель постоянно требует приводить свои примеры и контрпримеры (прием конкретизации). Оформляя записи в своих тетрадях, учащимся рекомендуют использовать цветовые выделения, различные подчеркивания, стрелки и др. (прием использования стимулирующих звеньев). При изучении определенного текста, учащиеся выделяют из него главное и коротко рассказывают, о чем идет речь (прием составления плана). Применяя такие действия, учащиеся постепенно привыкают ставить перед собой подобные задания, вследствие чего они не просто слушают и читают, механически запоминая материал, а осмысливают и обдумывают его [46].

Школьный теоретический материал излагается, в основном, индуктивно, т.е. из рассмотрения конкретных примеров учеников «подводят» к правилам. Обоснование же этих правил дается дедуктивно, так практические задания выполняются на основании полученных правил и теорем. Также, при обучении алгебре в школе используется и аналогия. Например, по записанному на доске примеру: $3^4 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 81$, ученик может самостоятельно вычислить 5^3. В тетради он запишет: $5^3 = 5\cdot 5\cdot 5$. Проделав аналогичные упражнения несколько раз, он усвоит смысл символа степени. Домашнее задание обычно содержит несколько примеров, которые можно решить по аналогии с тем, что было решено на уроке. При решении задач в алгебре используется анализ. Например, чтобы составить уравнение для решения задачи, выбирают и обозначают неизвестное. Используя данные условия задачи и связывая с ними неизвестное, получают уравнение. Наблюдается процесс пути от неизвестного к известному. Теперь, чтобы решить полученное уравнение, нужно идти от известного к неизвестному, то есть решать синтетически.

В школьном курсе алгебры основной упор делается на вычислительные способности учащихся, на умение решать уравнения, неравенства, задачи и т.д. В основном, решение проходит по определенному алгоритму, который был показан учителем. Многие формулы, необходимые для решения алгебраических заданий, даются в готовом виде. Считаем, что для успешного усвоения основных понятий, определений, теорем алгебры, нужно требовать вывод формул, встречающихся в процессе обучения.

Усугубляет развитие мышления на уроках алгебры процесс подготовки к Единому национальному тестированию ввиду того, что оно проходит в форме теста. В связи с этим, учащиеся не нуждаются в навыках уметь доказывать, думать алгоритмически и даже просто уметь решать уравнения и их системы, так как при прохождении тестирования, многие школьники и абитуриенты подставляют значения из вариантов ответов в уравнения и таким образом находят правильный ответ. В этом можно убедиться, если просмотреть книжкивопросники абитуриентов на Едином национальном тестировании (ЕНТ) и выпускников школ на пробном тестировании: решений в них почти нет, только отмеченные варианты ответов. Часто учителя выпускных классов, при подготовке старшеклассников к ЕНТ, не учат их решать, а учат «зубрить» правильные варианты ответов теста. Последнее время не редко встречаются случаи, когда учителя сами не могут решить задания ЕНТ. Это говорит о некачественной подготовке учителей математики педагогическими вузами.

В современном педагогическом вузе преподавание математических дисциплин сводится в основном к изучению определений, теорем и их доказательств, а решение задач дается в стандартном виде – все это ведет просто к запоминанию студентами материала и воспроизведению его на экзаменах [45, p. 3484].

В связи с действующей в вузах Казахстана кредитной технологией обучения подготовка специалистов основана на самообразовании и самосовершенствовании. Эта технология подразумевает три основные функции работы преподавателя со студентами. Первая функция – установочная, согласно которой преподаватель должен ввести в тему, поставить цель, задачи, описать практическую полезность, сущность и взаимосвязь основных разделов содержания материала, дать рекомендации по работе с учебно-методическими пособиями и др. Вторая функция преподавателя – консультативно-корректировочная. Она состоит в оказании консультативной помощи в реализации учебных действий в самостоятельной работе студентов, проведении индивидуальных консультаций и осуществлении соответствующих корректировочных действий. Данную функцию в образовательном процессе выполняют тьюторы. Третья функция преподавателя – контрольно-оценочная. Она предполагает проведение оценивания знаний, умений и навыков студентов в различных формах (письменный или устный экзамен, тестирование и др.), организацию диалога по выявлению их основных затруднений, демонстрацию преподавателем «правильных» действий, взаимодействия, эталонных способов работы в позиции эксперта или контролера [47].

Типовой единичный цикл самостоятельной работы студентов под руководством преподавателя (СРСП) включает следующие четыре основные функции. Первая – предполагает реализацию активного восприятия студентами информации преподавателя, полученной в период установочных занятий по учебной дисциплине. Вторая функция предполагает, что студенты самостоятельно, на основании рекомендаций преподавателя, изучают учебно-методические пособия, литературные источники, выполняют домашние задания, контрольные и курсовые работы и т.д. На этом этапе от студентов требуется знание методов работы, фиксация своих затруднений, самоорганизация и самодисциплина. Третья функция студентов состоит в анализе и систематизации своих затруднительных ситуаций, выявлении причин затруднений в понимании и усвоении ими учебного материала, выполнении других учебных действий. Студенты переводят неразрешимые затруднения в систему вопросов для преподавателя (ранжируют их, упорядочивают, оформляют), строят собственные версии ответов на эти вопросы. Четвертая функция студентов состоит в обращении к преподавателю за соответствующими разъяснениями, советами, консультациями [47, с. 38].

Формами обучения курсу алгебры в высших учебных заведениях являются лекция, практическое занятие, семинар, спецсеминар и др.

Обычно занятия студентов проходят в форме «лекция-практика». На лекционных занятиях алгебры преподаватель дает начальные сведения, основные определения и понятия, формулировки теорем и источники литературы, где обучающиеся могут посмотреть дополнительную информацию, доказательства теорем и т.д. На практических занятиях преподаватель обычно показывает алгоритм решения заданий по пройденной теме на конкретном примере и дает задание студентам для самостоятельной работы. Как правило, занятия по алгебре преподаватели начинают так, как будто для студентов это новый курс и раньше они его не проходили. Редко раскрытие темы сопровождается связью со школьным курсом алгебры. Например, для решения систем n линейных уравнений с n неизвестными рассматриваются метод Гаусса и правило Крамера, причем методы решения систем линейных уравнений из школьного курса не рассматриваются. Большой объем содержания алгебры, как в прочем и других дисциплин, дается на самостоятельное изучение, к чему студенты-первокурсники совсем не готовы.

Занятия СРСП могут проводиться в различной форме: это может быть семинар, в котором будут затронуты более трудные для студентов вопросы, можно предложить студентам материал, который не был включен в содержание лекции и т.д. Занятия СРСП должны иметь консультативный характер.

Самостоятельная работа студентов (СРС) включает в себя подготовку докладов, материалов по теме, заданной преподавателем на предшествующем занятии. Преподаватель составляет тематику, помогает подобрать тему или задание для самостоятельной внеаудиторной работы студента.

Итак, преподавание алгебры в школе и педагогическом вузе должно основываться на принципе преемственности. Новые знания должны опираться на уже приобретенные знания, а новые методы преподавания должны основываться на прежних методах, причем не только преподаватели вузов должны знать организацию обучения в школе и корректировать свою работу согласно нововведениям в школьный процесс обучения, но и учителям необходимо иметь представление об организации обучения в вузах и соответственно вести работу с учащимися, направленную на их дальнейшее обучение в вузе. Решению указанных проблем и выявлению методических особенностей в обучении курсу алгебры в школе и педвузе посвящена следующая глава.

Выводы по 1 разделу

В первом разделе мы рассмотрели современное состояние обучения курсу алгебры в общеобразовательных школах и педагогических вузах.

1. Анализ содержания школьного и вузовского курсов алгебры (на примере дисциплин «Алгебра-1» и «Алгебра-2» в КазНПУ им. Абая) показал, что материал данного курса в педвузе слабо охватывает школьные разделы, что нарушает преемственность школы и вуза и обучение не дает должного результата в подготовке будущего учителя математики. Текущее содержание данного курса в педагогическом вузе имеет научный характер и нацелен на изучение обучающимися общей алгебры.

Считаем необходимым скорректировать содержание курса алгебры в педагогическом вузе с ориентацией его на подготовку будущего учителя математики. Для этого необходимо отобрать для обучения студентов такой материал из разделов алгебры, который дополняет и расширяет школьные знания и дает возможность обучаемым овладеть необходимыми им в будущей профессиональной деятельности компетенциями.

2. Вопрос преемственности в обучении курсу алгебры в школе и педагогическом вузе остается актуальным. В современных учебных планах школы преемственность прослеживается, что нельзя сказать о программе курса алгебры в вузе. Студентам-первокурсникам, еще не адаптированным к организации обучения в вузе, преподают алгебру, начиная с абстрактных понятий (определения группы, кольца, поля и др.), что приводит к непониманию основных терминов и понятий алгебры.

Для эффективного восприятия содержания курса алгебры, необходимо начинать обучение с определения фундаментальных понятий.

Преемственность должна отражаться не только в содержании школьного и вузовского курсов алгебры, но и в методах и формах обучения. Вопросы преемственности необходимо рассматривать как в содержательном, так и в процессуальном ракурсе. Считаем нужным совершенствовать методику обучения курсу алгебры в педагогическом вузе и ориентировать данный курс на подготовку будущих учителей математики.

3. В общеобразовательных школах уроки в основном проходят традиционно, не считая 5 и 7 классы, где используются методы и формы, которые предлагает обновление содержания образования.

Для проведения уроков алгебры в школе необходимо: использовать методы, подразумевающие активную деятельность учащихся, развивать навыки самостоятельной и исследовательской работы, применять современные информационно-коммуникационные технологии для визуализации основных алгебраических понятий, ввести в практику учителей уроки-лекции, семинарские занятия и др.

В связи с переходом на обновленное содержание среднего образования произошли изменения не только в содержании этого курса, но и в методике и формах обучения курсу алгебры. Поэтому должны меняться подходы к обучению алгебре и в педвузах, где, как известно, образовательный процесс основан на самостоятельной работе обучающихся. На традиционных лекциях и практических занятиях в связи с постоянной нехваткой времени (малое количество часов на изучение курса) студенты плохо усваивают предлагаемый материал. Цель на занятиях должна заключаться в том, чтобы задействовать всю группу студентов, вследствие чего они будут эффективнее усваивать необходимый объем знаний и умений. Поэтому предлагаем лекционные и практические занятия проводить с активным участием самих студентов, что благополучно будет влиять на их методическую подготовку.

2 ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ КУРСУ АЛГЕБРЫ В ШКОЛЕ И ПЕДАГОГИЧЕСКОМ ВУЗЕ

2.1 Методика организации обучения курсу алгебры в современной школе

В эпоху стремительных перемен система образования Республики Казахстан осуществляет переход на новое содержание школьного образования: от «человека знающего» к «человеку, способному творчески мыслить, действовать, саморазвиваться».

Обновление содержания образования – это пересмотр структуры и содержания программ, методов и форм организации обучения. Термин «обновление содержания» употребляется условно, поскольку реформированию подлежит не только содержание, но и организация учебного процесса, и система оценивания. В этом контексте ученик не должен оставаться пассивным «получателем» знаний, умений и навыков. Если в традиционной системе образования учитель обеспечивал информацией, то теперь учитель выполняет роль помощника, пассивный ученик становится активным. Если результатом обучения было запоминание отдельных фактов, то в новых условиях знания фокусируются на развитие навыков. Также, в условиях обновления содержания образования должен предусматриваться индивидуальный подход к учащимся [48].

В дидактике структура урока определяется следующими компонентами: 1) актуализация прежних знаний и способов действий; 2) формирование новых знаний и способов действий; 3) применение умений и навыков [49].

Основным документом, в котором пошагово раскрывается опыт и мастерство учителя – это план урока (традиционный поурочный план или краткосрочный план урока).

Составляя план урока, учитель продумывает каждый момент предстоящего урока, какие вопросы могут возникнуть у учащихся и как на них дать исчерпывающие ответы, как преподать новый материал, чтобы заинтересовать учеников в его изучении и в дальнейшем применении полученных знаний.

Каждый учитель с большой ответственностью должен подойти к постановке цели каждого урока, ведь от этого зависит вся дальнейшая организация занятия. Формирование новых понятий, умений и навыков на уроках алгебры проходит индивидуально, потому что способность абстрагировать у детей одного и того же возраста различна. Некоторые схватывают новое понятие сразу, а другие – только по мере постоянного повторения на протяжении нескольких уроков. Умение, конкретно в алгебре, – это применение знаний к решению задач, навык – умение, которое под влиянием решения ряда упражнений становится почти автоматическим [50]. То есть, чтобы развить достаточные умения и навыки в решении задач по алгебре, необходимо получение знаний в полном объеме и в доступной форме.

На всех ступенях обучения учащиеся должны ощущать присутствие связи между каждой темой, рассматриваемой в процессе изучения курса алгебры.

Учитель в школе и преподаватель в вузе во время объяснения новой темы должны давать краткую информацию о практической значимости изучения данной темы, ведь все чаще от современных школьников и студентов слышится вопрос: «А зачем надо это изучать?». Приводя лишь некоторые факты актуальности какой-то темы, можно не только заинтересовать учащихся, но и натолкнуть на углубленное изучение темы. Учитель не должен также забывать подчеркивать связь между пройденным материалом и новым.

Существует проблема методов обучения, которая кратко формулируется с помощью вопроса: как учить? Чтобы решить этот вопрос, во-первых, нужно выяснить для чего это изучается и какие знания, умения и навыки должны приобрести учащиеся вследствие изучения; во-вторых, необходимо выяснить структуру и другие особенности содержания обучения, как излагается материал в учебнике; в-третьих, надо знать уровень имеющихся знаний, умений и навыков, на которые могут опираться обучающиеся в процессе изучения данного содержания. Успешно решить вопрос как? возможно только при наличии достаточной информации по вопросам: для чего? (или зачем?), чему? и кого? Таким образом, учитывая цели обучения, специфику и структуру содержания и особенности мыслительной деятельности учащихся, уровня полученных ими знаний, умений и навыков в процессе предшествующего обучения, можно решить проблему методов обучения. Описание каждого метода обучения должно включать: 1) описание обучающей деятельности учителя; 2) описание познавательной деятельности учащегося; 3) связь между ними или способ, каким обучающая деятельность учителя управляет познавательной деятельностью ученика [51].

Обучение курсу алгебры в школе приходится на периоды среднего и старшего школьных возрастов, т.е. в 7-9 классах и 10-11 классах. Учитывая это, учитель должен использовать соответствующие методы обучения. Например, излагая новый материал на уроках посредством лекции, обязательно должна быть дана историческая справка о появлении или происхождении понятий, чисел, формул, функций и т.д. Переходя к закреплению новой темы на практическом этапе урока, можно использовать групповую работу, работу в парах. Необходимо включать активные методы и метод проблемного обучения, которые становятся более эффективными методами обучения математике в средней школе [52].

Главные содержательные линии школьного курса алгебры – это выражения и их преобразования; функции, их свойства и графики; уравнения и неравенства, их системы.

С первых уроков алгебры школьники начинают изучать новые понятия, начальным из которых является буква, как обозначение произвольного числа. По мере изучения алгебры буква меняет свой смысл: число из некоторого множества чисел, потом может означать и некоторое произвольное множество, а далее и некоторое высказывание. Также учащиеся знакомятся со многими терминами, действиями и т.д. Если раньше школьники привыкли, что результатом суммы, разности, умножения или деления чисел является конкретное число, то теперь, начав изучать алгебру, сталкиваются с выражениями, которые кажутся незаконченными.

Например, выполняя соответствующие действия в числовом выражении, получали конечный результат:

$$(2+3\cdot 4)\cdot 5-10=(2+12)\cdot 5-10=14\cdot 5-10=70-10=60,$$

то есть: $(2+3\cdot 4)\cdot 5-10=60$.

Теперь:

$$(a+3b)\cdot 4-2a+2\cdot(1-4b)=4a+12b-2a+2-8b=2a+4b+2,$$

то есть $(a+3b)\cdot 4-2a+2\cdot(1-4b)=2a+4b+2$ – здесь в результате проделанных действий получаем выражение, содержащее операции с буквами.

Даже знак равенства приобретает новый смысл: если раньше (в арифметике) этот знак обозначал результат действий над числами, то теперь (в алгебре) – это знак некоторого отношения, который может быть верным или неверным [26, с.34-35].

Правила тождественных преобразований в алгебре, несколько из которых мы использовали в вышеприведенном примере, представляют собой некий алгоритм последовательности действий. Часто наблюдается такая картина, что ученик знает формулировки таких правил, но пользоваться ими не может или делает это неправильно. Чтобы научить школьников применять свои знания на конкретных примерах, не нужно спрашивать правило отдельно, а потом просить применить его при решении задания. Необходимо, чтобы учащийся умел связать выученное правило и конкретный пример в одно целое. Например, нужно решить уравнение:

$$5(3x-4)-17=68$$

Учитель, вызывая к доске ученика, просит решить уравнение, проговаривая вслух каждое действие.

Ученик записывает на доску решение и сопровождает записи пояснением: «Умножим множитель 5 на каждый член разности, стоящих в скобках. Тогда, 5 умножив на $3x$, получим $15x$; 5 умножив на -4, получим -20, минус 17 равно 68». На доске появляется запись:

$$15x-20-17=68$$

Ученик продолжает: «Приведем подобные слагаемые, минус 20 минус 17, складываем абсолютные величины и записываем их сумму со знаком «-», получаем -37. Тогда, $15x$ минус 37 равно 68. Теперь -37 перенесем в правую часть уравнения, получим $15x$ равно 68 плюс 37. Сумма 68 и 37 равна 105. Получили, что $15x$ равно 105. Откуда x равен 105, деленное на 15, или x равен 7». На доске появилась соответствующая запись:

$$15x-37=68$$

$$15x=68+37$$

$$15x=105, \text{ откуда } x=7$$

Ответ: $x=7$.

Конечно, такое подробное описание каждого действия можно требовать только до тех пор, пока все учащиеся класса не обретут навыки работы с действиями над выражениями.

Раскрытие скобок в алгебраических выражениях не вызывают затруднений у школьников, что нельзя сказать об «обратной операции». Часто, при разложении многочленов на множители (на произведение одночленов), школьники допускают много ошибок, они не видят общую часть (одночлен), которую можно вынести за скобки. Чтобы свести такие проблемы к минимуму, необходимо включить в предлагаемые для решения школьникам такие задания, как, например:

Какое выражение должно стоять в скобках:

$3x-5y+4z-2t+1=3x-5y+(...)$

$2x+3y-11z-7t+3=2x-(...)$ и т.п.

На уроках алгебры хорошо выстраивается логика действий, что учит учащихся анализировать, применять свои приобретенные знания и навыки в конкретной ситуации.

Рассмотрим этапы формирования умения в ходе традиционного урока алгебры. Первым шагом учитель показывает решение примера, причем разъясняет каждое действие. Потом у доски решают примеры на новое правило ученики, которые тоже объясняют каждый шаг, сделанный при решении. Если при решении примеров ученики допускают ошибки, учитель должен не только исправить их, но и опровергнуть. Конечно, задания для учеников должны быть подобраны с расчетом на их силы. Также, учителю нужно иметь дополнительные упражнения для детей, быстро схватывающих новый материал, чтобы занятия для них не становились скучными и простыми [50, с. 12].

Педагогу рекомендуется рассказывать о некоторых абстрактных понятиях алгебры, связанных с конкретными школьными разделами, чтобы у учащихся не возникало чувство исчерпанности этого курса изученным в школе материалом. Это будет вызывать интерес к дальнейшему изучению предмета [53].

Ввиду того, что школьники в результате обучения должны уметь решать не встречавшиеся им ранее задачи, т.е. не только задачи из учебника, правильно подбирать их из разных источников, особенно для контроля за результатами обучения [54]. Поэтому целесообразно использовать дидактические материалы по алгебре, которые состоят из нескольких вариантов самостоятельных, проверочных и контрольных работ, тестовых заданий. Можно использовать сборники задач, которые содержат задачи повышенной трудности, для более успешного закрепления теоретических знаний и практических умений учащихся [55].

Рассмотрим методику организации обучения курсу алгебры в школе на примере линии «Решение уравнений и их систем».

Обучение решению линейных уравнений с одной неизвестной и систем линейных уравнений с двумя неизвестными начинается в курсе математики 6 класса общеобразовательной школы. Нагрузка отведенных на обучение часов, следующая: «Линейные уравнения с одной переменной» (16 часов), «Линейные уравнения с двумя переменными и их системы» (21 час) [56]. В 7 классе, уже в курсе алгебры, решение линейных уравнений осуществляется только в разделе «Повторение математики 5-6 классов» (6 часов) и в «Повторении курса алгебры 7 класса». В 8 классе решение уравнений встречается в разделе «Квадратные уравнения» в количестве 31 часа. В 9 классе учащихся обучают решению уравнений и их систем в количестве 25 часов [11, с. 10].

В 10 классе проходит обучение решению тригонометрических уравнений и неравенств (15 часов). В 11 классе учащиеся обучаются решению иррациональных уравнений и их систем, а также решению показательных и логарифмических уравнений и неравенств (20 часов) [14, с. 8].

Обучение решению уравнений должно проходить с соблюдением преемственности. В 6 классе определение линейного уравнения с одной переменной дается, как: «Уравнение вида $ax=b$, где x – переменная (неизвестное число, которое нужно найти), a и b – некоторые числа, называется линейным уравнением с одной переменной» [57]. Решение уравнения в общем виде записывается следующим образом: $x=b \div a$ или $x=\frac{b}{a}$.

Пример 1. Решим уравнение $2x=10$.

$x=\frac{10}{5}$, т.е. $x=2$.

Ответ: $x=2$.

Следует обратить внимание, что если уравнение задано следующим образом:

$$3x+9=0,$$

то при решении этого уравнения необходимо свободный член (число 9) перенести в правую часть уравнения, а затем найти неизвестное.

$$3x=-9, \text{ откуда } x=-3$$

Считаем, что вид линейного уравнения с одной неизвестной удачнее было бы записывать как: $ax+b=0$, т.к. далее уравнения других видов обычно даются уже в аналогичном виде. Тогда решением этого линейного уравнения называют такое число, которое при подстановке его вместо x, уравнение перейдет в тождество.

Далее, решение линейных уравнений усложняется введением скобок в выражения уравнений.

Пример 2. Решите уравнение $2(2x+3)-5=17$

Первым шагом раскроем скобки в левой части уравнения: $4x+6-5=17$, откуда получим, что: $4x+1=17$. Теперь перенесем 1 из левой части уравнения в правую:

$$4x=17-1$$

$$4x=16, \text{ откуда } x=4.$$

Для того, чтобы школьники уверенно владели понятием «уравнение», необходимо предлагать им упражнения по составлению уравнений, что будет являться органическим дополнением к обычным упражнениям по решению уравнений. Для этого можно использовать следующие задания.

Например, нужно составить уравнение, решением которого будет $x = 4$. Тогда, запишем это решение в виде $x - 4 = 0$. Теперь, к обеим частям полученного уравнения прибавим одно и тоже выражение:

$$x - 4 + (5x + 7) = 5x + 7$$

После тождественных преобразований уравнение приобретает следующий вид:

$$x - 4 + 5x + 7 = 5x + 7$$
$$6x + 3 = 5x + 7$$

В результате, мы получили линейное уравнение, решением которого является $x = 4$.

В содержание практических заданий школьного курса алгебры рекомендуем включить уравнения, решениями которых будут являться бесконечное множество значений неизвестного или пустое множество, т.е. не имеет решений. Например:

1) Решите уравнение $3x + 6(x - 5) = 5x - 2(4 - 2x)$

Во-первых, раскроем скобки в уравнении:

$$3x + 6x - 30 = 5x - 8 + 4x$$

Теперь проведем тождественные преобразования:

$$9x - 30 = 9x - 8$$
$$9x - 9x = 30 - 8$$
$$0 = 22$$

Итак, мы получили неверное равенство. Это значит, что уравнение не имеет решений или другими словами, решением уравнения является пустое множество.

Ответ: не имеет решения (Ø).

2) Решите уравнение $4x - 2(-3x - 7) = 2(x + 1) - 2(3 - 4x) + 18$

Раскроем скобки:

$$4x + 6x + 14 = 2x + 2 - 6 + 8x + 18$$

Применив тождественные преобразования, получим:

$$10x + 14 = 10x + 14$$
$$10x - 10x = -14 + 14$$
$$0 = 0$$

Получили верное равенство, не зависящее от *x*. Это значит, что при любом значении *x,* данное равенство будет выполнятся, т.е. решением уравнения является множество всех чисел.

Ответ: *x* – любое.

При решении этих уравнений важно объяснить школьникам почему в первом уравнении при «исчезновении» *x,* уравнение не имеет решений, а во втором – имеет множество решений.

Часто, понимание решений таких уравнений ставит учеников в трудное положение – он не понимает, почему одно из двух уравнений, имеющих одинаковую структуру, имеет решение, а другое – нет. Понимание сущности данного вопроса можно достигнуть посредством составления уравнения с данным свойством. Таким образом учитель имеет возможность показать учащимся составление уравнений, не имеющих решений [58].

Например, составим уравнение, которое сведется к неверному равенству: 5=4. Для этого, для данного соотношения применяем несколько преобразований:

$$5+x=4+x$$
$$(5+x)\cdot 3=(4+x)\cdot 3$$
$$(5+x)\cdot 3=12+3x$$
$$(5+x)\cdot 3=8+4x+4-x$$
$$\frac{(5+x)\cdot 3}{4}=\frac{8+4x+4-x}{4}$$
$$\frac{(5+x)\cdot 3}{4}=2+x+\frac{4-x}{4}$$

Таким образом, мы получили уравнение, которое при решении будет сводиться к неверному равенству 5=4, что означает отсутствие корней уравнения.

Следующим этапом изучения уравнений является изучение раздела: «Линейные уравнения с двумя переменными и их системы».

Определение: Линейным уравнением с двумя переменными x и y называется уравнение вида $ax+by+c=0$, где a, b, c – числа, причем a и b одновременно не равны 0 [57, с. 341].

Решением такого уравнения является множество пар чисел, при подстановке которых в данное уравнение, получается тождество. Способом решения линейного уравнения является построение графика линейной функции, полученной из данного уравнения. Нам известно, что графиком линейной функции является прямая. Значит, решением линейного уравнения с двумя неизвестными – это пары чисел, являющихся координатами точек, лежащих на этой прямой.

Самое основное, что должны усвоить школьники в этой теме – это то, что решением линейного уравнения с двумя неизвестными является ***множество пар чисел***.

Пример 3. Решите уравнение: $4x+3y-11=0$.

Выразим одну переменную через другую, т.е.

$$4x+3y=11$$
$$3y=11-4x$$
$$y=-\frac{4}{3}x+\frac{11}{3}.$$

Решение уравнения $4x+3y-11=0$ – пары чисел, являющихся координатами точек, лежащих на прямой, полученной при построении графика функции $y=-\frac{4}{3}x+\frac{11}{3}$ (рисунок 2).

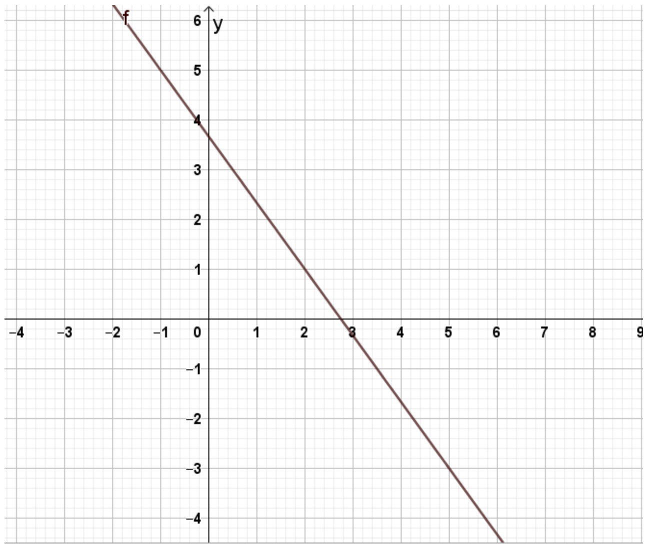

Рисунок 2 - график функции $y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$

Решением системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными является пара чисел, которая удовлетворяет одновременно обоим уравнениям системы. Существует несколько способов решения таких систем. В программе 6 класса рассматриваются два из них: «способ сложения» и «способ подстановки».

Суть «способа сложения» – исключение одного из неизвестных уравнения. Для этого в уравнениях умножением на нужное число, выравниваются коэффициенты при одной из неизвестных. Потом одно из уравнений умножается на -1, чтобы коэффициенты стали противоположными. Далее складывая уравнения, получаем линейное уравнение с одним неизвестным, которое уже умеем решать. Вычислив значение этого неизвестного и подставив его в одно из уравнений системы, найдем значение второго неизвестного. Таким образом, найдем пару чисел, которая и будет решением системы.

«Способ подстановки»: выражаем одно неизвестное через другое в одном из уравнений. Подставив полученное выражение вместо выраженного неизвестного, получим линейное уравнение с одним неизвестным. Найдя значение этого неизвестного и подставив его в одно из уравнений, найдем значение второго неизвестного. Решением системы также будет пара чисел.

Необходимо обратить внимание учащихся, что каким бы способом не решали уравнения и системы уравнений, решение всегда будет одно и тоже.

Научить составлять самостоятельно системы линейных уравнений можно следующим образом:

Сначала запишем общий вид системы линейных уравнений

$$\begin{cases} Ax + By = K \\ Cx + Dy = M \end{cases}$$

Для того, чтобы система уравнений имела решение, необходимо, чтобы выполнялось условие: $A \cdot D \neq B \cdot C$.

Пусть решением составляемой нами системы уравнений будет являться пара чисел $x = 3$ и $y = -2$. Тогда, перепишем нашу систему, подставляя значения x и y.

$$\begin{cases} A \cdot 3 + B \cdot (-2) = K \\ C \cdot 3 + D \cdot (-2) = M \end{cases}$$

Коэффициентам $A = a,\ B = 2a + b,\ C = 3a,\ D = a + 3b$. Можно проверить, что условие $A \cdot D \neq B \cdot C$ выполняется. Теперь, выразим коэффициенты K и M через введенные параметры

$$K = 3 \cdot a - 2 \cdot (2a + b) = 3a - 4a - 2b = -a - 2b$$

$$M = 3 \cdot 3a - 2 \cdot (a + 3b) = 9a - 2a - 6b = 7a - 6b$$

Следующим шагом, когда все коэффициенты системы уравнений выражены через введенные нами параметры, дадим a и b числовые значения.

Например, $a = 1$, $b = 2$. Вычислим соответствующие значения коэффициентов:

$$A = 1,\ B = 2 + 2 = 4,\ C = 3,\ D = 1 + 6 = 7,\ K = -1 - 4 = -5,\ M = 7 - 12 = -5$$

Подставим эти значения в уравнения системы, получим

$$\begin{cases} x + 4y = -5 \\ 3x + 7y = -5 \end{cases}$$

Решив эту систему, можно убедиться, что ее решением действительно является пара чисел $x = 3$, $y = -2$ [58, с. 180].

Для реализации преемственности обучения в системе «школа-педвуз» считаем необходимым вводить уроки-лекции и уроки-семинары в школьный процесс обучения, которые приближают к вузовскому процессу организации обучения курсу алгебры. В этом случае уроки-лекции возможно проводить по темам, в которых объем содержания теоретического материала достаточно большой.

Цель данного урока должна заключаться в том, чтобы научить детей воспроизводить материал урока, пользуясь опорной схемой, уметь выбирать и записывать главное и формулировать тезисы. В ходе урока учитель должен держать обратную связь, задавая вопросы и проблемные задания учащимся по новому материалу.

Рассмотрим пример урока-лекции на тему: «Квадратные уравнения».

Переходя к изучению квадратных уравнений в 8 классе, важно напомнить учащимся свойства числовых равенств, которые мы применяем для решения уравнений.

Перед тем, как ознакомить учащихся с новым материалом, дадим краткую историческую справку и объясним практическую значимость квадратных уравнений.

Необходимость решать квадратные уравнения еще в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков, с работами военного характера, с развитием астрономии и самой математики. В настоящее время квадратные уравнения применяются в расчетах в авиации, в космосе, в физике, при построении различных сооружений, в спорте и т.д.

Квадратные уравнения умели решать еще в далеком прошлом. Способ решения заключается в геометрической интерпретации квадратного уравнения.

Например, нужно решить квадратное уравнение: $x^2+8x-48=0$.
Перепишем его в следующем виде:

$$x^2+8x=48$$

$$x^2+8x+16=48+16$$

Выражения $x^2+8x+16$ и $48+16=64$ геометрически представляют собой один и тот же квадрат (рисунок 3):

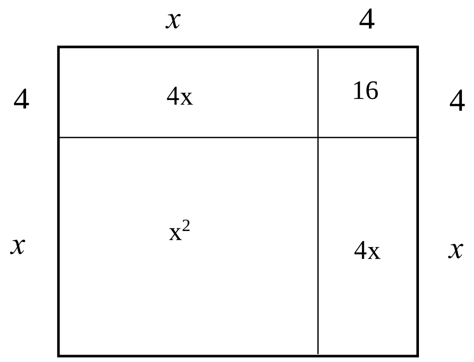

Рисунок 3 - Геометрическая интерпретация квадратного уравнения

Получаем, что $x+4=8$, откуда $x=4$. В древности рассматривались только положительные числа.

Для изучения квадратных уравнений сначала рассмотрим следующую задачу.

Требуется огородить участок прямоугольной формы площадью 6 м^2, одна сторона (длина) которого огорожена. Каких размеров прямоугольный участок можно огородить, если имеется заготовленный материал для ограды длиною 8 м? [17, с. 50].

Здесь для наглядности можно нарисовать на доске соответствующий рисунок. Все принятые для решения задачи обозначения нанести на рисунок.

Решение. Из условия задачи следует, что для одной стороны участка ограждения не требуется. Тогда нам требуется оградить только три стороны участка с помощью имеющейся ограды. Следуя из того, что площадь прямоугольного участка равна произведению его длины и ширины, и обозначив ширину участка через x, причем нужная нам длина будет равна $8-2x$, выразим эту площадь: $x\cdot(8-2x)$=6. Раскрыв скобки в получившемся выражении, получим следующее уравнение: $8x-2x^2=6$. Преобразовав это выражение, получим: $x^2-4x+3=0$. Перепишем это уравнение следующим образом: $x^2=4x-3$, и решим его графическим способом. Рассмотрим обе части уравнения как две отдельные функции: $y = x^2$ и $y = 4x - 3$. Решением уравнения будет являться абсцисса точки пересечения графиков двух функций. Графиком первой функции будет являться парабола, графиком второй функции – прямая (рисунок 4).

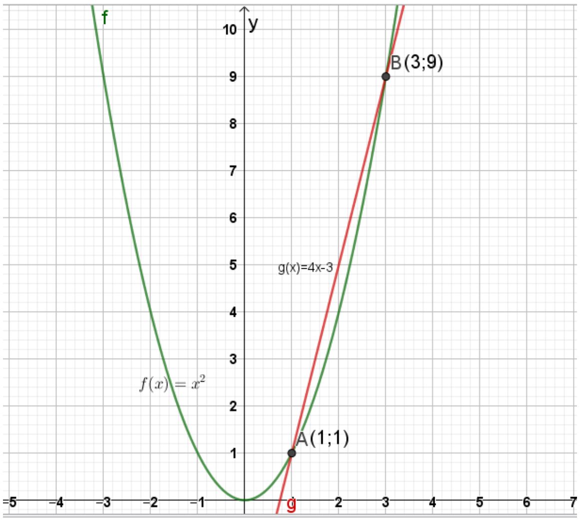

Рисунок 4 - Графики функций $y = x^2$ и $y = 4x - 3$

На рисунке видно, что графики функций пересекаются в двух точках, абсциссы которых равны 1 и 3. Значит квадратное уравнение имеет два корня, но если подставить полученные значения в уравнение, то получим, что условию задачи удовлетворяет только $x = 1$. Второй полученный корень $x = 3$ не удовлетворяет условию задачи, ввиду того, что длина участка не может быть короче его ширины.

Теперь можно дать основные определения.

Определение. Уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

где a, b, c – любые действительные числа, причем $a \neq 0$, а x – неизвестная, называется **квадратным уравнением** [17, с. 51].

Здесь, актуально спросить у учащихся, может ли коэффициент a принимать значение, равное нулю. Ответ обязательно должен быть обоснованным.

В уравнении (1) a называют *первым коэффициентом,* b – *вторым коэффициентом* и c – *свободным членом.*

Урок-лекцию предлагаем сопроводить следующей блок-схемой (рисунок 5). Алгоритм решения квадратного уравнения способом вычисления дискриминанта, которая будет являться опорной в написании конспектов.

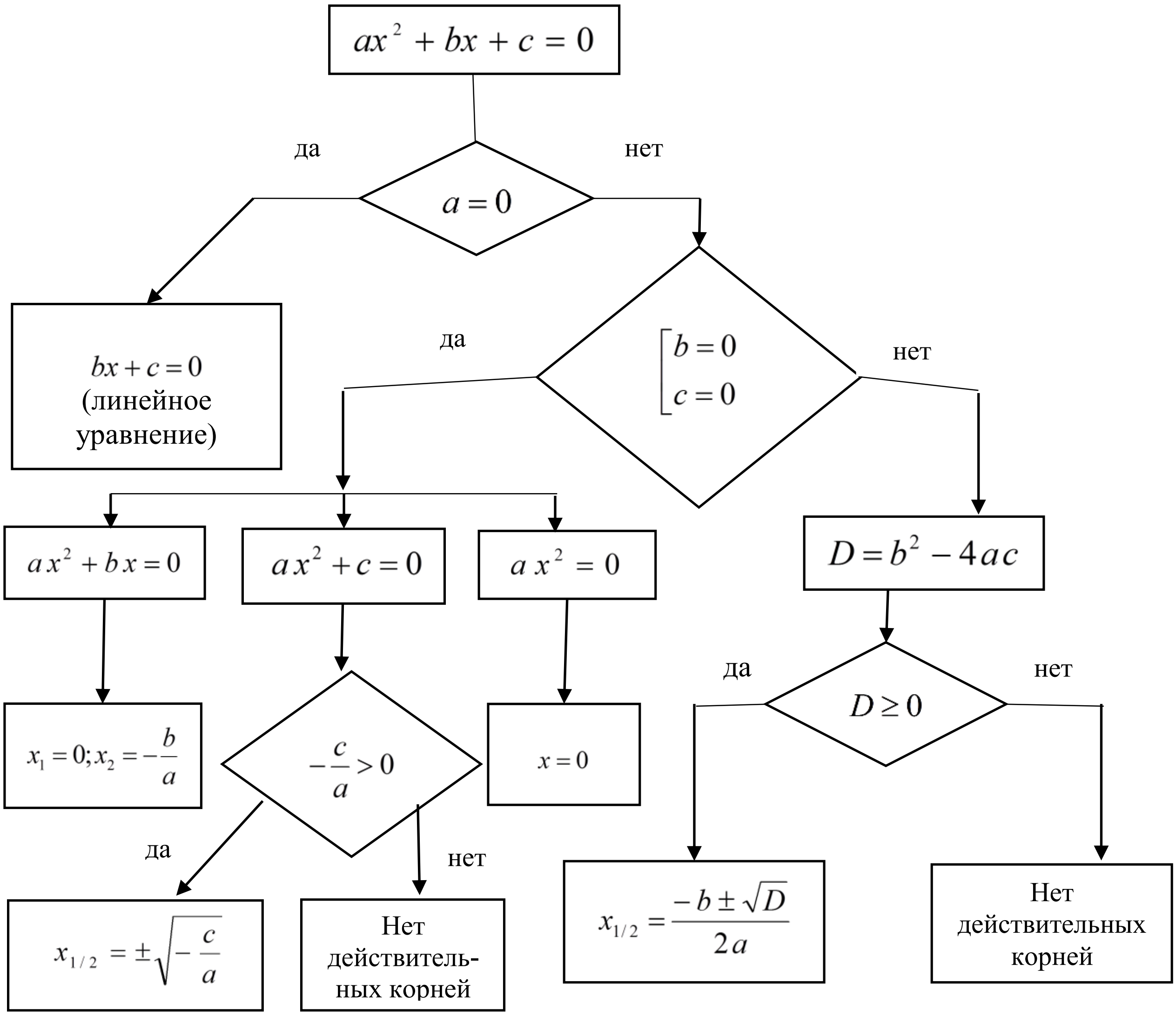

Рисунок 5 - Алгоритм решения квадратного уравнения способом вычисления дискриминанта

На уроках-лекциях развиваются навыки записи конспектов лекций для дальнейшего обучения в организациях высшего образования, возникает необходимость научить учащихся средней школы пользоваться математическим языком символов: символ $\forall$ обозначает понятие «любое значение», символ $\exists$ – «существует», символ $\in(\notin)$ – «принадлежит» («не принадлежит»), символ $\neg$ – «отрицание», символ ∞ – «бесконечность», символ $\Rightarrow$ – «отсюда следует» и т.д., которые в школьном курсе можно применять при записи условий теорем и их доказательств. Ввиду того, что многие школьники не могут воспроизводить письменно математический текст, который они просто слышат, а учитель не пишет его на доске, можно на уроках проводить необъемные математические диктанты на 3-5 минут.

Вывод формул для нахождения корней квадратного уравнения в школе традиционно используют способ дополнения до полного квадрата уравнения, записанного в общем виде, что обычно трудно усваивается учащимися. Вследствие этого можно использовать метод неопределенных коэффициентов, который часто используется в высшей математике, но доступен к пониманию школьников и в то же время знакомит их с данным методом [58, с. 319]. Покажем вывод формул.

Пусть дано уравнение: $ax^2+bx+c=0$

Перепишем его в виде: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$.

Нам необходимо привести это уравнение к виду $(x+p)^2-k^2=0$

Наша задача: выразить коэффициенты a, b, c через p и k. Если нам удастся это сделать, то корни уравнения можно будет найти разложением левой части по формуле разности квадратов, то есть:

$$[(x+p)-k][(x+p)+k]=0$$

Тогда:

$$[x+p-k][x+p+k]=0$$
$$[x-(-p+k)][x+(p+k)]=0$$

Откуда:

$$x_1=-p+k$$
$$x_2=-p-k$$

Итак, рассмотрим оба уравнения, которые запишем друг под другом (во втором уравнении раскроем скобки):

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$x^2+2px+p^2-k^2=0$$

Чтобы эти два уравнения стали тождественными приравняем соответствующие коэффициенты при x^2, x и свободные члены. Получим:

$$\frac{b}{a}=2p\text{, откуда } p=\frac{b}{2a};$$
$$p^2-k^2=\frac{c}{a}$$

Подставив в последнее уравнение выраженный через a и b коэффициент p, выразим коэффициент k.

$$k^2=p^2-\frac{c}{a}$$
$$k^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$
$$k^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$
$$k_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

Теперь, подставив найденные выражения *p и k* в выражения для нахождения корней первоначального квадратного уравнения, получим следующие формулы:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

или

$$x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Учебные программы обновленного содержания образования для средней школы предполагают гораздо более высокий уровень развития функциональной грамотности, чем было ранее. Подразумевается, что учащийся будет обладать не просто набором знаний, умений и навыков, а набором компетентностей, необходимых для дальнейшего развития его личности.

На этой волне все большую популярность приобретают уроки, где применяются методы обучения, подразумевающие активную деятельность обучающихся, в том числе и в обучении алгебре.

Так, можно организовать урок-семинар, суть которого заключается в следующем: первый шаг – учащиеся читают теоретический материал в учебнике, второй шаг – составляют с учителем план прочитанного, третий шаг – обсуждение каждого пункта плана и запись необходимой информации. Новый материал обязательно подкрепляется практическими заданиями.

Еще одним из активных методов обучения является «Сообщение темы с мотивирующим приемом». Суть метода заключается в том, что учитель предваряет сообщение готовой темы либо интригующим материалом (прием «яркое пятно»), либо характеристикой значимости темы для самих учащихся (прием «актуальность»). В некоторых случаях эти мотивирующие приемы используются одновременно.

Одним из актуальных методов в обучении является метод проблемного диалога. Эффективность этого метода заключается в формировании у учащихся математического склада мышления, интереса к предмету, привитии навыков исследовательской работы и желания самостоятельного решения возникшей ситуации. Он направлен на формирование мировоззрения учащихся, их познавательной самостоятельности, устойчивых мотивов и мыслительных способностей.

Рассмотрим тему: «Теорема Виета. Теорема, обратная теореме Виета».

Урок начинается с исторической зарисовки. XVI век. Франция. Адвокат и советник короля Генриха III Франсуа Виет, будучи выдающимся математиком, сумел раскрыть ключ шифра, состоявшего из 500 знаков, с помощью которого враги короля вели переписку с испанским двором. Но среди математиков Виет известен своей теоремой о свойствах корней квадратного уравнения.

А какое это свойство вы увидите сами.

Решите квадратное уравнение:

1 группа: $5x^2 - 6x + 1 = 0$

2 группа: $6x^2 - 5x - 1 = 0$

3 группа: $x^2-5x+6=0$

Найдите сумму и произведение корней уравнения и сравните их с коэффициентами своего квадратного уравнения. Что интересного вы заметили? [59].

После того, как учащиеся решили данные им уравнения, нашли сумму и произведение корней, можно вызвать с каждой группы по одному человеку и, разделив доску на 3 части, попросить оформить решение уравнения (достаточно записать только само уравнение, сумму и разность корней уравнения) (таблица 6). На доске появится запись:

Таблица 6 - Ответы трех групп

$5x^2-6x+1=0$	$6x^2-5x-1=0$	$x^2-5x+6=0$
$x_1+x_2=\frac{6}{5}$	$x_1+x_2=\frac{5}{6}$	$x_1+x_2=5$
$x_1\cdot x_2=\frac{1}{5}$	$x_1\cdot x_2=-\frac{1}{6}$	$x_1\cdot x_2=6$

Решение уравнения 3 группы, для наглядности формулы Виета, учитель может попросить переписать в виде

$$1x^2-5x+6=0$$

$$x_1+x_2=\frac{5}{1}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{6}{1}$$

После того, как были выслушаны рассуждения школьников по заданному вопросу, вместе приходят к выводу теоремы Виета.

Записав общий вид квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, вместе с классом можно записать общий вид суммы и произведения корней квадратного уравнения: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$; $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

Как известно, корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, где $a\neq 0$, равны:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Найдем сумму и произведение x_1 и x_2:

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

В итоге получили, что $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ [17, с.65].

Например, для уравнения $4x^2 - 51x + 94 = 0$

$$x_1 + x_2 = \frac{51}{4};\ x_1 \cdot x_2 = \frac{94}{4} = \frac{47}{2}.$$

Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) разделить на первый коэффициент, то получим приведенное квадратное уравнение:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Также известно, что приведенное квадратное уравнение принято записывать в виде:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Из того, что $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, можно утверждать, что $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \cdot x_2 = q$.

Теорема. *Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком. А произведение корней равно свободному члену:*

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Эта теорема называется *теоремой Виета* [17, с. 66].

Пример 4. Решим квадратное уравнение с помощью теоремы Виета:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

Решение. По теореме Виета сумма корней квадратного уравнения равна значению второго коэффициента, взятому с противоположным знаком, а их произведение равно свободному члену. Значит:

$$x_1 + x_2 = 7; \quad x_1 \cdot x_2 = 12.$$

Методом подбора не сложно определить, что это числа: 4 и 3, т.к. $4+3=7;\ 4 \cdot 3 = 12$.

Справедлива и обратная теорема.

Теорема *(обратная теореме Виета). Если сумма двух чисел равна* $-p$, а их произведение равно q, то эти числа являются корнями уравнения: $x^2 + px + q = 0$ [17, с. 67].

Пример 5. Пусть числа 3 и -7 являются корнями приведенного квадратного уравнения. Составим это уравнение.

Решение. $x_1 = 3$ и $x_2 = -7$. Тогда вычислим значение их суммы и произведения, т.е.: $x_1 + x_2 = -4$; $x_1 \cdot x_2 = -21$. Значит, учитывая то, что сумма корней – это второй коэффициент с противоположным знаком, а их произведение есть свободный член, т.е. $p=4$; $q=-21$, можно записать приведенное квадратное уравнение:

$$x^2+4x-21=0$$

Ответ: $x^2+4x-21=0$.

Решая задания на нахождение корней квадратных уравнений или составление квадратных уравнений по известным корням, используя теорему Виета и обратную ей теорему, «сильным» ученикам, которые довольно умело и быстро справляются с заданием, можно усложнить его тем, чтобы в записи использовать неприведенные квадратные уравнения.

Известно, что решение задач несколькими способами активизирует учебную познавательную деятельность. Задачи, допускающие несколько решений, дают богатые возможности для развития и воспитания школьников.

Если в классе при решении некоторой задачи ребятами будет высказано несколько идей, этим моментом не следует пренебрегать и направлять их мысль на один путь.

При этом можно сразу обсудить достоинства каждого предложения и выбрать наиболее рациональный способ, а можно разрешить каждому учащемуся идти своим понравившимся ему путем. Затем сравнить различные решения и при выборе наилучшего из них руководствоваться принципами наибольшей простоты, наглядности, краткости, оригинальности, неожиданности, математической красоты и т.п. Конечно, работа с такими задачами требует большего внимания и самое главное времени, которого всегда не хватает.

Итак, рассмотрим пример, который можно предложить решить разными способами.

Пример 6. Решите уравнение:

$$2x^2-5x-52=0$$

1 способ. При решении квадратного уравнения можно использовать преобразование *выделение полного квадрата двучлена в трехчлене* [17, с. 54].

Решение. Преобразуем левую часть уравнения с помощью *выделения полного квадрата двучлена в трехчлене*, сначала переписав его в виде приведенного квадратного уравнения.

$$x^2-\frac{5}{2}x-26=0$$

Тогда: $\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{5}{4}+\left(\frac{5}{4}\right)^2\right)-\left(\frac{5}{4}\right)^2-26=0$

После тождественных преобразований уравнение примет вид:

$$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{441}{16}$$

Откуда: $x-\frac{5}{4}=\frac{21}{4}$ или $x-\frac{5}{4}=-\frac{21}{4}$

$$\text{Тогда: } x_1 = \frac{13}{2};\ x_2 = -4$$

Ответ: $\frac{13}{2};\ -4$.

2 способ. *Вычисление корней квадратного уравнения с помощью дискриминанта*.

Решение. Определив значения коэффициентов квадратного уравнения, посчитаем значение дискриминанта:

$$a = 2, b = -5, c = -52;$$
$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-52) = 25 + 416 = 441$$

Исходя из того, что значение дискриминанта – число положительное, уравнение имеет два различных корня, которые найдем, используя формулу для нахождения корней квадратного уравнения:

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{441}}{2 \cdot 2} = \frac{5 - 21}{4} = \frac{-16}{4} = -4;$$
$$x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{441}}{2 \cdot 2} = \frac{5 + 21}{4} = \frac{26}{4} = \frac{13}{2}.$$

Ответ: $\frac{13}{2};\ -4$.

3 способ. Можно показать школьникам еще один из способов решения квадратных уравнений, который в школе практически не рассматривается. Суть решения квадратных уравнений данным способом заключается в том, что свободный член квадратного уравнения нужно умножить на первый коэффициент этого уравнения, причем коэффициент при x^2 в полученном уравнении будет равен 1. Тогда, можно найти значения корней этого уравнения по теореме Виета. Разделив найденные корни полученного уравнения на значение первого коэффициента, получим корни первоначального уравнения.

Решение. Перепишем данное уравнение $2x^2 - 5x - 52 = 0$

2

следующим образом:

$$x^2 - 5x - 104 = 0$$

Используя теорему Виета, найдем корни полученного уравнения:

$$x_1' = 13;\ x_2' = -8$$

Тогда, разделив значения полученных корней на значение первого коэффициента первоначального уравнения, найдем значения корней этого уравнения:

$$x_1=\frac{13}{2};\ x_2=\frac{-8}{2}=-4$$

Ответ: $\frac{13}{2};\ -4$.

Достоверность решения квадратных уравнений таким способом можно легко доказать, используя квадратное уравнение, записанное в общем виде.

Для усложнения задания или для дополнительного задания ученикам, хорошо справляющимися с задачей, можно предложить примеры вида: $(3x-1)(2x+3)-2x+4=35$ или $(x-5)(2x+1)+7=(3x+2)(-x+4)-18$, где для решения уравнения необходимо сначала привести их к квадратным уравнениям с помощью преобразования алгебраических выражений.

4 способ. Решение квадратного уравнения графически.

Решение. Для решения данного квадратного уравнения графически перепишем его в виде:

$$2x^2=5x+52$$

и изобразим графики функций $y=2x^2$ и $y=5x+52$ (рисунок 6).

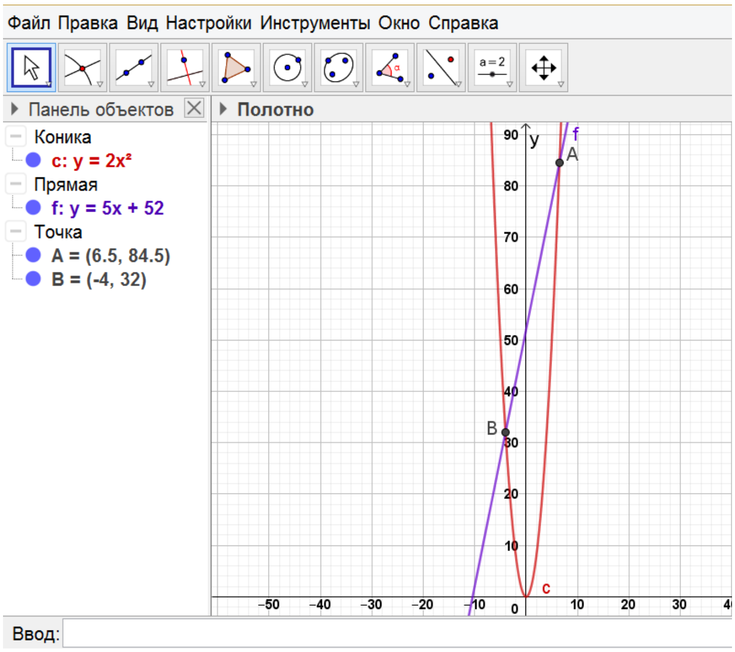

Рисунок 6 - Графики функций $y=2x^2$ и $y=5x+52$

В приведенных выше рисунках 2, 4 и 6 применена компьютерная программа GeoGebra, о возможности использования которой мы описали в параграфе 2.3 диссертации.

Основное применение уравнений и их систем заключается в решении математических задач, в частности текстовых.

Решение текстовых задач с помощью квадратных уравнений.

Пример 7. Сумма квадратов двух последовательных чисел больше их произведения на 157. Найдите эти числа [17, с. 84].

Решение. Во-первых нужно определить о чем говорится в задаче, поэтому задаем классу *вопрос*: «Про какие числа говорится в задаче?»
Ответ должен последовать: «О последовательных числах».
Следующий *вопрос*: «Что известно об этих последовательных числах? Какие действия с ними выполняются?».
Ответ: «Сумма квадратов этих чисел и произведение чисел».
Вопрос: «Как мы можем записать сумму квадратов неизвестных последовательных чисел?»
Ответ: «Чтобы записать сумму квадратов неизвестных последовательных чисел, сначала необходимо обозначить эти числа: Если обозначить через x одно из заданных чисел, тогда второе – $x+1$, т.к. в условии задачи сказано, что числа являются последовательными. В итоге, сумму квадратов этих чисел можно записать, как: $x^2+(x+1)^2$».
Вопрос: «Как мы можем теперь записать произведение этих неизвестных последовательных чисел?»
Ответ: «Тогда произведение чисел: $x\cdot(x+1)$».
Вопрос: «Какая зависимость нам известна из условия задачи про сумму квадратов и произведение последовательных чисел?»
Ответ: «Из условия задачи можно сделать вывод, что если к произведению чисел прибавить 157, то полученное значение будет равно значению суммы квадратов этих чисел. Тогда получим следующее уравнение:

$$x^2+(x+1)^2=x\cdot(x+1)+157\text{»} \qquad (2)$$

Теперь решим полученное уравнение.
Раскроем скобки и приведем подобные члены, тогда:

$$x^2+x^2+2x+1=x^2+x+157$$

$$2x^2+2x+1=x^2+x+157$$

Перенесем все члены уравнения в левую часть:

$$2x^2+2x+1-x^2-x-157=0$$

$$x^2+x-156=0 \qquad (3)$$

Решим квадратное уравнение (3):

$$D=1+4\cdot1\cdot156=625,\ \sqrt{D}=25$$

$$x_1=\frac{-1-25}{2}=-13;$$

$$x_2=\frac{-1+25}{2}=12$$

Полученные корни уравнения (3) будут являться решением равносильного ему уравнения (2). Значит:

при $x=-13$, последовательное число $x+1=-12$;

при $x=12$, последовательное число $x+1=13$.

Ответ: -13 и -12; 12 и 13.

Для закрепления полученных знаний можно использовать урок-игру.

Например, учащимся можно предложить собрать пазл, части которого должны соединятся по следующему правилу: «Каждая часть имеет общий корень с частью, соединенной по вертикали и по горизонтали». На каждой части пазла будет написано квадратное уравнение.

$x^2+7x-18=0$	$3x^2+26x-9=0$	$x^2+4x-45=0$	$3x^2-16x+5=0$

Некоторые из учеников будут решать каждое уравнение, только потом расставляя по местам части с общими корнями. Часть из учащихся решат только одно уравнение, далее будут использовать теорему Виета для остальных уравнений, подставляя в условие теоремы один из корней и проверяя соответствующие значения суммы и произведения, в результате найдут подходящие значения неизвестных. В итоге, части пазла расставятся по местам:

$x^2+7x-18=0$	$x^2+4x-45=0$
$3x^2+26x-9=0$	$3x^2-16x+5=0$

Процесс решения квадратных уравнений обычно усложняется рассмотрением и решением рациональных уравнений, т.к. нахождение корней рациональных уравнений первым шагом предполагает определение области допустимых значений. В связи с множеством различных преобразований данных уравнений, можно применять «табличный вид решения», где параллельно с решением уравнения школьники учатся аргументировать свои действия.

Пример 8. Решите уравнение:

$$\frac{x+7}{x-3}=1+\frac{x-2}{9-x}$$

Решение.

Таблица 7 - Пошаговое решение заданного уравнения

Вычисления	Шаг	Аргументы
1	2	3
$\frac{x+7}{x-3}=1+\frac{x-2}{9-x}$	1	
$x\neq 3,\ x\neq 9$	2	Т.к. знаменателями дробей уравнения являются выражения $x-3$ и $9-x$, они не должны обращаться в нуль.
$\frac{x+7}{x-3}=\frac{(9-x)+(x-2)}{9-x}$	3	В правой части уравнения, сложим два слагаемых, приведя их к общему знаменателю

Продолжение таблицы 7

1	2	3
$\frac{x+7}{x-3}=\frac{9-x+x-2}{9-x} \Leftrightarrow \frac{x+7}{x-3}=\frac{7}{9-x}$	4	Раскрыв скобки в числителе дроби, стоящей в правой части уравнения, приведем подобные члены
$(9-x)(x+7)=7(x-3)$	5	Умножение обеих частей уравнения на $(x-3)(9-x)\neq 0$ (равенство нулю мы уже исключили)
$9x+63-x^2-7x=7x-21 \Leftrightarrow$ $9x+63-x^2-7x-7x+21=0$	6	Раскроем скобки по правилу умножения двух выражений почленно и перенесем члены уравнения в другую часть с противоположными знаками
$-5x+84-x^2=0$	7	Приведем подобные члены
$x^2+5x-84=0$	8	Умножим уравнение на (-1) и перепишем его в общем виде квадратного уравнения
$a=1, b=5, c=-84$ $D=(5)^2-4\cdot 1\cdot(-84)=25+336=361$	9	Найдем значение дискриминанта
$x_1=\frac{-5-\sqrt{361}}{2\cdot 1}=\frac{-5-19}{2}=-12$ $x_2=\frac{-5+\sqrt{361}}{2\cdot 1}=\frac{-5+19}{2}=7$	10	Значения корней уравнения

Проверку домашних заданий следует осуществлять не только по записям в тетрадях, но и проводить опрос по решенным задачам. Для этого, достаточно выделить 5-10 минут времени на уроке или использовать перемену. Не обязательно спрашивать объяснения каждого выполненного задания. Конечно, опросить сразу всех учеников класса не получится ввиду нехватки времени. Достаточно выбрать несколько школьников, например, которые не активны на уроках, редко выходят к доске по своему желанию. Так можно проконтролировать самостоятельность выполнения заданий.

Во время работы у доски ученика в школе, учитель должен стараться помогать при возникающих затруднениях по минимуму. В таких ситуациях можно обратится к классу и лишь не получив верного ответа, можно задать наводящий к решению проблемы вопрос учащимся. Если и это не помогло, то подсказать первый шаг хода решения задания. Во время проведения самостоятельных работ, желательно следить за тем, чтобы учащиеся не пользовались записями классных и домашних работ. Таким образом, они научатся решать задачи самостоятельно, будут прилагать усилия, чтобы вникнуть в суть решения заданий, которые решаются в классной работе совместно. Также, учащиеся будут запоминать методы решения конкретных задач.

Самостоятельную работу можно проводить в следующей форме:

Пусть самостоятельная работа будет рассчитана на один вариант и необходимо решить следующее уравнение:

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$$

Учитель записывает этот пример на доску. Спрашивает у кого имеются какие предложения по решению уравнения. Может, кто-то из учеников предложит заменить выражение $x+\frac{1}{x}$ через t, и далее рассмотреть квадрат этого выражения. Если же таких идей нет, то учитель может выписать два следующих выражения и предложить подумать какая между ними связь:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right) \qquad \text{и} \qquad \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$$

Теперь, наверняка, учащиеся скажут, что можно рассмотреть квадрат первого выражения. Тогда можно записать на доске:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+2+\frac{1}{x^2}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2$$

Это выражение очень важно записать подробно, чтобы каждый из учеников понял ход преобразования изначального выражения.

То есть получаем: $$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2$$

Учитель предлагает высказать идеи по дальнейшему решению уравнения. Учащиеся предложат замену, а именно:

$$x+\frac{1}{x}=t\text{, тогда } x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$$

Тогда, оформив эту запись на доске, учитель дает время записать уравнение, используя замену, то есть записать полученное уравнение с переменной t. Когда большая часть класса сообщит о готовности полученного задания, под диктовку учащихся учитель запишет полученное уравнение:

$$2\left(t^2-2\right)-7t+9=0$$

$$2t^2-4-7t+9=0$$

$$2t^2-7t+5=0.$$

Теперь попросим класс найти значения, которые может принимать t. Здесь, ввиду того, что полученное нами квадратное уравнение – неприведенное, ученики будут находить корни уравнения с помощью дискриминанта. Когда первые решившие ученики начнут поднимать руки, чтобы сказать полученный результат, нужно дать еще немного времени другим учащимся, чтобы они закончили свои вычисления. Результаты вычислений у решивших квадратное уравнение учеников можно посмотреть, подойдя к ним, и, если найденные значения верны, дать задание подставить эти значения t в сделанную замену и найти x. На доске оформляется нахождение значений t:

$$D = 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 = 49 - 40 = 9 \Rightarrow \sqrt{D} = 3$$

$$t_1 = \frac{7-3}{4} = 1;$$

$$t_2 = \frac{7+3}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Здесь сразу можно переписать произведенную замену в виде:

1) $x + \frac{1}{x} = 1$ или 2) $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

Учитель предлагает найти значения x из получившихся уравнений. После того, как большая часть класса решит уравнения, можно вызвать к доске ученика для оформления решения этих уравнений. На доске решение уравнений будет выглядеть следующим образом (необходимо попросить оформляющего решение ученика записать каждое действие подробно):

1) $x + \frac{1}{x} = 1$

$$x + \frac{1}{x} - 1 = 0$$

$$\frac{x^2 + 1 - x}{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$ Нет действительных решений.

2) $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

$$x + \frac{1}{x} - \frac{5}{2} = 0$$

$$\frac{2x^2 + 2 - 5x}{2x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow \sqrt{D} = 3$$

$$x_1 = \frac{5-3}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{5+3}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2$$

Ответ: $\frac{1}{2}$; 2.

Таким образом, мы решили уравнение способом замены. После того, как решили задание и записали ответ, необходимо прокомментировать ход решения уравнения, т.е. еще раз объяснить каждый проделанный шаг.

Конечно, активные методы развивают способность учащихся «добывать» знания и уметь их использовать в различных ситуациях. Навыки по применению этих методов учителя должны приобретать уже во время обучения в педагогическом вузе. То есть обучение в высшей школе должно быть нацелено не только на обеспечение теоретическими знаниями студентов, параллельно должны рассматриваться методические подходы к обучению разделов алгебры в школе.

Результат решения уравнений в школьной программе общеобразовательной школы предполагает конкретное числовое значение неизвестного. Тогда, как решение уравнений высших порядков, изучаемых в курсе алгебры вуза, сводится к определению существования решения уравнения.

2.2 Методика организации обучения курсу алгебры в педагогическом вузе

Ввиду внедрения в школьное образование обновления содержания учебного предмета «Алгебра», которое соответствует Государственному общеобязательному стандарту среднего образования и типовым учебным программам, необходимо пересмотреть и совершенствовать методические подходы к обучению курсу алгебры в педагогических вузах.

Дисциплины «Алгебра-1» и «Алгебра-2» в педагогических вузах являются компонентами по выбору, поэтому учебно-методический комплекс по этим дисциплинам разрабатывается на основе образовательных программ и каталога элективных дисциплин специальности «5B010900 – Математика» [60]. Считаем, что при отборе содержания курса алгебры в педагогическом вузе необходимо соотносить его с будущей профессиональной деятельностью выпускников.

Главная цель курса алгебры в педагогическом вузе – помочь студентам изучить основные виды алгебр, алгебраические понятия и воспитать общую алгебраическую культуру, необходимую будущему учителю для глубокого понимания как основного школьного курса математики, так и школьных факультативных курсов.

В традиционное содержание курса алгебры входит много тем из теории групп, причем изучаются они углубленно, что, с нашей точки зрения, не имеет прикладной направленности в профессиональной деятельности будущих учителей математики. В связи с этим Карп А.П. в своей книге «Даю уроки математики…» предлагает при обучении курсу алгебры предложить к изучению раздел «Введение в общую алгебру», который содержит следующие разделы:

1. **Понятие действия**. Свойства действия: коммутативность, ассоциативность, обратимость, сократимость, наличие нейтрального элемента, обратного элемента. Независимость свойств. Единственность нейтрального элемента, единственность обратного элемента (при наличии ассоциативности действия), связь между сократимостью и обратимостью в конечном множестве.
2. **Определение группы**. Эквивалентность различных определений группы, примеры.
3. **Подгруппы**. Примеры, циклические подгруппы.
4. **Группы преобразований плоскости**. Классификация движений. Основные группы преобразований.

Автор указывает, что этот раздел дает возможность показать единство математики и облегчает дальнейшее изучение числовых систем [61]. Обзор предложенных разделов приводится в приложении А.

В свою очередь, мы отобрали в содержании дисциплин «Алгебра-1» и «Алгебра-2» разделы, наиболее соответствующие требованиям к теоретическим знаниям будущих учителей математики, содержание которых изложено в таблицах 8 и 9.

Таблица 8 - Содержание дисциплины «Алгебра-1» (3 кредита)

№	Наименование тем дисциплины	Недели	Ауд. занятия		Вид задания		Всего
			Лек.	Сем.	СРСП	СРС	
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Введение в общую алгебру. Понятие действия. Свойства действия: коммутативность, ассоциативность, обратимость, сократимость, наличие нейтрального элемента, обратного элемента. Независимость свойств.	1	1	2	3	3	9
2	Единственность нейтрального элемента, единственность обратного элемента (при наличии ассоциативности действия), связь между сократимостью и обратимостью в конечном множестве.	2	1	2	3	3	9
3	Определение группы. Эквивалентность различных определений группы, примеры.	3	1	2	3	3	9
4	Определения кольца, поля, алгебры. Примеры и элементарные свойства операций.	4	1	2	3	3	9
5	Поле комплексных чисел. Поле комплексных чисел. Геометрическое представление комплексного числа.	5	1	2	3	3	9
6	Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Извлечение корней n-ной степени из комплексного числа.	6	1	2	3	3	9
7	Векторные пространства. Определение векторного пространства. Примеры. Линейная зависимость и независимость векторов.	7	1	2	3	3	9
8	Системы линейных уравнений. Равносильные системы уравнений и элементарные преобразования системы. Метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса).	8	1	2	3	3	9
9	Матрицы и определители. Операции над матрицами и их свойства.	9	1	2	3	3	9
10	Группа подстановок. Четность и знак подстановки. Определитель квадратной матрицы. Основные свойства определителей.	10	1	2	3	3	9
11	Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или столбцу. Необходимые и достаточные условия равенства нулю определителя.	11	1	2	3	3	9

Продолжение таблицы 8

1	2	3	4	5	6	7	8
12	Теорема о ранге матрицы. Обратная матрица.	12	1	2	3	3	9
13	Запись систем линейных уравнений в матричной форме. Правило Крамера.	13	1	2	3	3	9
14	Уравнения с матрицами.	14	1	2	3	3	9
15	Евклидовые пространства. Евклидово векторное пространство. Норма вектора. Собственные векторы и собственные значения.	15	1	2	3	3	9
Всего часов			15	30	45	45	135

Таблица 9 - Содержание дисциплины «Алгебра-2» (3 кредита)

№	Наименование тем дисциплины	Недели	Ауд. занятия		Вид задания		Всего
			Лек.	Сем.	СРСП	СРС	
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Теория делимости в кольце целых чисел. Число и сумма делителей. Теорема о делении с остатком. Арифметические операции над систематическими числами.	1	1	2	3	3	9
2	Алгоритм Евклида, НОД, НОК и их свойства. Простые числа, их свойства.	2	1	2	3	3	9
3	Представление рациональных чисел конечными цепными дробями. Подходящие дроби и их свойства.	3	1	2	3	3	9
4	Определение и основные свойства сравнений. Полные системы вычетов.	4	1	2	3	3	9
5	Теория сравнений с арифметическими приложениями. Приведенная система вычетов. Функция Эйлера. Теоремы Эйлера и Ферма. Корни сравнений.	5	1	2	3	3	9
6	Порядок числа и классы вычетов по модулю. Первообразные корни и индексы по простому модулю.	6	1	2	3	3	9
7	Конечные, бесконечные и периодические систематические дроби. Признаки делимости, проверка результатов арифметических действий.	7	1	2	3	3	9
8	Многочлены от одной неизвестной. Понятие многочлена от одной неизвестной над полем. Разложение многочленов на неприводимые множители. Алгоритм деления с остатком. Корни многочлена.	8, 9	2	4	6	6	18

Продолжение таблицы 9

1	2	3	4	5	6	7	8
9	Схема Горнера. Теорема Безу. НОД двух многочленов. Алгоритм Евклида.	10, 11	2	4	6	6	18
10	Многочлены от нескольких неизвестных. Симметрические многочлены. Результант. Исключение неизвестного. Дискриминант.	12	1	2	3	3	9
11	Многочлены над полем комплексных чисел и над полем действительных чисел. Формулы Виета. Формулы Кардано. Способ Эйлера.	13, 14	2	4	6	6	18
12	Многочлены над полем рациональных чисел и алгебраические числа. Признак неприводимости Эйзенштейна.	15	1	2	3	3	9
Всего часов			15	30	45	45	135

Содержание дисциплины «Алгебра-2» состоит из двух больших разделов: «Теория чисел» и «Теория многочленов», в которых рассматриваются темы, используемые в обучении курсу алгебры школьников, а именно: основная теорема арифметики (разложение числа на простые множители), нахождения наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного, алгоритм Евклида (деление многочлена на одночлен), формулы Виета, дискриминант и др.

Основной задачей обучения курсу алгебры в школе и педагогическом вузе является соблюдение принципа преемственности содержания и методики преподавания данного курса, которое легло в основу при составлении предложенного нами содержания дисциплин «Алгебра-1» и «Алгебра-2». Это проиллюстрировано на следующей схеме (Рисунок 7).

Рисунок 7 - Взаимное соответствие содержания школьного курса алгебры и содержания предлагаемых для изучения в педагогическом вузе разделов по «Алгебре-1» и «Алгебре-2»

Говоря о методике обучения в современном вузе, подчеркнем существование проблемы адаптации первокурсников к организации обучения в вузе. Прошлогодние школьники – настоящие первокурсники испытывают затруднения из-за того, что теперь они должны работать самостоятельно, тогда как в школе большинство учащихся работают только под руководством учителя. Домашние задания выполнялись непосредственно по записям классных работ. Неразвитость самостоятельности в процессе обучения отрицательно влияет на успеваемость студента, поэтому развивать ее нужно начиная со школы, особенно на старшей ступени [62].

Нужно обратить особое внимание на то, что преподаватель педагогического вуза будет являться примером того, как в будущем будут объяснять материал выпускники своим ученикам в школе. Во время проведения лекционного или практического занятия, идет формирование студента как учителя, то есть он видит работу преподавателя, то, как он объясняет новый или уже известный из школы материал, у учащегося формируется «объект для подражания». Такое же влияние будет оказывать педагогическая практика, которую студенты специальности «5В010900 - Математика» проходят, начиная со второго курса. Во время пассивной педпрактики студенты учатся правильно вести себя в классе в качестве учителя, обретают навыки общения с учениками. Во время активной практики студент-практикант проявляет свои индивидуальные способности в преподавании учебного предмета. Он сам старается оценивать себя со стороны, выявлять свои недостатки, работает над собой. На старших курсах будущие учителя математики стараются предлагать свои способы решения каких-либо задач, совершенствуют свою методику преподавания математических дисциплин в школе.

Для изучения курса алгебры в педагогическом вузе предлагаются учебники таких авторов, как Виноградов И.М., Грибанов В.И., Кострикин А.И., Кочева А.А., Курош А.Г., Соминский И.С., Титов П.И., Фадеев Д.К. [18, с. 431; 63-67] и др.

В первой главе мы описали традиционную организацию проведения занятий по алгебре в вузе: лекция, практическое занятие, СРСП и СРС. Как известно, традиционная лекция представляет собой монологический способ систематизированного изложения информации. Конечно, такая лекция целесообразна, когда представленные на лекции сведения не доступны обучающимся из-за отсутствия учебников и учебных материалов или, когда некоторые разделы курса трудны для самостоятельного изучения.

На практических занятиях преподаватель обычно показывает алгоритм решения заданий по пройденной теме на конкретном примере и дает задание для самостоятельной работы студента.

В связи с переходом на обновленное содержание образования, которое ориентирует учебные программы на практическую деятельность, меняется подход к обучению школьников. Учитывая это, необходимо осуществлять подготовку педагогических кадров, нацеленную на их будущую профессиональную деятельность в новых условиях.

Передовая педагогическая практика накопила богатый опыт активизации лекции, развития ее нетрадиционных форм, с помощью которых устраняются многие недостатки классической лекции. Решение проблемы активизации лекционной формы обучения возможно путем существенных изменений в ее построении, в методике изложения, в проблемной подаче учебной информации.

Считаем важным в преподавании курса алгебры использовать современные формы и методы организации урока. Только являясь активным участником процесса такого обучения студент – будущий учитель будет методически грамотно и успешно проводить свои занятия в школе.

Рассмотрим методику организации занятий в педагогическом вузе, используя активные методы обучения курсу алгебры на конкретных примерах. Будем придерживаться линии «Уравнения и их системы», которую мы начали рассматривать в предыдущем параграфе.

Решение уравнений, а именно систем уравнений, в курсе алгебры вуза начинается с темы: «Система линейных уравнений», где рассматриваются два способа решения таких систем.

На изучение этой темы выделяется 1 час лекции, 2 часа практических занятий, 3 часа СРСП и 3 часа СРС.

Предлагаем разработку *лекции с текущим контролем* на данную тему.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Перед тем, как давать лекционный материал по этой теме, можно предложить студентам решить систему линейных уравнений так, как они решали такие системы в школе.

? *Какое уравнение называется линейным уравнением с двумя, тремя, ... n неизвестными?*

? *Что представляет собой система линейных уравнений, содержащая m уравнений и n неизвестных?*

Определение. Системой из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1, \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m, \end{cases}$$

a_{ij} $(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$ - коэффициенты системы; числа b_i - свободные члены.

? *Что называется решением системы линейных уравнений?*

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые обращают все уравнения системы в тождества, называются **решением** системы.

? *Какие две системы линейных уравнений называются равносильными?*

✍ *Объясните! Почему равносильны следующие системы линейных уравнений?*

1) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = -5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1 \\ x_1 - 10x_2 = 8 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 = -9 \\ 2x_1 + x_2 = -5 \end{cases}$

Система, не имеющая решений называется **несовместной**, а система, имеющая решение - **совместной**. Совместная система называется **определенной**, если она обладает одним единственным решением и **неопределенной**, если решений больше чем одно.

✍ *Исследуйте на совместность следующие системы линейных уравнений:*

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 = -2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ 6x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases}$

? *Как решить систему линейных уравнений? Какие способы Вы знаете?*

Решите систему графическим способом, способами подстановки и сложения:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ 3x_1 - 2x_2 = 5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ 6x_1 - 2x_2 = 10 \end{cases}$

Остановим внимание на решении систем линейных уравнений способом сложения.

Предлагаем решить систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными способом сложения. Необходимо попросить студентов обращать особое внимание на преобразования, которые мы применяем к уравнениям.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \qquad (4)$$

Для решения системы, первым шагом требуется рассмотреть уравнения системы и найти самый удобный вариант исключения неизвестных, т.е. проанализировать данную систему. Во втором и третьем уравнениях системы коэффициентами при x_3 являются -1 и 1 соответственно. Поэтому удобнее использовать их для исключения неизвестного x_3. Сами уравнения системы можно поменять местами для удобства. Тогда:

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

Решение. Так как при x_3 в первом и во втором уравнениях стоят коэффициенты -1 и 1 соответственно, то для исключения x_3 можно к первому уравнению прибавить второе, причем первое уравнение запишем без изменения, а вместо второго – полученное. Вследствие того, что в третьем уравнении при x_3 стоит коэффициент 3, умножив первое уравнение на 3 и прибавив третье, исключим неизвестное x_3. Запишем полученное уравнение вместо третьего:

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 = 7 \\ -2x_1 + 5x_2 = 12 \end{cases} \qquad (5)$$

Заметим, что в системе (5) коэффициенты при x_2 – одинаковые, поэтому для исключения неизвестного x_2 достаточно из второго уравнения вычесть третье (или третье уравнение умножить на -1 и прибавить второе уравнение). Тогда получим следующее:

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 = 7 \\ 5x_1 = -5 \end{cases} \tag{6}$$

Решением третьего уравнения системы (6) является $x_1 = -1$. Подставив это значение во второе уравнение, получим:

$$3 \cdot (-1) + 5x_2 = 7$$

Решим это уравнение:

$$5x_2 = 10$$

$$x_2 = 2$$

Теперь подставив найденные значения $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$ в первое уравнение системы (6) получим следующее:

$$-2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 - x_3 = 2$$

Тогда:

$$6 - x_3 = 2$$

$$x_3 = 4$$

Итак, мы нашли значения всех неизвестных системы линейных уравнений (4), которая эквивалента системе (6), т.е.

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

Ответ: $(-1; 2; 4)$

✍ *Подготовьте сообщение! Системы линейных уравнений умели решать с начала II тысячелетия до н.э. в Древнем Вавилоне.*

Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{-------------------------------} \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}, \tag{7}$$

где n – число неизвестных, a_{ij} – коэффициенты при неизвестных уравнения (числа), i – номер уравнения, j – номер неизвестного, $b_1, b_2, \ldots, b_s$ – свободные члены уравнений.

Систему (7) можно решить методом последовательного исключения неизвестных.

Пусть в системе линейных уравнений (7) выполняется следующее условие:

$$a_{11} \neq 0,\ a_{22} \neq 0,\ a_{33} \neq 0,\ \ldots$$

Решение. Решим данную систему методом последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса). Смысл метода последовательного исключения неизвестных заключается в том, что умножив уравнение на соответствующие коэффициенты, мы получаем коэффициент при неизвестной такой же, как и в следующих за ним уравнениях, а вычитанием из него следующих за ним уравнений, мы избавляемся от одного неизвестного. Проделав такое действие последовательно с каждым из возможных уравнений, в итоге останется одно уравнение. То есть:

Умножим первое уравнение системы (7) на $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и вычтем из полученного уравнения с новыми коэффициентами второе уравнение, в результате чего исключится неизвестное x_1. Первое уравнение записывается в системе без изменения, а полученное уравнение записывается вместо второго уравнения. Следующим шагом умножаем первое уравнение системы (7) на $\frac{a_{31}}{a_{11}}$, затем вычитанием третьего уравнения, получаем исключение неизвестного x_1. Аналогично проделывается с каждым уравнением для исключения x_1. Для наглядности преобразования системы уравнений важно неизвестные записывать соответственно друг под другом.

Система (7) изменится следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{'}x_2 + \cdots + a_{2n}^{'}x_n = b_2^{'} \\ \qquad a_{32}^{'}x_2 + \cdots + a_{3n}^{'}x_n = b_3^{'} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad a_{s2}^{'}x_2 + \cdots + a_{sn}^{'}x_n = b_s^{'} \end{cases} \tag{8}$$

где $a_{ij}^{'}$ – коэффициенты, полученные вследствие проделанных с системой (7) действий, описанных выше.

Аналогично поступаем с новой системой (8), умножая второе уравнение соответственно на коэффициенты $\frac{a_{32}^{'}}{a_{22}^{'}}; \frac{a_{42}^{'}}{a_{22}^{'}}; \cdots; \frac{a_{s2}^{'}}{a_{22}^{'}}$ вычитая соответствующие уравнения.

Если один из свободных членов b станет равен нулю, то система линейных уравнений (7) является несовместной.

В итоге получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{'}x_2 + a_{23}^{'}x_3 + \cdots + a_{2n}^{'}x_n = b_2^{'} \\ \qquad\qquad a_{33}^{''}x_3 + \cdots + a_{3n}^{''}x_n = b_3^{''} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{kk}^{(k-1)}x_k + a_{k,k+1}^{(k-1)}x_{k+1} + \cdots + a_{kn}^{(k-1)}x_n = b_k^{(k-1)} \end{cases}, \ k \le s, 1 \le k \le n \tag{9}$$

Исходом решения может быть два случая.

Случай 1. Если $k = n$, т.е. число уравнений равно числу неизвестных, то систему (9) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a^{(n-2)}_{n-1,n-1}x_{n-1} + a^{(n-2)}_{n-1,n}x_n = b^{(n-2)}_{n-1} \\ \qquad a^{(n-1)}_{nn}x_n = b^{(n-1)}_n \end{cases} \tag{10}$$

Из последнего уравнения системы (10) следует, что $x_n = \dfrac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$. Посчитав значение неизвестного x_n, подставим его в вышестоящее уравнение системы (10), откуда можно найти значение x_{n-1}. Аналогично можно найти все значения неизвестных $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_1$. В итоге получим решение уравнения.

Случай 2. $k < n$, т.е. число уравнений меньше числа неизвестных.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n = b''_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a^{(k-1)}_{kk}x_k + a^{(k-1)}_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots + a^{(k-1)}_{kn}x_n = b^{(k-1)}_k \end{cases}$$

Тогда система (10) совместна и неопределенна, то есть имеет много решений. В этом случае $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ называют свободными неизвестными, значения которым можно давать методом подбора.

Студенты педагогического вуза – будущие учителя, поэтому они должны грамотно формулировать свои высказывания. Правильно организованное обучение решению задач приучает обучающихся к полноценной аргументации со ссылкой в соответствующих случаях на ранее доказанные теоремы, аксиомы и введенные определения. Для этого важно время от времени предлагать студентам записывать решение задач в таблицу, в левом столбце которого нужно записывать вычисления, в правом столбце – аргументы, т.е. предложения, подтверждающие правильность выполняемых вычислений [68].

Рассмотрим пример решения системы линейных уравнений на практическом занятии с использованием такого способа его оформления.

Пример 9. Решите систему уравнений [65]:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

Таблица 10

Вычисления	Шаг	Аргументы
$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right)$	1	Для удобства работы переписали данную систему в матричном виде
$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right)$	2	Чтобы исключить x_1 : умножили первое уравнение на -3 и прибавили второе уравнение; умножили первое уравнение на -2 и прибавили третье уравнение; умножили первое уравнение на -1 и прибавили четвертое уравнение
$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \end{array}\right)$	3	Чтобы исключить x_2 : умножили второе уравнение на -1 и прибавили третье уравнение; умножили второе уравнение на 4 и прибавили четвертое уравнение
$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -27 & -39 & -39 \end{array}\right)$	4	В получившейся системе, ввиду значений коэффициентов при неизвестных, целесообразно исключить x_4. Для этого умножили третье уравнение системы на -13 и прибавили четвертое уравнение
$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 51 & 0 & 0 \end{array}\right)$	5	В четвертом уравнении осталось одно неизвестное
$51x_3 = 0$ $x_3 = 0$	6	Перепишем получившееся четвертое уравнение, откуда подсчитали x_3
$-6 \cdot 0 - 3x_4 = -3$ $x_4 = 1$	7	Подставив значение x_3 в третье уравнение, нашли значение x_4
$x_2 - 5 \cdot 0 - 7 \cdot 1 = -8$ $x_2 = -1$	8	Подставив значения x_3 и x_4 во второе уравнение, нашли значение x_2
$x_1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 1$ $x_1 = -1$	9	Подставив значения x_2, x_3 и x_4 в первое уравнение, нашли значение x_1
(-1; -1; 0; 1)	10	Ответ

Пример 10. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 6 \\ -5x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -11 \\ 10x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 22 \end{cases}$$

Решение. Если третье уравнение системы умножить на -2, получится уравнение, эквивалентное четвертому уравнению. Поэтому исключили четвертое.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 6 \\ -5x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -11 \\ 10x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 6 \\ -5x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ -5x_2 + 11x_3 - 8x_4 = 10 \\ 7x_2 - 28x_3 + 14x_4 = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ -5x_2 + 11x_3 - 8x_4 = 10 \\ -\dfrac{63}{5}x_3 + \dfrac{14}{5}x_4 = -7 \end{cases}$$

$$-\frac{63}{5}x_3 + \frac{14}{5}x_4 = -7$$

$$x_3 = \frac{5 + 2x_4}{9}$$

В таком случае, неизвестному x_4 будем придавать числовые значения и вычислять соответствующие значения остальных неизвестных. Эти решения называются частными решениями системы уравнений.

Пусть $x_4 = 2$, тогда найдем соответствующие значения x_3, x_2 и x_1:

$$x_3 = \frac{5 + 2 \cdot 2}{9} = 1 \Rightarrow 5x_2 + 11 \cdot 1 - 8 \cdot 2 = 10 \Rightarrow x_2 = -3$$

$$x_1 + (-3) - 5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = -2 \Rightarrow x_1 = 0$$

Тогда: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases}$ – частное решение системы уравнений.

$\begin{cases} x_1 = -2 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 \\ x_2 = \dfrac{11x_3 - 8x_4 - 10}{5} \\ x_3 = \dfrac{5 + 2x_4}{9} \end{cases}$ – общее решение системы уравнений.

При объяснении преподавателем решений поставленных задач очень важно записывать решение пошагово так, как делают учителя в школах, потому что студент, в процессе такого обучения, приобретает привычку делать записи решения подробно, что будет сопутствовать ему во время своей будущей профессиональной деятельности, т.е. при работе в школе. Преподаватель не должен забывать, что во время проведения занятий, особенно практических, он является примером для будущих учителей.

Задания на активизацию исследовательской работы студентов вырабатывают навыки самостоятельной работы. Умеющие самостоятельно работать студенты будут эффективнее усваивать учебный материал и оптимально распределять свое время на его изучение.

В последнее время деятельностный подход в процессе обучения становится все более востребованным. Полученные в течении активной деятельности студента знания являются более глубокими и прочными.

Приведем пример проведения занятия, основанном на исследовательской работе студентов (обучаемые самостоятельно, глядя на решение задания, должны вывести формулы нахождения неизвестных).

Группа студентов разбивается на несколько подгрупп (на усмотрение преподавателя, это зависит от количества подготовленного раздаточного материала). Каждой подгруппе раздаются два листа, на каждом из которых приведены таблицы, как показано на рисунках 7 и 8.

Ввиду того, что общий вид записи системы линейных уравнений студенты уже знают, им по аналогии с решением в таблице необходимо записать решение этих систем в общем виде (на этот момент студенты еще не знают правила вычисления определителей). Здесь важно преподавателю подобрать или составить самому системы линейных уравнений так, чтобы значения всех коэффициентов и свободных членов были разные.

Задание 1

В правом столбце таблицы запишите решение системы линейных уравнений в общем виде.

Общий вид системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Дана система: $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = -1 \\ x_1 + 4x_2 = 32 \end{cases}$ Решение (по правилу Крамера): $d = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 1 \cdot (-3) = 23$ $d \neq 0$ $d_1 = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 32 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 4 - 32 \cdot (-3) = 92$ $d_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 32 \end{vmatrix} = 5 \cdot 32 - 1 \cdot (-1) = 161$ $x_1 = \dfrac{d_1}{d} = \dfrac{92}{23} = 4$ $x_2 = \dfrac{d_2}{d} = \dfrac{161}{23} = 7$	

В итоге Вы записали правило Крамера для решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Рисунок 7 - Пример раздаточного материала (Лист 1)

Задание 2

В правом столбце таблицы запишите решение системы линейных уравнений в общем виде.

Общий вид системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

<table>
<tr>
<td>

Дана система:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 10 \\ 3x_1 - 6x_2 - 11x_3 = -62 \\ 5x_1 + 7x_2 - 8x_3 = 74 \end{cases}$$

Решение (по правилу Крамера):

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -6 & -11 \\ 5 & 7 & -8 \end{vmatrix} = 1\cdot(-6)\cdot(-8) +$$

$$+3\cdot 7\cdot(-4) + 2\cdot(-11)\cdot 5 - (-4)\cdot(-6)\cdot 5 -$$

$$7\cdot(-11)\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot(-8) = -141$$

$d \neq 0$

$$d_1 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & -4 \\ -62 & -6 & -11 \\ 74 & 7 & -8 \end{vmatrix} = 10\cdot(-6)\cdot(-8) +$$

$$+(-62)\cdot 7\cdot(-4) + 2\cdot(-11)\cdot 74 -$$

$$-(-4)\cdot(-6)\cdot 74 - (-11)\cdot 7\cdot 10 -$$

$$-2\cdot(-62)\cdot(-8) = -1128$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & -4 \\ 3 & -62 & -11 \\ 5 & 74 & -8 \end{vmatrix} = 1\cdot(-62)\cdot(-8) +$$

$$+3\cdot 74\cdot(-4) + 10\cdot(-11)\cdot 5 -$$

$$-(-4)\cdot(-62)\cdot 5 - (-11)\cdot 74\cdot 1 -$$

$$-3\cdot 10\cdot(-8) = -1128$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 3 & -6 & -62 \\ 5 & 7 & 74 \end{vmatrix} = 1\cdot(-6)\cdot 74 + 3\cdot 7\cdot 10 +$$

$$+2\cdot(-62)\cdot 5 - 10\cdot(-6)\cdot 5 - (-62)\cdot 7\cdot 1 -$$

$$-2\cdot 3\cdot 74 = -564$$

$$x_1 = \frac{d_1}{d} = \frac{-1410}{-141} = 10$$

$$x_2 = \frac{d_2}{d} = \frac{-1128}{-141} = 8$$

$$x_3 = \frac{d_3}{d} = \frac{-564}{-141} = 4$$

</td>
<td></td>
</tr>
</table>

В итоге Вы записали правило Крамера для решения систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными

Рисунок 8 - Пример раздаточного материала (Лист 2)

После того, как задания будут выполнены, подгруппы меняются листами и проверяют ответы друг друга. Свои замечания или исправления можно записывать карандашом в таблицах. Потом преподаватель может собрать листы с ответами и вместе со студентами обсудить результаты. После обсуждения можно записать на доску или вынести на интерактивную доску подготовленные ответы. У всех подгрупп ответы должны получиться одинаковыми.

Теперь преподаватель может дать необходимые определения и прокомментировать нахождение определителей второго и третьего порядка (показывает правило Саррюса).

Таким образом, студенты самостоятельно вывели правило вычисления определителей второго и третьего порядка.

При оформлении на доске хода решения систем уравнений в общем виде должны появится следующие записи.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$d \neq 0$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, \; x_2 = \frac{d_2}{d}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} +$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{32}a_{13} +$$

$$+ a_{12}a_{23}b_3 - b_3a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}b_1 - b_2a_{12}a_{33}$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}b_2a_{33} + a_{21}b_3a_{13} +$$

$$+ b_1a_{23}a_{31} - a_{31}b_2a_{13} - b_3a_{23}a_{11} - a_{21}b_1a_{33}$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}b_3 + a_{21}a_{32}b_1 +$$

$$+ a_{12}b_2a_{31} - a_{31}a_{22}b_1 - a_{32}b_2a_{11} - a_{21}a_{12}b_3$$

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, \; x_2 = \frac{d_2}{d}, \; x_3 = \frac{d_3}{d}$$

Материал лекции можно объяснять, опираясь на блок-схему (рисунок 9), которая должна быть на виду у студентов на протяжении всего занятия.

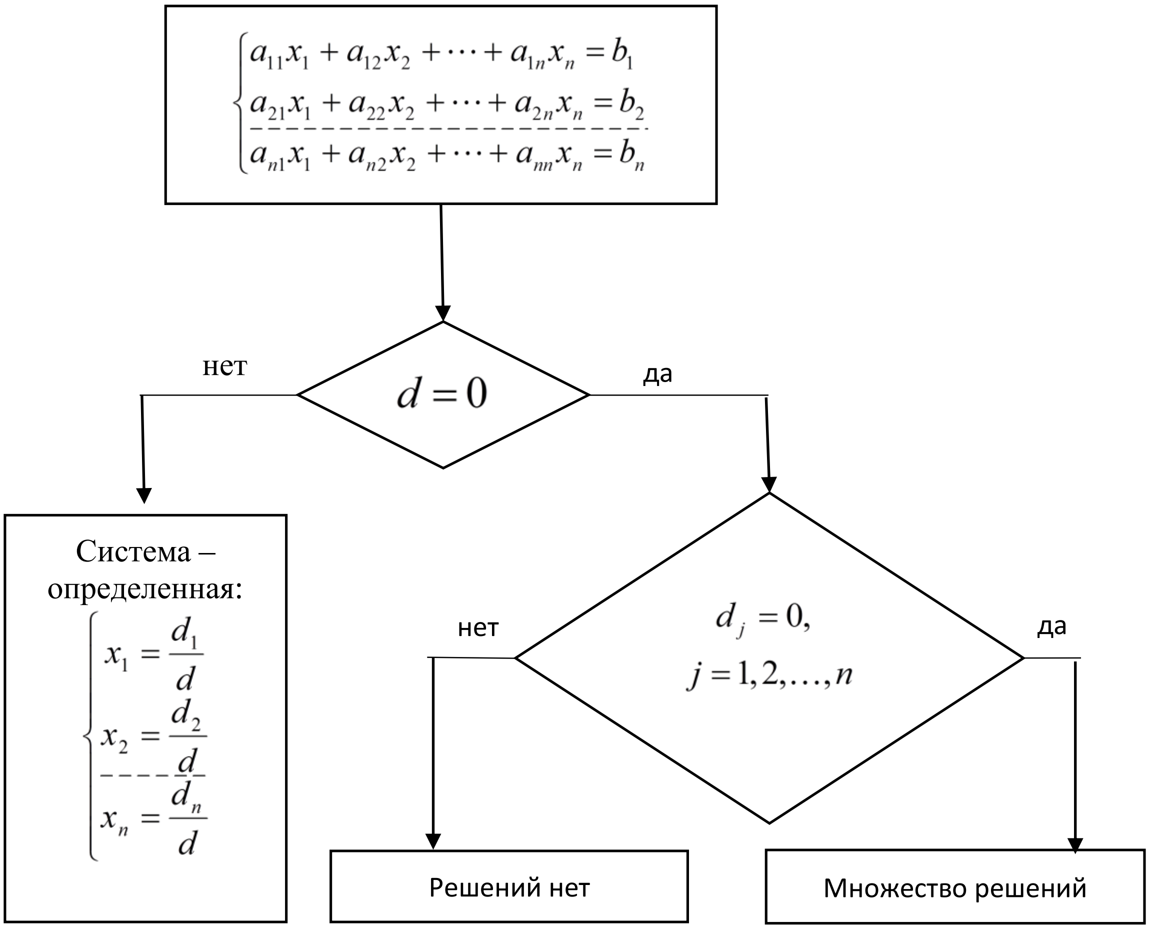

Рисунок 9 - Алгоритм решения системы линейных уравнений по правилу Крамера

Как и в школе, применение блок-схем на занятиях позволяет в сжатой форме представить большой объем информации за счет систематизации, концентрации и выделения наиболее значимых элементов в сообщении.

Также в преподавании курса алгебры можно применять *лекции с заранее запланированными ошибками*. Такой вид лекции содержит проблемность в «чистом виде». От слушателей требуется не просто восприятие информации, а еще и анализ и оценка. После объявления темы лекции преподаватель сообщает, что в ней будет сделано определенное количество ошибок. Ошибки могут быть различного типа: содержательные, методические и т.д. Для обеспечения доверия аудитории преподаватель должен иметь перечень этих ошибок. За 10-15 минут до конца лекции студенты должны озвучить найденные ошибки. Конечно, целесообразно взять тему лекции, по которой у студентов уже сформированы основные понятия и умения. Студенты на такой лекции могут продемонстрировать свои знания материала и умение ориентироваться в нем. Возможность найти ошибку у преподавателя вызывает азарт у обучающихся, что способствует активизации деятельности студентов.

Формулы Виета рассматриваются в курсе алгебры при изучении многочленов. Формулы достаточно дать без вывода, т.к. сутью является только сам принцип задания коэффициентов при неизвестных.

Итак, если задан многочлен со старшим коэффициентом 1:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \qquad (11)$$

и пусть его корнями являются $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (все кратные корни взяты соответствующее число раз). Тогда имеет место разложение:

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n).$$

Тогда перемножая скобки, стоящие справа, а потом приводя подобные члены, сравним полученные коэффициенты при неизвестных с коэффициентами из представления многочлена (11). В итоге получим равенства, которые называются формулами Виета, выражающие коэффициенты многочлена через его корни:

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n),$$
$$a_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n,$$
$$a_3 = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-1} = (-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}\alpha_n + \cdots + \alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n),$$
$$a_n = (-1)^n \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n \text{ [18, с. 159].}$$

Необходимо рассмотреть случай, когда $n = 2$, потому что многочлен превратится в квадратный трехчлен, а формулы Виета примут вид, знакомый студентам из школьного курса алгебры.

Пусть $n = 2$, тогда:

$$f(x) = x^2 + a_1 x + a_2$$
$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2),$$
$$a_2 = \alpha_1\alpha_2$$

Если обозначить коэффициенты a_1 и a_2 через p и q, а корни многочлена α_1 и α_2 через x_1 и x_2 соответственно, и приравнять этот многочлен нулю, то уравнение примет вид, знакомый нам из 8 класса:

$$x^2 + px + q = 0,$$
$$\text{где } p = -(x_1 + x_2),$$
$$q = x_1 x_2 .$$

В целях формирования профессиональных умений для использования в будущей профессиональной деятельности студентам педагогических вузов занятия по математическим дисциплинам целесообразно проводить в игровых формах, деля, например, группу студентов на две подгруппы, и, предлагая различные задания, устраивать соревнования по решению задач, семинары по задачам на доказательства и т.д.

Пример проведения практического занятия игровым методом.

Правило игры. Преподаватель предлагает решить уравнение разными способами. На это можно дать время для подготовки заранее или провести все на одном занятии. Проходит «жеребьевка»: каждый из студентов вытащит номер очереди выхода к доске. Первый студент покажет один способ решения уравнения. Второй – другой способ и т.д. Знание различных способов решения одного и того же задания дает возможность для студента выбрать наиболее рациональный способ для решения конкретного примера. Также каждый студент может выбрать приемлемый и понятный для самого себя способ, который можно будет использовать в дальнейшем.

Пример 11. Решите уравнение $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$

Первый студент показывает способ решения данного уравнения делением на одночлен. Целочисленные корни уравнения будут являться делителями свободного члена. Проверим $x=\pm 1$:

$x=-1$: $1-1-4-1+1=-4\neq 0$, т.е. $x=-1$ не является корнем уравнения.

$x=1$: $1+1-4+1+1=0\equiv 0$, т.е. $x=1$ - корень уравнения. Разделим многочлен, стоящий в левой части уравнения на одночлен $x-1$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+x^3-4x^2+x+1 & \underline{x-1} \\
\underline{x^4-x^3} & x^3+2x^2-2x-1 \\
\quad 2x^3-4x^2 & \\
\quad \underline{2x^3-2x^2} & \\
\qquad -2x^2+x & \\
\qquad \underline{-2x^2+2x} & \\
\qquad\quad -x+1 & \\
\qquad\quad \underline{-x+1} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Тогда многочлен четвертой степени можно переписать как произведение множителей, а уравнение – в виде $(x-1)(x^3+2x^2-2x-1)=0$.

Далее, необходимо найти корни уравнения $x^3+2x^2-2x-1=0$.

Аналогично, покажем, что делитель свободного члена $x=1$ является корнем уравнения. Разделив многочлен третьей степени на одночлен $x-1$, получим выражение $(x-1)^2(x^2+3x+1)=0$. Решая квадратное уравнение $x^2+3x+1=0$, студент вычисляет корни $x_{2,3}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. В итоге получили четыре корня: $x_1=1$ и $x_{2,3}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Следующий студент предлагает способ разложения на множители. Если $4x^2$ представить как $2x^2+2x^2$, то уравнение можно переписать в следующем виде: $x^4-2x^2+1+x^3-2x^2+x=0$. Тогда:

$$\left(x^2-1\right)^2+x\left(x^2-2x+1\right)=0$$
$$(x-1)^2(x+1)^2+x(x-1)^2=0$$
$$(x-1)^2\left(x^2+2x+1+x\right)=0$$
$$(x-1)^2\left(x^2+3x+1\right)=0$$

В итоге получим два уравнения, при решении которых получим корни первоначального уравнения.

Третий студент может предложить решить уравнение как возвратное, ввиду того, что коэффициенты уравнения симметричны. Студент обязательно должен проговорить условие, что при $x=0$ не является решением уравнения, поэтому данное уравнение можно почленно разделить на x^2. Получим:

$$x^2+x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

Тогда, сделав замену $x+\frac{1}{x}=t$, откуда $t^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. Перепишем последнее уравнение, используя замену:

$$t^2-2+t-4=0$$
$$t^2+t-6=0$$
$$t_1=-3;\ t_2=2$$

Зная значения *t*, найдем значения *x*. Решение будем аналогичным: $x_1=1$ и $x_{2,3}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Если очередной студент не может предложить другого способа решения уравнения, то выходит следующий после него студент.

Следующий студент может предложить способ решения уравнения, используя формулы Виета для высших степеней. Конечно, решение получится трудоемким.

Другой студент предложит формулу Феррари, которая тоже окажется трудоемкой по сравнению с предыдущими решениями.

Итак, на доске появится следующая запись решения уравнения методом Феррари.

$$x^4+x^3-4x^2+x+1=0$$
$$a=1;\ b=-4;\ c=1;\ d=1$$

Составим и решим кубическое уравнение:

$$y^3-by^2+(ac-4d)y-a^2d+4bd-c^2=0$$
$$y^3+4y^2-3y-18=0$$

Можно проверить, что одним из корней данного кубического уравнения является $y_0=2$. Тогда по формуле

$$x^2+\frac{a}{2}x+\frac{y_0}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-b+y_0\right)x^2+\left(\frac{a}{2}y_0-c\right)x+\frac{y_0^2}{4}-d}=0$$

получим два квадратных уравнения

$$x^2+\frac{1}{2}x+1\pm\sqrt{\frac{25}{4}x^2}=0$$

то есть:

$$x^2+\frac{1}{2}x+1+\frac{5}{2}x=0$$
$$x^2+3x+1=0$$
$$D=9-4=5$$
$$x_{1/2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

или

$$x^2+\frac{1}{2}x+1-\frac{5}{2}x=0$$
$$x^2-2x+1=0$$
$$(x-1)^2=0$$
$$x=1$$

Также, учащийся может предложить схему Горнера, используя которую решение найдется довольно быстро. На доске решение оформится следующим образом:

Таблица 11 - Схема Горнера

	1	1	-4	1	1
-1	1	0	-4	5	-4
1	1	2	-2	-1	0
1	1	3	1	0	

$$x_1=1$$
$$x^2+3x+1=0$$
$$D=9-4=5$$
$$x_{2/3}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

Один из студентов может предложить графический способ решения данного уравнения, переписав уравнение в виде: $x^4-4x^2=-x^3-x-1$, и введя две функции $y_1=x^4-4x^2$; $y_2=-x^3-x-1$. Используя знания из математического анализа, исследовав функции можно построить их график. Применяя графический способ в данном случае, можно найти и показать решения на графике, но точные значения точек пересечения графиков определить нельзя.

Если больше никто из студентов не может предложить другого способа решения, то последний предложивший способ решения уравнения считается победителем этого «соревнования».

Подводя итог такого занятия, нужно проанализировать его со студентами вместе. Перечислить способы более приемлемые для решения данного уравнения, подчеркнуть все достоинства и недостатки каждого из примененных способов решения уравнения.

Задания для СРС по алгебре могут быть не только задания на решение задач, но и «Подготовка и защита рефератов». В ходе подготовки реферата студенты проводят теоретический анализ проблемы, делают обобщения, подбирают конкретные примеры. Конечно, просто принять реферат и поставить оценку не правильно, важно обязательно организовать защиту и обсуждение рефератов. Это можно сделать на практических занятиях или на занятиях СРСП. Обычно на защиту реферата выделяется 15-20 минут. Реферат можно готовить не только индивидуально каждому студенту, но и малыми группами. Рефераты показывают не только теоретические знания студентов, но и навыки применения их на практике, что и является одним из важнейших показателей эффективности обучения. Большую роль в организации обучения занимает контроль познавательной деятельности учащихся. Контроль осуществляется не только для того, чтобы оценить деятельность учащегося, но, и чтобы скорректировать методику и совершенствовать организацию обучения при выявлении проблем при изучении материала.

Как известно, выделяются следующие виды контроля: *текущий, периодический* и *итоговый* [69].

Текущий контроль студента – это проверка выполнения СРС, которые даются на каждое занятие, работа студента у доски, проверка докладов, рефератов и др. Желательно проверять работы на каждом занятии. В таком случае выработается определенная система проведения аудиторных занятий, что дисциплинирует будущих учителей математики. Периодическим контролем в вузе является рубежный контроль. Помимо баллов, накапливаемых студентом на каждом занятии, следует провести контрольную работу или коллоквиум для выставления баллов на рубежном контроле. На занятиях алгебры мы проводили контрольные работы по решению практических заданий на 6 и на 14 неделе семестра, чтобы при выставлении баллов рубежного контроля были известны результаты контрольной работы.

Итоговым контролем в вузе является экзамен, который проводится в устной, письменной формах или в форме теста. В КазНПУ имени Абая экзамен по дисциплинам «Алгебра-1» и «Алгебра-2» проводится в письменной форме.

В настоящее время тестирование становится одной из основных форм контроля знаний. Тесты имеют такие недостатки, как: вероятность выбора ответа наугад, невозможность проследить ход мысли тестируемого, проверка только последнего действия и т.д. Но на практике, в вузе и в школе тест имеет и положительные характеристики:

- экономия времени (за небольшой промежуток времени контроль множества учеников или студентов);
- проверка знаний по большому объему учебного материала;
- простота проверки выполненной работы;
- объективность в оценивании выполненной работы.

К составлению теста необходимо отнестись очень ответственно. Важно, чтобы такой формой контроля можно было проверить не только знание определений, умение решать практические задания, но и умение анализировать, создавать, применять свои знания, способствовать развитию творческого подхода учащегося или студента [70].

Материалы текущих и рубежных контролей знаний студентов можно разрабатывать в соответствии с критериями оценки знаний учащихся средней школы обновленного содержания. Задания разделить по уровням (низкий, средний, высокий), причем для каждого из таких критериев, как знание, умение, применение, анализ и синтез. Например, в таблице 12 показаны уровни деятельности студентов по критериям для раздела «Матрицы» из курса «Алгебра – 1» [70, с. 156-159]:

Таблица 12 - Описание критериев деятельности студентов по уровням

Критерий	Низкий уровень	Средний уровень	Высокий уровень
Знание	Определение матрицы, различия в видах матриц.	Определение матрицы, признаки различных видов матриц; какие бывают операции над матрицами и их свойства, формулу нахождения определителя матрицы.	Определение матрицы, различать виды матриц; знать какие бывают операции над матрицами и их свойства, знать способы вычисления определителя матрицы; знать определения минора, дополнительного минора, ранга матрицы, определение обратной матрицы.
Умение	Сложить матрицы, умножить ее на число.	Умение сложить матрицы, умножить ее на число; уметь умножить согласованные матрицы, найти ранг матрицы, посчитать определители 2-го, 3-го порядков.	Умение сложить матрицы, умножить ее на число; уметь умножить согласованные матрицы, найти ранг матрицы, посчитать определители 2-го, 3-го порядков; уметь посчитать определители порядков >3, вычислить алгебраическое дополнение, найти обратную матрицу данной, уметь решать уравнения с матрицами.
Применение	Применять свойства операций над матрицами при решении задач.	Применять свойства операций над матрицами при решении задач; применять определители матриц в решении задач.	Применять свойства операций над матрицами при решении задач; применять определители матриц в решении задач; применять элементарные преобразования матриц в решении задач.
Анализ	Решение задач по образцу.	Решение задач самостоятельно с использованием известных формул и правил.	Решение задач самостоятельно с использованием известных формул и правил; может объяснить каждый шаг решения задачи, умеет применить формулы для любых типов задач.
Синтез	Должен уметь создать алгоритм решения задачи.	Должен уметь создать алгоритм решения задачи; уметь решить каждый этап алгоритма решения задачи.	Должен уметь создать алгоритм решения задачи; уметь решить каждый этап алгоритма решения задачи; должен уметь прогнозировать алгоритм решения задачи и находить кратчайший путь решения.

В таблице 13 представлена оценка знаний из раздела «Матрицы» по уровням сложности, на которые эффективно было бы поделить знания студентов при составлении заданий.

Таблица 13 - Оценка знаний из раздела «Матрицы» по уровням сложности

	Низкий		Средний	Высокий анализ		Высокий синтез
Знания	Запоминание	Понимание	Применение	Анализ	Оценка	создавать творчески
1	2	3	4	5	6	7
Матрицы и действия над ними. Что называют матрицей; Какие виды матриц бывают.	Воспроизводит понятие матрицы, вид матрицы, различия в видах матриц (треугольная, диагональная, транспонированная).	Осознанно использует терминологию матриц.	Применяет терминологию для описания матриц разного вида.	Соотносит вид и определение матрицы, классифицирует матрицы по разным видам.	Интерпретирует данную матрицу в вид, удобный для решения конкретной задачи.	Составляет самостоятельно матрицы разных видов.
Элементарные преобразования матриц	Знает правила, по которым осуществляются элементарные преобразования.	Приводит матрицу к конкретному виду с помощью элементарных преобразований.	Выполняет элементарные преобразования для рационального использования матриц.	Использует метод преобразования для конкретных задач с матрицами.	Выбирает рациональный метод преобразования для конкретных задач с матрицами.	Создает алгоритм решения определенного типа задач с помощью элементарных преобразований над матрицами.
Операции над матрицами. Сложение матриц и его свойства. Умножение матрицы на число. Умножен	Описывает сложение двух матриц и его свойства; умножение матрицы на число. Записывает правило умножения матрицы на число и	Понимает, как складываются две матрицы, умножает матрицу на число. Объясняет правило умножения двух матриц.	Выполняет действия с матрицами: складывает, умножает на число, умножает две матрицы, демонстрируя при этом	Перечисляет свойства сложения и умножения матриц, распознает первоначально заданную матрицу,	Рассуждает о коммутативности и ассоциативности операций над матрицами. Дает оценку о возможности	Составляет задачи с матрицами, комбинируя разные операции над ними.

Продолжение таблицы 13

1	2	3	4	5	6	7
ие согласованных матриц и его свойства.	перечисляет его свойства.		свойства соответствующих операций.	умноженную на число.	выполнения операции над матрицами.	
Минор. Алгебраическое дополнение. Ранг матрицы. Методы нахождения ранга матрицы.	Записывает определение минора матрицы, алгебраического дополнения. Воспроизводит определение ранга матрицы. Перечисляет методы нахождения ранга матрицы.	Классифицирует понятия миноров и ранга матрицы. Приводит примеры нахождения ранга матрицы.	Демонстрирует нахождение заданного минора матрицы и ее алгебраического дополнения. Четко формулирует определение ранга матрицы и подсчитывает его разными методами.	Различает понятия минора матрицы и ее ранга. Сравнивает понятия минора и алгебраического дополнения матрицы. Перечисляет методы нахождения ранга матрицы.	Оценивает наиболее рентабельный способ нахождения ранга матрицы.	Предвидит значение ранга матрицы по ее виду.
Обратная матрица.	Пишет определение обратной матрицы.	Рассуждает о понятии обратной матрицы.	Показывает нахождение обратной матрицы для данной.	Делает вывод о правильности нахождения обратной матрицы.	Решает примеры по нахождению обратной матрицы высоких порядков.	Составляет задачи по нахождению обратных матриц для матриц разных порядков.

Считаем, что в педагогическом вузе во время проведения контрольных работ или коллоквиумов очень актуально использовать критериальное оценивание, потому что оно дает возможность постоянно контролировать процесс усвоения новых знаний и навыков, а студенты будут учиться применять этот вид оценивания, что является необходимостью в их будущей профессиональной деятельности.

Критериальное оценивание – это процесс, основанный на сравнении учебных достижений учащихся с четко определенными, коллективно выработанными заранее известными всем участникам образовательного процесса (учащимся, администрации школы, родителям, законным представителям и т.д.) критериями, соответствующими целям и содержанию образования, способствующими формированию учебно-познавательной компетентности учащихся. *Критерий* – признак, основание, правило принятия решения по оценке чего-либо на соответствие предъявленным требованиям. Критерии описываются дескрипторами, в которых (для каждой конкретной работы) дается четкое представление о том, как в идеале должен выглядеть результат выполнения учебного задания, а оценивание согласно дескриптору – это определение степени приближения ученика к данной цели [71]. Пусть, например, нужно решить следующую задачу:

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Для данных матриц выполните следующие действия:

1) Определите виды матриц;

2) Найдите сумму матриц A и B;

3) Найдите произведение матриц A и B;

4) Найдите ранг матрицы B;

5) Найдите матрицу, обратную матрице, равной произведению матриц A и B. Сделайте проверку.

6) Найдите определитель матрицы, равной:

$$A\cdot B-\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

За правильное решение задачи можно получить 10 баллов.

Вследствие того, что для решения данной задачи используется совокупность всех знаний и умений, связанных с разделом «Матрицы», ее можно включить в контрольную работу, которую актуально провести для оценивания знаний студентов на рубежном контроле.

Оценивание выполненных заданий предлагается в таблице 14.

Таблица 14- Критерии оценивания

Критерий	Дескриптор	Балл
1	2	3
Знание видов матриц	1) Определяет вид матрицы	1
Знание свойств операций над матрицами	2) Обосновывает почему нельзя найти сумму данных матриц;	1
	3) Находит произведение матриц	1

Продолжение таблицы 14

1	2	3
Знание элементарных преобразований матриц, умение находить ранг матрицы	4) Находит ранг матрицы	1
Знание алгоритма нахождения обратной матрицы, умение находить обратную матрицу	5) : i) находит определитель матрицы; ii) находит алгебраические дополнения; iii) транспонирует матрицу; iv) применяет свойство обратной матрицы для проверки	 1 1 1 1
Умение находить сумму матриц и определитель матрицы	6) : i) находит сумму матриц; ii) находит определитель матрицы	 1 1
Итого:		10

2.3 Возможности использования компьютерных программ при обучении курсу алгебры в школе и вузе

На современном этапе развития общества информационно-коммуникационные технологии (ИКТ) все более массово внедряются в образовательный процесс. Они являются наиболее эффективным средством обучения, способствующим оптимизации деятельности ученика и учителя; открывают педагогам новые возможности для широкого внедрения в педагогическую практику новых методических разработок, направленных на формирование основы информационной культуры обучающихся, интенсификацию и реализацию инновационных идей в обучении. Использование ИКТ позволяет модернизировать учебный процесс в школе, открыть широкий простор для творчества учителей и учащихся, повысить эффективность их деятельности, мотивировать учащихся на поисковую деятельность, дифференцировать обучение с учетом их индивидуальных особенностей, расширить возможности проведения научно– исследовательских работ и т.д.

Вместе с тем, эффективное использование средств ИКТ изменяет содержание методов и организационных форм учебной работы в условиях становления «новой» школы, которая призвана решать задачу подготовки молодежи к жизни в информационном обществе.

Правильно выбранная по содержанию и функциональному назначению компьютерная программа может поддержать все этапы проведения урока. Применение компьютерных программ оказывает учителю не только методическую, но и технологическую помощь, создает огромный потенциал повышения эффективности обучения. Доказано, что через зрение в мозг человека поступает около 70% информации. Поэтому для повышения интереса к предмету надо использовать качественное визуальное сопровождение. Под визуальным сопровождением понимается наличие наглядных интерактивных моделей в учебном процессе. Существуют следующие виды компьютерных программ бесплатного распространения, которые заменяют лицензионные коммерческие пакеты по построению графиков: Veusz – Scidavis, OpenDX, Gretl (Gnu Regression, Econometrics and Time-series Library), MayaVi, Zhu3D, GnuPlot, Extrema (ранее Physica), RLPlot, Fityk и Advanced Grapher, GeoGebra [72].

Программа GeoGebra, как многофункциональное средство обучения математическим дисциплинам, выполняет множество учебных задач при проведении занятий в школе и вузе. Например, при изучении темы «Построение треугольника по трем сторонам» выполняет функцию инструмента черчения (циркуль, карандаш, линейка); интерактивного плаката, реализующего принцип наглядности обучения; классной доски при построении треугольника; инструмента создания модели для исследования; инструмента проведения виртуального эксперимента. Используя возможности программы, учащиеся могут наблюдать, как будет меняться модель (треугольник) при изменении длин сторон *a, b, c* и делать соответствующие выводы: если сумма длин двух его сторон меньше длины третьей стороны, то задача построения треугольника по трём сторонам не имеет решения. Использование ИКТ в учебном процессе определяется содержательным, методическим, эргономическим и технологическим качествами.

Современные компьютерные средства, в частности программа GeoGebra, которую свободно можно скачать с официального сайта www.geogebra.org [73], позволяют существенно повысить наглядность при обучении алгебре.

Бесплатная компьютерная программа GeoGebra, которая включает геометрию, алгебру, таблицы, графы, статистику и арифметику позволяет моделировать и решать различные алгебраические и геометрические задачи, строить графики функций, находить наибольшие и наименьшие значения, пределы, производные, интегралы, получать изображения плоских и пространственных фигур, проводить дополнительные построения, создавать анимацию рисунков. Кроме того, эта программа позволяет ставить опыты, проводить эксперименты, иллюстрировать формулы и теоремы, устанавливать зависимости между величинами и многое другое.

Объекты можно строить, используя панель инструментов или вводить координаты точек вручную. На рисунке 10 показано рабочее окно этой программы. В верхней его части расположено меню.

Если кликнуть левой кнопкой мыши по окошку с изображением пирамиды, то откроются дополнительные окошки с инструментами, позволяющими моделировать различные многогранники. Кроме того, можно получать правильные многогранники.

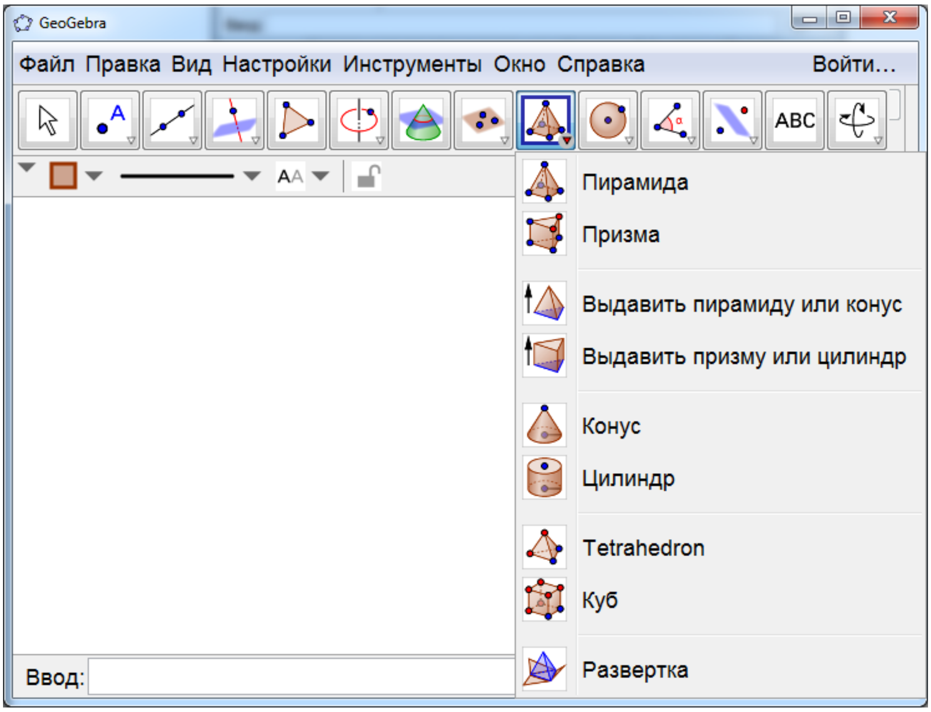

Рисунок 10 - Интерфейс окна программы GeoGebra

При изучении графика функции в курсе алгебры, можно использовать программу GeoGebra. Данный пакет программы дает возможность не только наглядно представить график функции, но и видеть «перемещения» графика (свойства) в следствии изменения некоторых его данных.

В программе GeoGebra очень удобно показывать зависимость расположения графиков функций, например, линейной $y = kx + b$ от коэффициентов k и b (рисунок 11) или, квадратичной $y = ax^2 + bx + c$ от коэффициентов a, b и c (рисунок 12).

Для построения графика функции $y = kx + b$ или $y = ax^2 + bx + c$ в нижней строке «Ввод» необходимо написать формулу «*kx*+*b*» или «*ax*^2+*bx*+*c*» и нажать «Enter», тогда на экране появится соответствующий график функции (рисунок 11, 12). Нажав правой кнопкой на линию графика, в появившейся вкладке «Свойства» можно выбрать толщину, стиль и цвет графика. Его можно увеличивать или уменьшать, поворачивать, менять обозначения вершин, толщину и цвет линий и осей координат и др.

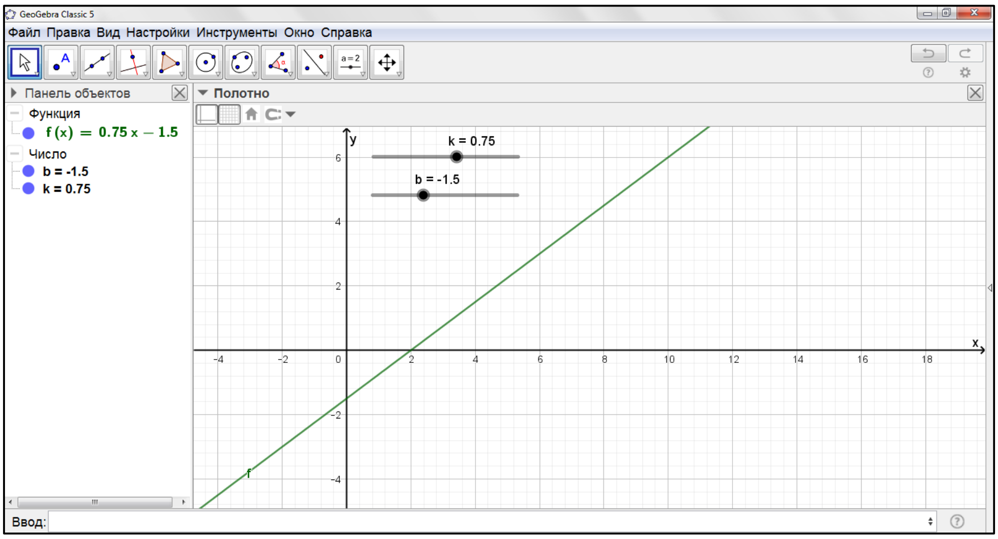

Рисунок 11 - График функции $y = kx + b$ в программе GeoGebra

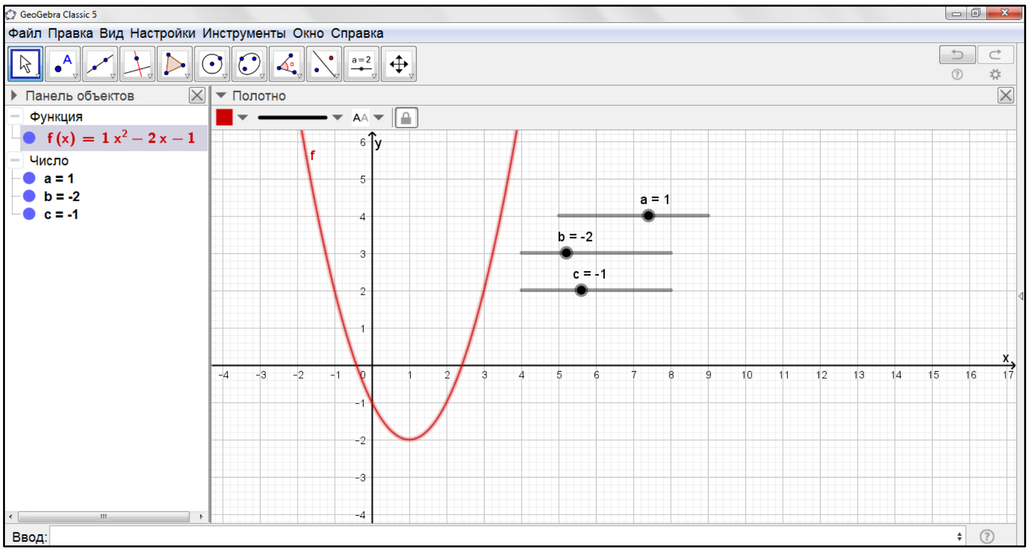

Рисунок 12 - График функции $y = ax^2 + bx + c$ в программе GeoGebra

При активизации горизонтальных и вертикальных линий сетки можно определить точки пересечения графика с осью ***x*** и с осью ***y*** и вывести таблицу значений.

Преимущество программы в том, что в рабочей области, т.е. в одной и той же системе координат, можно одновременно строить несколько графиков. По графикам функций можно установить их взаимное расположение.

Так, например, можно показать как меняется график функции $y = x^2$ при изменении квадратичной функции на $y = (x-3)^2$ и $y = x^2 + 4$ (рисунок 13). Учащимся наглядно представлено как график функции $y=x^2$ меняется по оси ***x*** и по оси ***y***, тем самым вырабатывается навык построения и изменения графика по осям.

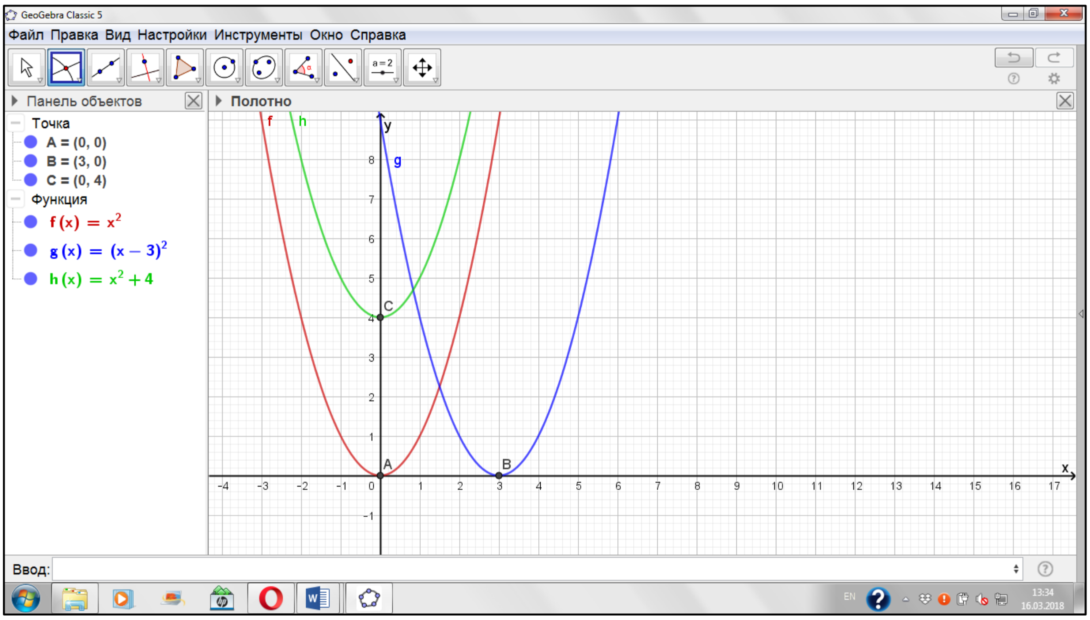

Рисунок 13 - Графики функции $y = x^2$, $y = (x-3)^2$ и $y = x^2 + 4$

GeoGebra дает возможность организовывать исследовательскую деятельность учащихся: делать выводы о расположении графиков функций в зависимости от коэффициентов, находить метод построения графика более сложных функций с помощью преобразования графиков элементарных функций, также открывать свойства геометрических фигур (сумма углов треугольника, длина окружности и площадь круга, теорема Пифагора и пр.).

Благодаря команде **Протокол,** можно «проиграть» построенные заранее чертежи как преподавателю во время урока (для экономии времени), так и учащимся дома при подготовке домашнего задания, повторении учебного материала.

Таким образом, применение программы GeoGebra возможно на любом этапе урока по алгебре. Рассмотрим решение систем линейных уравнений из школьного курса алгебры графическим способом. При этом используется следующий алгоритм:

- построить графики уравнений системы в одной координатной плоскости;
- найти координаты точек пересечения точек графиков уравнений (если они пересекаются);
- записать ответ в виде множества пар, которые являются координатами точек пересечения графиков.

Используем компьютерную программу GeoGebra для решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными графическим способом из курса алгебры 7 класса [74].

Пример 12. Решим систему уравнений: $\begin{cases} x = -7 + y \\ 2x - 3y = -16 \end{cases}$

1) построим графики функций, которыми будут являться прямые: $y = x + 7$ и $2x - 3y = -16$

2) найдем координаты точки пересечения данных прямых А(-5; 2) (рисунок 14).

Точка пересечения находится с помощью команды «Пересечение» с указанием линий графиков функций.

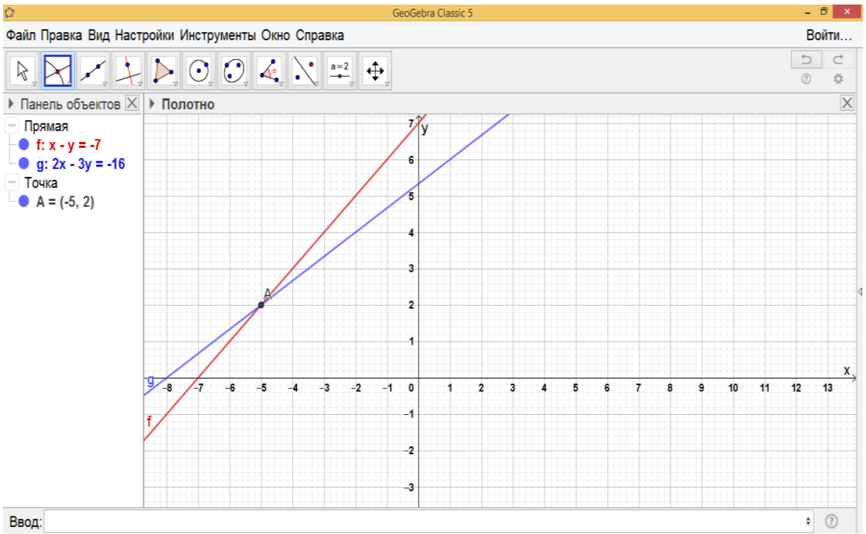

Рисунок 14 - Графики функций $y = x + 7$ и $2x - 3y = -16$

В результате решением данной системы будет являться пара чисел $x = -5$ и $y = 2$.

В следующем примере можно наглядно показать учащимся случай, когда система линейных уравнений с двумя неизвестными не имеет решений.

Пример 13. Решим систему уравнений: $\begin{cases} 3x + 4y - 5 = 0 \\ 1{,}5x + 2y = -7 \end{cases}$

1) построим графики функций, которыми будут являться прямые: $3x + 4y - 5 = 0$ и $1{,}5x + 2y = -7$ (рисунок 15)

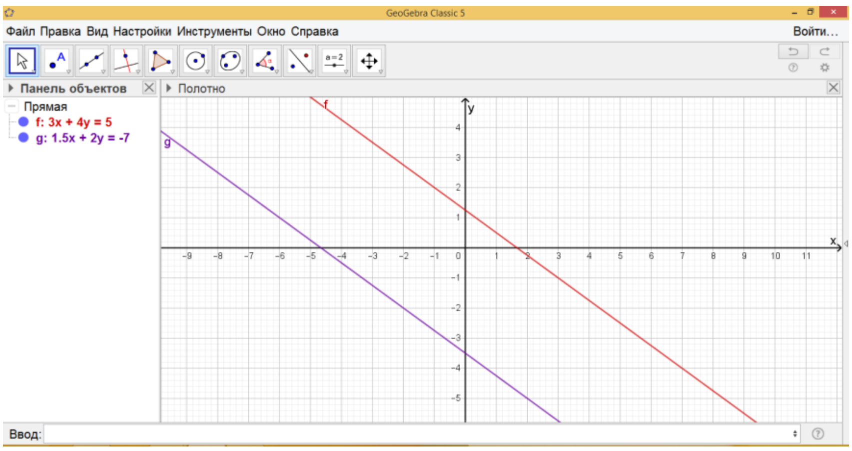

Рисунок 15 - Графики функций $3x + 4y - 5 = 0$ и $1{,}5x + 2y = -7$

На рисунке видно, что графиками функций, полученных из уравнений системы, являются параллельные прямые. То есть точки пересечения полученных прямых нет, и, следовательно, система не имеет корней.

Также можно наглядно показать решение системы линейных уравнений, когда система имеет множество решений.

Пример 14. $\begin{cases} 3x - 7y + 3 = 0 \\ 9x = 21y - 9 \end{cases}$

1) Построим графики функций $3x - 7y + 3 = 0$ и $9x = 21y - 9$ (рисунок 16).

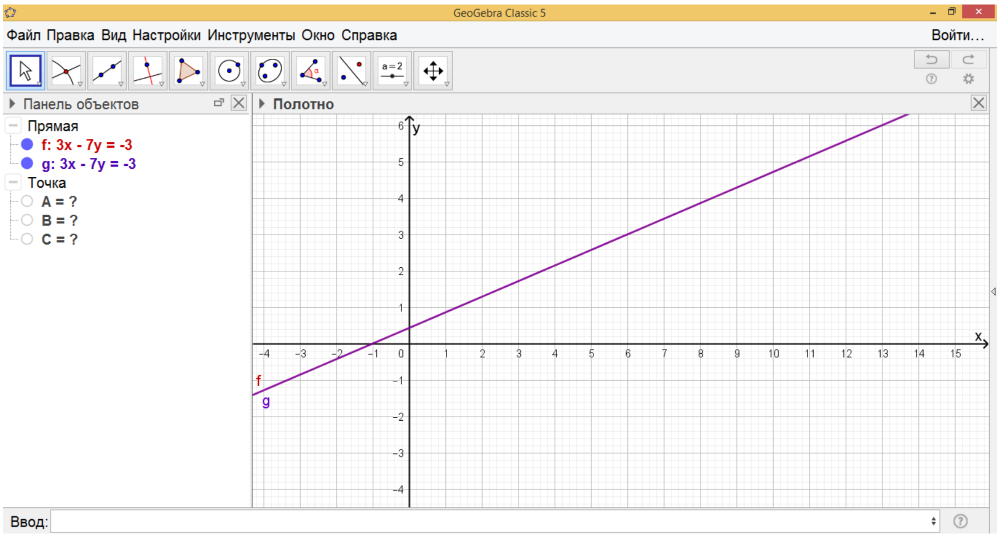

Рисунок 16 - Графики функций $3x - 7y + 3 = 0$ и $9x = 21y - 9$

При вводе данных функций программа автоматически преобразовывает их в соответствующие равные функции.

Как видно, графики линейных уравнений системы совпадают. Откуда можно сделать вывод, что решением данной системы будут пары чисел, являющиеся координатами точек прямой $y = \frac{3}{7}x + \frac{3}{7}$.

Особый интерес представляет графическое решение задач с параметрами.

Задача. При каких значениях параметра *m* уравнение $|x^2 - 5x + 6| = m$ имеет ровно три корня. Для того, чтобы решить эту задачу графически, переформулируем ее следующим образом: «Постройте график функции $y = |x^2 - 5x + 6|$ и найдите, при каких значениях *m* прямая *y*=*m* пересекает построенный график ровно в трех точках.

1) Построим график функции $y = |x^2 - 5x + 6|$.

2) Создадим ползунок для параметра *m*.

3) Строим график функции *y*=*m* (управляемый ползунком).

Теперь, перемещая ползунком горизонтальную линию (график функции *y*=*m*), наблюдаем за точками пересечения двух графиков. Тогда, три точки пересечения графиков функций соответствует прямой *y*=4, когда прямая проходит через вершину части параболы [75]. На рисунках 17-19 показано несколько случаев пересечения двух графиков.

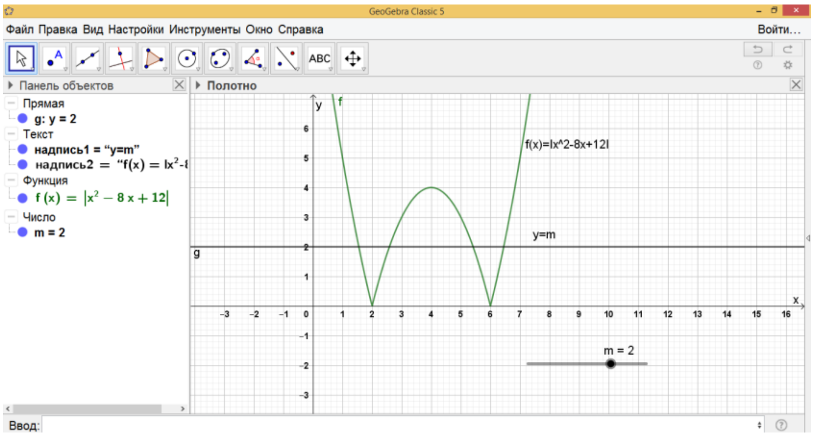

Рисунок 17 - Пересечение графиков функций в четырех точках

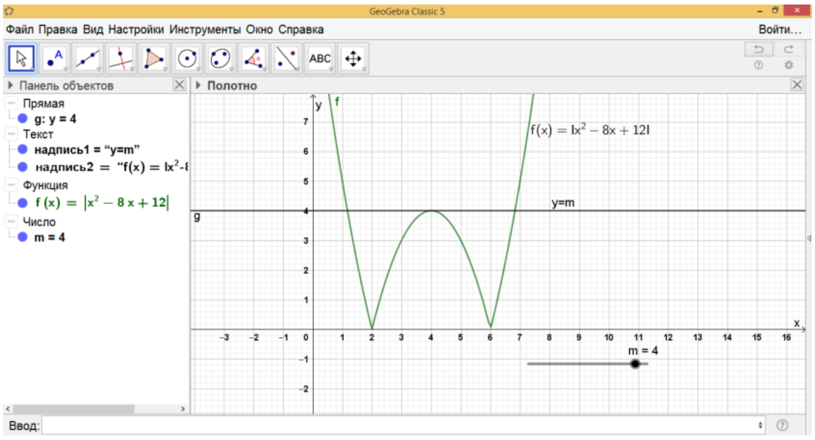

Рисунок 18 - Пересечение графиков функций в трех точках

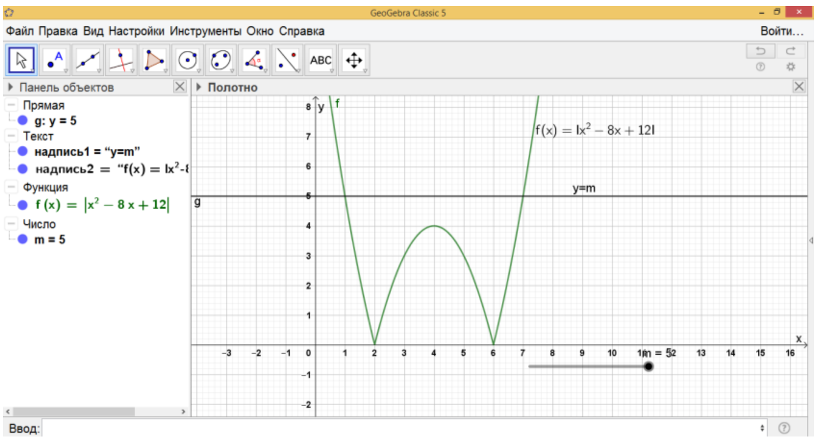

Рисунок 19 – Пересечение графиков функций в двух точках

Таким образом, используя программу GeoGebra учащиеся графически определяют количество корней уравнений, а также находят значения действительных корней.

Надо отметить, что данную программу можно применять как в школах, так и в вузах.

Если графическое изображение решений линейных или квадратных уравнений студентам не представляет труда, то представление на графике решений уравнений высших степеней обычно для них затруднительно.

Например, уравнения высших степеней студенты могут решить разными способами: использовать формулы Кардано или Феррари (в зависимости от степени уравнения), схему Горнера, деление многочлена на одночлен и другие. Часто, найденное значение одного действительного корня уравнения позволяет понизить степень многочлена из этого уравнения, что упрощает его решение. Данная программа позволяет без затруднений найти такие корни.

Пример 15. Решить графически уравнение: $x^3+2x^2-2x-1=0$ [18]

1) запишем данное уравнение в виде: $x^3=-2x^2+2x+1$

2) построим графики функции $y=x^3$ и $y=-2x^2+2x+1$

3) найдем абсциссы их точек пересечения: x= -2,62; x= -0,38; x=1 (рисунок 20).

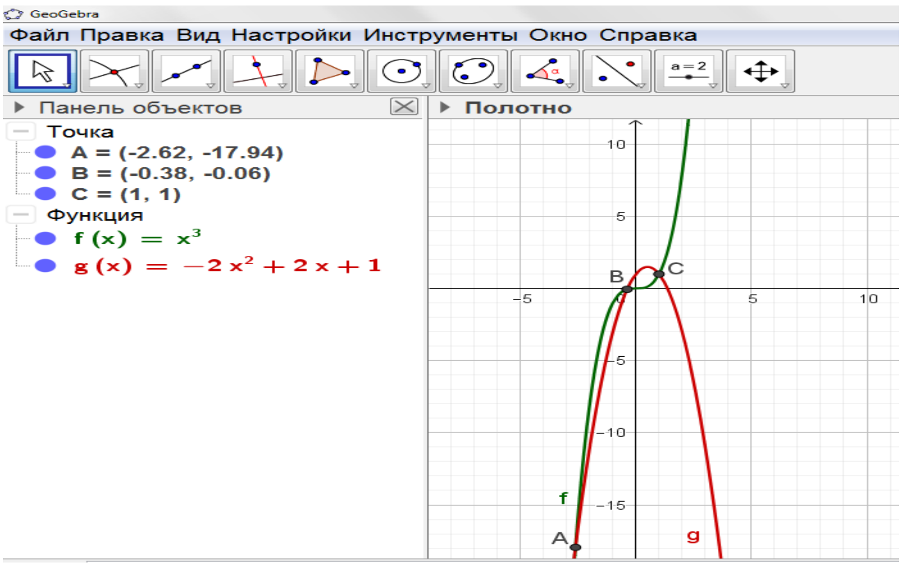

Рисунок 20 - Графики функций $y=x^3$ и $y=-2x^2+2x+1$

Значит, данное уравнение имеет корни $x_1=-2{,}62$, $x_2=-0{,}38$, $x_3=1$. Компьютерная программа показывает нам три корня, только один из которых целый. Поэтому, используя $x_3=1$, можно найти запись остальных двух корней.

В общем, компьютерную программу GeoGebra можно использовать в различных направлениях математики:

- для визуализации линейных и квадратных уравнений с параметрами, решения систем уравнений;

- визуализации тригонометрических и логарифмических функций, функций с модулем, решения неравенств;
- исследования свойств функций;
- изучения понятия производной;
- построения фигур на плоскости;
- построения описанных (вписанных) окружностей вокруг многоугольников, определения периметра и площади многоугольников;
- построения объемных фигур и их сечений;
- построения комбинаций многогранников и тел вращения;
- вычисления вероятности и статистических характеристик, в том числе с возможностью представления результата распределения вероятностей в виде графа;
- выполнения символьных вычислений при помощи системы компьютерной алгебры (CAS);
- работы с электронными таблицами (ведение сложных статистических, финансовых и прочих расчетов).

Применение программы GeoGebra на уроках позволяет: оптимизировать учебный процесс, более рационально используя время на различных этапах урока; осуществлять дифференцированный подход в обучении; проводить индивидуальную работу, используя персональные компьютеры; снизить эмоциональное напряжение на уроке, внося в него элемент игры; расширить кругозор учащихся; способствует развитию познавательной активности учащихся.

Считаем, что каждый учитель математики должен попробовать включить в свой арсенал приложение «GeoGebra», т.к. данная программа является отличным инструментом, который позволяет не просто разнообразить уроки математики, но и повысить уровень качества преподавания.

Таким образом, использование компьютерных программ на уроках алгебры вызывает желание у учащихся работать с мультимедийными средствами, творческими заданиями, возможностью без учителя (для себя) проверить свои знания в конкретном разделе математики, помогает быстро и глубоко усвоить материал, вырабатывает навык работы с тестами, которые в последнее десятилетие приобрели особый статус контрольных материалов. Для учителя компьютер представляет источник учебной информации (частично заменяющий книгу), наглядное электронное пособие, индивидуальное информационное пространство, средство контроля, приемлемое для эффективного использования времени на уроках [76].

2.4 Экспериментальная работа и анализ ее результатов

Для решения поставленных задач, проверки эффективности и корректировки предлагаемой методики была проведена экспериментальная работа с учащимися общеобразовательной школы №142 и школы-гимназии №103 города Алматы, а также с первокурсниками специальности «5В010900 –

Математика» в Казахском Национальном педагогическим университете имени Абая.

Исследование проводилось поэтапно в период с 2014-2017 годы:

- констатирующий эксперимент (2014-2015 учебный год);
- формирующий эксперимент (2015-2016 учебный год);
- обучающий эксперимент (2016-2017 учебный год).

В ходе проведения педагогического эксперимента мы придерживались требований к организации проведения педагогических исследований, содержащихся в работах Бабанского Ю.К., Загвязинского В.И., Поташника М.М., Лернера И.Я., Новикова А.М., Крампит А.Г. [77-82].

Задания срезов и контрольных работ для обучающихся были составлены по четырем признакам: действенности, понимания, прочности, полноте овладения учебным материалом, на которых основываются результаты исследований таких ученых, как Ю.М. Колягин, В.В. Фирсов, Л.В. Кузнецова [83-85].

Основная цель *констатирующего эксперимента*:

- определить уровень знаний школьников и студентов-первокурсников по алгебре, умение решать алгебраические задачи и аргументировать ход решения заданий, навыки самостоятельной работы и умение обучающихся работать в группах в школах и вузе;
- определить качество обучения курсу алгебры в школе и вузе;
- определить трудности, возникающие у школьников и студентов в процессе обучения курсу алгебры.

В констатирующем эксперименте участвовало 46 студентов, 437 учеников (7-9 классы).

Основные методы данного этапа эксперимента: посещение уроков алгебры в школе и лекционных и практических занятий по алгебре в вузе; проведены беседы с учителями и школьниками о возникающих проблемах в процессе обучения алгебре в школе, была проведена проверка рабочих тетрадей и тетрадей для контрольных работ, были проанализированы учебные программы по алгебре для 7-9 классов и по алгебре и началам анализа для 10-11 классов; также проводился анализ содержания образовательной программы специальности «5В010900 – Математика», диссертационных работ по темам, близкой к теме нашего исследования.

Опросы и беседы со студентами и преподавателями вуза были проведены с целью:

- выявления мотивации обучения и мировоззрения студентов;
- выявления понятия о целях, задачах, значимости и роли курса алгебры в системе математической подготовки будущего учителя математики;
- определения уровня знания и применения приемов анализа и синтеза, аналогии и классификации, индукции и дедукции;
- выявления уровня сформированности абстрактного мышления, готовность студентов к изучению курса линейной и общей алгебры.

В ходе исследования выяснилось, что в школе решение заданий проходит по заданному шаблону, ввиду чего многие школьники не проявляют интереса к учебному предмету, хотя большинство из них считают изучение математики обязательным для любого человека.

Анализ посещенных уроков, бесед с учителями и учащимися, проверка тетрадей позволили сделать вывод о необходимости формирования у школьников умений и навыков использования полученных знаний при решении алгебраических заданий, заинтересованности учащихся изучением курса алгебры, активизации учебно-познавательной деятельности школьников на уроках алгебры.

С определенными трудностями сталкивались и первокурсники, которые только начинали адаптироваться к организации процесса обучения в вузе. Не привыкшие к активной деятельности и самостоятельному поиску необходимого материала, студенты часто приходили не подготовленные к занятию. На лекциях испытывали затруднения в конспектировании, т.к. должны были выполнять сразу две функции одновременно: слушать новое и записывать главную мысль услышанного. На практических занятиях в связи с объемными решениями заданий успевали рассматривать лишь единицы примеров и т.д.

Формирующий эксперимент в школе заключался в проведении уроков алгебры в соответствии с предлагаемой нами методикой организации обучения: проведение занятий с применением методов и форм обучения, подразумевающих активную познавательную деятельность учеников, проведение уроков-лекций, семинарских занятий в школе, изучение возможностей компьютерных программ для визуализации некоторых алгебраических понятий в объяснении нового материала.

Основной целью данного этапа эксперимента является определение необходимых компонентов методики и выявление методических особенностей обучения курсу алгебры и уточнение разработанной методики.

На этом этапе занятия проводились в 8-ых классах вышеуказанных школ. Так, в школе №103 количество учеников экспериментального класса – 25 человек, параллельные классы (контрольные) – количеством 23 и 25 человек (в общем – 48 учеников). В школе №142 количество учеников экспериментального класса составляло 21 человек, контрольные классы – 23 и 20 человек (в общем 43 ученика). В начале 2015-2016 учебного года мы провели контрольную работу (Контрольная работа №1 в приложении В) для определения уровня знаний учащихся материала предыдущих лет обучения. При этом были зафиксированы трудности восприятия учебного материала при разработанном подходе к обучению. Оказалось, что не все школьники готовы были работать активно на уроке, не всегда понимали, что от них требуется, некоторым учащимся тяжело было работать в группе.

В конце учебного года была проведена контрольная работа (Контрольная работа №2 в приложении В), целью которой было определить изменения в уровне и качестве знаний восьмиклассников.

В КазНПУ имени Абая занятия по алгебре проводились по специально разработанной методике. Первым шагом было осуществлено «уравнивание» знаний студентов, полученных в школе. Для этого, в содержание курса «Алгебра

– 1» был введен раздел «Введение в общую алгебру», где рассматриваются базовые определения понятий (от понятия действия и до понятий группы, кольца, поля) для дальнейшего изучения курса. Большой акцент делался на самостоятельную деятельность первокурсников, использовался дифференциальный подход к обучению. Во время данного этапа эксперимента, на основе усвоенности нового материала студентами, регулировалось количество часов, выделенных на изучение каждого раздела курса алгебры.

В результате формирующего этапа эксперимента нами была апробирована и скорректирована наиболее приемлемая для учителей и учащихся школ, для преподавателей и студентов педагогических вузов методика организации обучения курсу алгебры, а также была подтверждена целесообразность использования компьютерной программы GeoGebra для визуализации фундаментальных понятий курса алгебры.

На обучающем этапе эксперимента были проведены занятия по алгебре в соответствии с уточненной методикой организации обучения; проводилась работа по обобщению, систематизации и конкретизации предлагаемой методики обучения; была осуществлена обработка результатов проведенного эксперимента.

Занятия проводились в 8 классах тех же школ. В школе №103 количество учеников экспериментальной группы (два 8 класса) – 23 и 26 человек (в общем – 49 человек), параллельный класс (контрольный) – количеством 24 человек. В школе №142 количество учеников экспериментальной группы (два 8 класса) составляло 25 и 23 человека (в общем 48 учеников), контрольный класс – 23 человека. В начале учебного года была проведена контрольная работа №1.

В итоге, в педагогическом эксперименте, проведенном в школах, участвовало: в экспериментальной группе обучалось 143 восьмиклассника, в контрольной группе – 138 (количество участвующих в эксперименте школьников приведено за два учебных года).

Ученики экспериментальной группы были активны на занятиях алгебры, были увлечены и заинтересованы возможностями компьютерной программы GeoGebra. Учащиеся показали хорошие результаты по итогам контрольной работы №2, в содержание которой были включены задания, составленные по материалам основных тем алгебры 8-го класса.

Количество студентов экспериментальной группы составляет 46 человек (группы МОР-151 (13 человек), МОК-161 (22 человека), МОР-161 (11 человек), контрольная группа – 36 (группы МОК-153 (14 человек), МОК-162 (22 человека)).

Студенты экспериментальной группы также проявляли большой интерес в период обучения курсу алгебры, были активны не только на практических занятиях и семинарах, но и на лекциях.

Решения задач разбирались у доски, причем преподаватель «вмешивался» только в случае, когда допускалась ошибка или, когда у студентов возникали трудности в построении алгоритма решения конкретной задачи. Более «сильные» студенты выполняли роль консультантов в процессе решения заданий по алгебре студентами со средним и низким уровнями знаний. Первокурсники осознавали важность активной познавательной деятельности на учебных занятиях, что именно такая организация выполнения разных видов заданий успешно формирует качественные знания по предмету. Активность и увлеченность студентов наблюдалась во время применения компьютерной программы GeoGebra, которая раскрывала новые возможности при решении алгебраических задач. Такое проведение занятий вызывало у студентов большой интерес к изучению новых разделов алгебры.

Систематически школьникам и студентам на самостоятельную работу выносились задания теоретического и практического содержания (приложение Б).

Результаты полученных знаний школьников и студентов в ходе проведенного эксперимента оценивались нами по уровням: высокий, средний и низкий.

Высокий уровень характеризуется тем, что обучаемый усвоил теоретический материал в полном объеме, может применить свои знания при решении практического задания. При решении алгебраических задач свободно определяет алгоритм решения, в конкретных случаях может привести несколько способов решения одного и того же задания.

Средний уровень соответствует знаниям обучающихся, которые решают практические задания с подсказкой педагога, т.е. знают способы и алгоритмы решения, но не могут самостоятельно применить их к решению задач.

К низкому уровню относятся знания обучающихся, которые не усвоили теоретического материала, не умеют самостоятельно решать практические задачи, или решают, но с ошибками даже по шаблону.

Для определения эффективности разработанной методики организации обучения курсу алгебры и вычисления количественных и качественных показателей проводимого педагогического эксперимента был применен статистический критерий Манна-Уитни, который вычисляется по формуле:

$U = n_1 \cdot n_2 + \dfrac{n_x \cdot (n_x + 1)}{2} - T_x$, где n_1– количество элементов в первой выборке, n_2– количество элементов во второй выборке, T_x– большая из ранговых сумм, соответствующая выборке с n_x элементами.

Гипотеза, расчет критерия и анализ полученных результатов приведены в приложении Д.

В таблицах 15, 16 показан сравнительный анализ результатов контрольных работ школьников (таблица 15) и студентов (таблица 16) (студентам, как и школьникам были проведены контрольные работы №1 до эксперимента и №2 после эксперимента, задания которых приведены в приложении Г).

Таблица 15 - Сравнительный анализ результатов контрольных работ школьников

Группа	Кол-во учащихся группы	Кол-во уч-ся, получивших оценки				Качество знаний	Успеваемость
		5	4	3	2		
Результаты контрольной работы №1 (до эксперимента)							
Экспериментальная	143	15	71	48	9	60	94
Контрольная	138	16	74	41	7	65	95
Результаты контрольной работы №2 (после эксперимента)							
Экспериментальная	143	28	96	19	-	87	100
Контрольная	138	15	77	41	5	67	96

Наглядно, анализ результатов показан на рисунках 21 и 22. Низкий уровень учащихся определяется у школьников, получивших за контрольную работу оценки «2» и «3», средний уровень – оценку «4», высокий уровень – оценку «5».

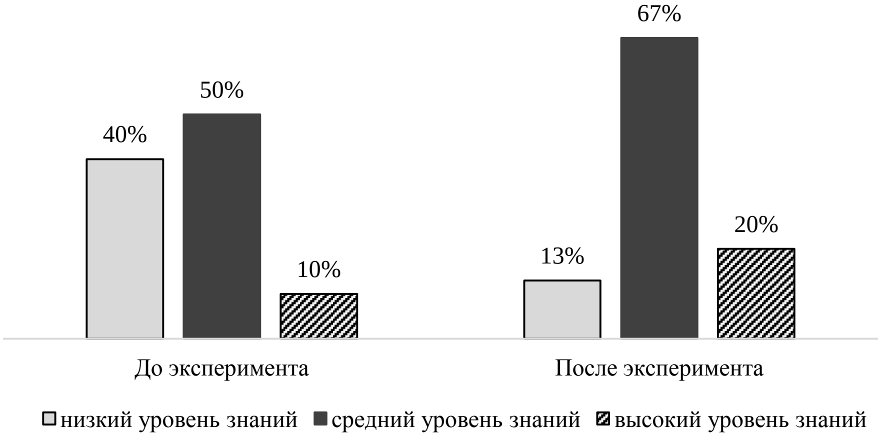

Рисунок 21 - Уровни знаний школьников экспериментальной группы (количество учащихся дано в %)

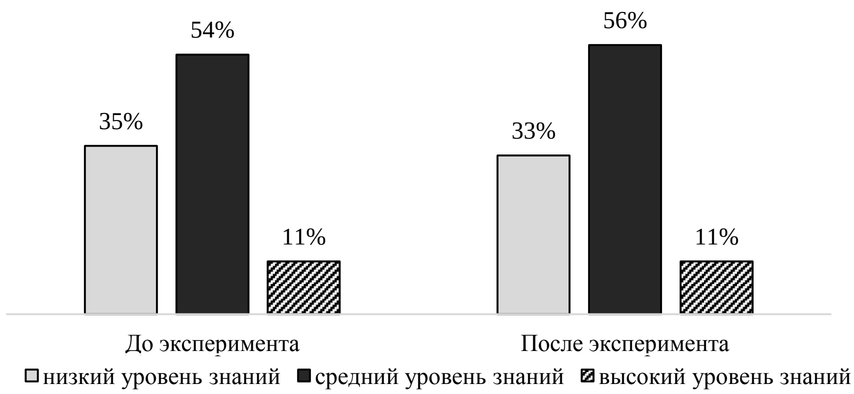

Рисунок 22 - Уровни знаний школьников контрольной группы (количество учащихся дано в %)

По данным диаграмм можно сделать вывод, что в итоге проведения педагогического эксперимента качество успеваемости учащихся экспериментальной группы, которое было установлено нами по результатам контрольных работ, повысилось, а в результатах контрольной группы не произошло особых изменений. Сравнение результатов учащихся контрольной и экспериментальной группы показало, что до проведения эксперимента качество успеваемости экспериментальной группы было несколько ниже, а после обучения школьников по предлагаемой нами методике, успеваемость экспериментальной группы стала выше, чем в контрольной группе.

Контрольные работы студентов оценивались по 100-балльной шкале по следующей системе: Отлично – 90-94 (А-), 95-100 баллов (А); хорошо – 75-79 (В-), 80-84 (В), 85-89 (В+); удовлетворительно – 50-54 (D), 55-59 (D+), 60-64 (С-), 65-69 (С), 70-74 (С+); неудовлетворительно – 0-49 (F).

Таблица 16 - Сравнительный анализ результатов контрольных работ студентов

Группа	Кол-во студентов	Кол-во уч-ся группы, получивших оценки			
		Отл	Хор	Удовл	Неуд
Результаты контрольной работы №1 (до эксперимента)					
Экспериментальная	46	10	15	16	5
Контрольная	36	8	13	12	3
Результаты контрольной работы №2 (после эксперимента)					
Экспериментальная	46	13	25	8	-
Контрольная	36	7	15	13	1

Анализ данных результатов контрольных работ студентов показан в диаграммах на рисунках 23 и 24.

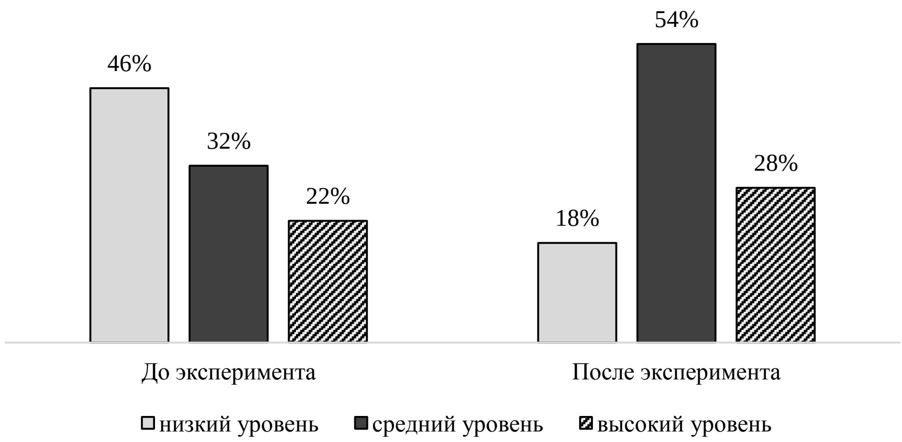

Рисунок 23 - Уровни знаний студентов экспериментальной группы (количество студентов дано в %)

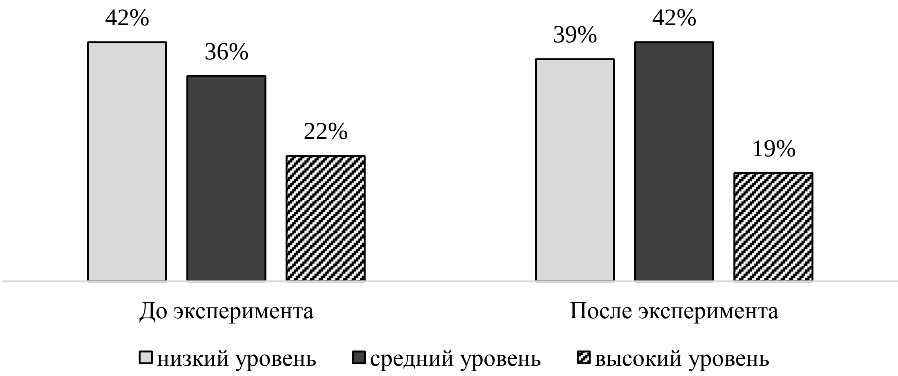

Рисунок 24 - Уровни знаний студентов контрольной группы (количество студентов дано в %)

На диаграммах показаны результаты воздействия экспериментальных методик на показатель уровня знаний студентов экспериментальной группы по отношению к аналогичным показателям студентов контрольной группы в результате обучения курсу алгебры. На рисунках видно, что уровень знаний студентов экспериментальной группы повысился после проведенного эксперимента, причем по сравнению с результатами этой же группы до эксперимента и с результатами студентов контрольной группы после изучения ими курса алгебры. Если сравнивать результаты обучения курсу алгебры студентов контрольной группы, то они не имеют особых изменений.

Итоги опытно-педагогической работы показали, что разработанная нами методика организации обучения курсу алгебры эффективна и способствует успешному овладению знаниями по алгебре школьниками и студентами педагогических вузов.

Выводы по 2 разделу

Во втором разделе разработана методика организации обучения курсу алгебры в школе и педагогическом вузе. Нами было предложено содержание курса алгебры, которое основывается на применении полученных знаний, умений и навыков будущими учителями математики в своей профессиональной деятельности. В связи с происходящим переходом на обновленное содержание школьного образования меняется структура и организация урока. Все чаще в учебном процессе используют активные методы обучения предмету. Так, мы показали применение визуализации на уроке, метода аргументирования действий при решении алгебраических задач. Также на конкретных примерах были показаны урок-лекция с использованием блок-схем, урок-семинар, урок-игра.

Традиционное преподавание курса алгебры в вузе проходит в форме «лекция – практика». Студенты-первокурсники сложно адаптируются к новой организации обучения, в связи с чем успеваемость обучающихся обычно снижается. Предложенные методические рекомендации по применению в процессе обучения курсу алгебры в педагогическом вузе нетрадиционных форм лекций и практических занятий дает возможность первокурсникам не только качественно усвоить материал по алгебре, но и научится использовать формы и методы обучения этому предмету в своей будущей профессиональной деятельности.

В работе показаны примеры визуализации некоторых алгебраических понятий таких, как: система уравнений имеет множество корней, единственный корень, не имеет корней, и др. с помощью компьютерной программы GeoGebra. Представлены примеры использования данной программы для решения уравнений высших степеней в вузовском курсе алгебры. Также, показан пример критериального оценивания задания на тему «Матрицы», которое можно использовать при проверке контрольных и самостоятельных работ в педагогическом вузе.

Описана экспериментальная работа по выявлению эффективности разработанной методики обучения школьников и студентов педагогического вуза. Приведены сравнительные данные экспериментальных и контрольных групп учащихся школ и студентов педвуза. Экспериментальная проверка предлагаемой методики обучения курсу алгебры в школе и педагогическом вузе подтвердила справедливость гипотезы данного исследования. Эксперимент показал, что разработанные методические рекомендации по использованию активных методов обучения и компьютерной программы GeoGebra, нетрадиционные формы лекций и практических занятий ведут к повышению эффективности обучения курсу алгебры в школе и педвузе, влияет на развитие необходимых знаний и умения их применять в учебной деятельности школьников и студентов, формирует профессиональные качества будущих учителей математики, обеспечивает достижение целей обучения на достаточном уровне.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе проведенного теоретико-практического исследования были получены следующие результаты:

1. Определено современное состояние методики обучения курсу алгебры в общеобразовательной школе и педагогическом вузе и тенденции его развития. Проанализированы содержания учебных программ школьного и вузовского курсов алгебры, выявлены их особенности и недостаточная взаимосвязь. На основе бесед с учителями и преподавателями, посещения уроков в школах и занятий в вузе определены затруднения обучаемых при изучении разделов алгебры.

2. Исследуя преемственность в единстве содержательного и процессуального аспектов, и не только содержания, но и методов и форм обучения курсу алгебры в школе и педагогическом вузе, был сделан вывод, что изменения, происходящие сегодня в школьном образовании, а именно обновление содержания образования, должны отражаться на организации обучения в педвузе. Подход к обучению, методы и формы обучения будущих учителей математики должны меняться в соответствии с запросами и требованиями современного общества.

3. Проведен отбор содержания курса алгебры для студентов специальности «5В010900 – Математика» Казахского национального педагогического университета имени Абая, нацеленный на овладение ими ключевыми и предметными компетенциями, необходимыми для будущей профессиональной деятельности.

4. Разработана методика организации обучения курсу алгебры в школе и педвузе. Предложены разработки проведения занятий по алгебре в школе, направленных на повышение активной познавательной деятельности учащихся. Раскрыты методические особенности обучения курсу алгебры в педагогическом вузе, заключающиеся в применении активных методов в обучении, которые наиболее приближены к учебному процессу в современной школе.

5. Описаны возможности использования компьютерной программы GeoGebra как на уроках алгебры в школе, так и на лекционных и практических занятиях в вузе. Применение указанной программы рассмотрено на конкретных примерах и задачах школьного и вузовского курса алгебры.

Результаты экспериментальной проверки показали эффективность предлагаемой методики организации обучения курсу алгебры в школе и педагогическом вузе. Было установлено, что разработанная методика способствует качественному усвоению алгебраических понятий студентами и положительно влияет на сформированность методических умений будущих учителей математики. Сделанные выводы дают основание полагать, что поставленные задачи исследования решены, а справедливость гипотезы исследования была доказана экспериментальной проверкой. Все полученные результаты могут быть использованы для разработки учебно-методических комплексов и пособий по данному предмету.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Послание Президента Республики Казахстан - Лидера нации Нурсултана Назарбаева народу Казахстана. Стратегия «Казахстан-2050»: новый политический курс состоявшегося государства. – Астана, 2012.

2 Государственный общеобязательный стандарт среднего образования (начального, основного среднего, общего среднего образования): утв.: Постановлением Правительства Республики Казахстан от 23 августа 2012 года №1080. – Астана, 2012.

3 Указ Президента Республики Казахстан. Государственная программа развития образования и науки Республики Казахстан на 2016-2019 годы: утв. 1 марта 2016 года, №205.

4 Абылкасымова А.Е., Рыжаков М.В. Содержание образования и школьный учебник. – М.: Арсенал образования, 2012. – 224 с.

5 Нурбаева Д.М., Жумалиева Л.Д., Нурмухамедова Ж.М., Жансеитова Л.Ж., Дюсов М.С. О некоторых вопросах обучения математике в школах и педагогических вузах Казахстана // Материалы III Международной научной конференции «Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе в свете идей Л.С. Выготского. – М., 2016. – 407 с.

6 Оганесян В.А., Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л., Саннинский В.Я. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика: учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.

7 Абылкасымова А.Е. Теория и методика обучения математике: дидактико-методические основы. – Алматы: Мектеп, 2013. – 224 с.

8 Абылкасымова А.Е. О специально-методической подготовке будущего учителя математики // Материалы III Международной научной конференции «Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе в свете идей Л.С. Выготского. – М., 2016. – 407 с.

9 https://ru.wikipedia.org

10 Виноградов И.М. Алгебра // Математическая энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия, 1977. – 1140 с.

11 Типовая учебная программа по учебному предмету «Алгебра» для 7-9 классов уровня основного среднего образования: утв.: приказом Министра образования и науки Республики Казахстан от 3 апреля 2013 года №115. – Астана, 2013. -18 с.

12 Типовая учебная программа по учебному предмету «Алгебра» для 7-9 классов уровня основного среднего образования по обновленному содержанию // Утверждена приказом Министра образования и науки Республики Казахстан от 25 октября 2017 года, №545. – Астана, 2017. - 26 с.

13 Закон Республики Казахстан. Об образовании: принят 27 июля 2007 года, № 319-III (с изменениями и дополнениями по состоянию на 11.07.2017 г.).

14 Типовые учебные программы по учебному предмету «Алгебра и начала анализа» для 10–11 классов общественно-гуманитарного и естественно-

математического направлений общеобразовательной школы:утв.: приказом Министра образования и науки Республики Казахстан от 3 апреля 2013 года, №115. – Астана, 2013. – 27 с.

15 Мордкович А.Г. О некоторых проблемах школьного математического образования // Практика развивающего обучения // htpp://ziimag.narod.ru 2014.

16 Абылкасымова А.Е, Кусаинов Г.М., Сайлыбаев А.А. Вопросы создания современного школьного учебника: научно-методическое издание. – Астана: РНЦП «Учебник», 2010. – 248 с.

17 Алгебра. Учебник для 8 кл. общеобразоват.шк. / Абылкасымова А.Е., Жумагулова З.А., Абдиев А., Корчевский В.Е. – Алматы: Мектеп, 2016. – 176 с.

18 Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Издательство «Наука» главная редакция физико-математической литературы, 1968. - 431 с.

19 Типовая учебная программа «Элементарная математика»: утв.: РУМС МОН РК от 30.06.2016 протокол №2. – Алматы, 2016.

20 Типовая учебная программа «Методика преподавания математики» // Утверждена РУМС МОН РК от 30.06.2016 протокол №2. – Алматы, 2016.

21 Садыков Т.С., Абылкасымова А.Е. Дидактические основы обучения в высшей школе: учебное пособие. - Алматы: Республиканский издательский кабинет Казахской академии образования им. И.Алтынсарина, 2000. – 187 с.

22 Нурбаева Д.М. О проблеме преемственности в обучении курсу алгебры в школе и педагогическом вузе // Вестник КазНПУ им. Абая. Серия «Физико-математические науки». – Алматы, 2017. – №2 (58). - С. 73-76.

23 Бим-Бад Б.М. Педагогический энциклопедический словарь. – М., 2002. - 213 с.

24 Кустов Ю.С. Преемственность в обучении (школа – вуз – производство) обзорная информация. – М., 1978. – Вып. 77. – С. 10-21.

25 Абылкасымова А.Е. Современный урок. – Алматы: НИЦ «Ғылым», 2003. – 220 с.

26 Мубараков А.М. Научно-методические основы преемственности обучения математике в системе непрерывного образования: дис. … док. пед. наук: 13.00.02 – Алматы, 2003. – 225 с.

27 Комарова Е.А. Преемственность в обучении математике: методическое пособие. – Вологда, 2007. – 108 с.

28 Нурмухамедова Ж.М. Методическая система обучения курсу математического анализа в школе и педагогическом вузе: дис. … PhD: 6D010900. – Алматы, 2016. - 101 с.

29 Нурбаева Д.М. О некоторых вопросах методики преподавания курса алгебры в школах и педвузах // Вестник КазНПУ им. Абая, серия «Физико-математические науки». – Алматы, 2017. – №2 (58). - С. 77-80

30 Саранцев Г.И. Методическая система обучения предмету как объект исследования // «Научная онлайн-библиотека ПОРТАЛУС». – 2007 // http://www.portalus.ru.

31 Бондаренко Т.И. Методические особенности обучения алгебре в основной школе в условиях личностно-ориентированного подхода: автореф. … канд. пед. наук: 13.00.02. – М., 2000. – 19 с.

32 Кагазбаева А.К. Совершенствование профессионально-методической подготовки учителя математики в системе высшего педагогического образования: дис. … док. пед. наук. – Алматы, 1999. – 324 с.

33 Кадырбаева Р.И. Методическая система развития дедуктивного мышления школьников в курсе алгебры: автореф. … канд. пед. наук: 13.00.02. – Алматы, 1996. – 22 с. - Инв. №0496РК00266.

34 Дроботун Б.Н. Методическая система обучения логико-алгебраическим дисциплинам в высших учебных заведениях: дис. … док. пед. наук: 13.00.02. – Алматы, 2008. – 373 с.

35 Утешова М.А. Негізгі мектеп алгебрасын оқыту барысында деңгейлік тапсырмалар арқылы оқушылардың зерттеушілік қызметін дамыту әдістемесі: дис. … канд. пед. наук. – Алматы, 2010. – 168 с.

36 Скиба М.А. Методика формирования готовности будущих учителей математики к отбору содержания в условиях дифференциации школ: дис. … канд. пед. наук. – Алматы, 2001.

37 Сотникова О.А. Организация деятельности студентов по раскрытию содержательных связей в курсе алгебры педагогического вуза: автореф. … док. пед. наук: 13.00.02. – М., 2009. - 45 с.

38 Горлова С.Н. Формирование методических умений будущего учителя математики в процессе изучения курса алгебры педвуза: автореф. … канд. пед. наук: 13.00.02. – Омск, 2003. - 24 с.

39 Пустовойтенко М.В. Реализация взаимосвязей развивающей и обучающей функций образования в процессе практических занятий по алгебре в педагогическом вузе: автореф. … канд. пед. наук: 13.00.02. – М., 1999. - 16 с.

40 Максютин А.А. Многоуровневая система задач как средство обучения учащихся средней школы алгебре и началам анализа: автореф. … канд. пед. наук: 13.00.02. – Саранск, 2007. -20 с.

41 Гринева Т.В. Повышение качества понимания учащимися учебного материала школьного курса алгебры и начал анализа: автореф. … канд. пед. наук: 13.00.02. – Екатеринбург, 2010. - 23 с.

42 Генкулова О.В. Методическое обеспечение индивидуальной самостоятельной работы по методике обучения алгебре и началам анализа будущих учителей математики: автореф. … канд. пед. наук: 13.00.02. – М., 2004. - 20 с.

43 Косино О.А. Методические особенности алгебраической подготовки школьников посредством использования интеграции педагогических и информационных технологий: автореф. … канд. пед. наук: 13.00.02. – М., 2009. - 22 с.

44 Гусев В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике. – М., 2003. – 429 с.

45 Abylkasymova Alma E., Nurmukhamedova Zhanara M., Nurbaeva D.M., Zhumalieva Lyazzat D. The Turkish Vector» Influence on Teaching the Exact Disciplines in Modern Educational System of Kazakhstan: on the Example of Teaching Algebra and Mathematics // Global Journal of Pure and Applied Mathematics. - 2016. – Vol. 12, №4. – P. 3481-3491.

46 Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.

47 Государственный общеобязательный стандарт высшего образования: утв.: Постановлением Правительства Республики Казахстан от 23 августа 2012 года №1080. – Астана, 2012

48 Тұяқов Е.А. Білім мазмұнын жаңарту аясында оқу процесінде инновациялық технологияларды қолдану // Материалы III международной научно-практической конференции «Инновации в образовании: поиски и решения». – Астана, 2016. – 1 том. – С.278-282.

49 Махмутов М.И. Современный урок. – М.: Педагогика, 1981. – 241 с.

50 Барыбин К.С. Методика преподавания алгебры. – М.: Просвещение, 1965. – 345 с.

51 Блох А.Я., Канин Е.С., Килина Н.Г. и др. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика: учебное пособие для студентов пед. институтов по специальности «Математика» и «Физика» / сост. Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.

52 Нурбаева Д.М. О вопросах преподавания алгебры в школе с учетом возрастных особенностей учащихся // Материалы III Международной научно-практической конференции «Математическое моделирование механических систем и физических процессов».– Алматы, 2016. – С. 144-145.

53 Нурбаева Д.М., Нурмухамедова Ж.М., Жумалиева Л.Д., Жансеитова Л.Ж. Мектептерде және педагогикалық жоғары оқу орындарында математиканы оқытудың кейбір мәселелері // Вестник КазНПУ им. Абая. Серия «Физико-математические науки» – Алматы, 2016. - №4 (56). – С. 85-91.

54 Смирнов В.А., Смирнова И.М. О новой концепции обучения геометрии в школе // Проблемы совершенствования обучения математике, физике и информатике в школе и в вузе // Мат. межд. науч.-практ. конф. – Алматы: Изд. «Ұлағат», 2014. – 254 с.

55 Жумагулова З.А. Структурно-методические особенности создания учебников и учебно-методических комплексов по математике для средней школы в Республике Казахстан: дис. … канд. пед. наук. – Астана, 2016.

56 Типовая учебная программа по учебному предмету «Математика» для 5–6 классов общеобразовательной школы: утв.: приказом Министра образования и науки Республики Казахстан от 3 апреля 2013 года, №115. – Астана, 2013. – 93 с.

57 Абылкасымова А.Е., Кучер Т.П., Жумагулова З.А. Математика: учебник для 6 кл. общеобразовательной школы. – 2-е изд., перераб., доп. – Алматы: Мектеп, 2011. – 400 с.

58 Эрдниев П.М. Методика упражнений по математике: пособие для учителя. - изд. 2-е, доп. и переработ. – М.: Просвещение, 1970. – 319 с.

59 // https: //infourok.ru/

60 Каталог элективных дисциплин для специальности «5В010900 – Математика» на 2016-2017 учебный год: утв.: на заседании Ученого Совета КазНПУ им. Абая от 31.08.2016 года, №1. – Алматы, 2016.

61 Карп А.П. Даю уроки математики…: Книга для учителя: Из опыта работы. – М.: Просвещение, 1992. – 191 с.

62 Нурбаева Д.М., Жадраева Л.У., Искакова М.Т. К вопросу о развитии познавательной самостоятельности студентов-математиков в педагогическом вузе // Актуальные проблемы преподавания математики в школе и педагогическом вузе. - М., 2015. – Вып. 25. – С. 255-259.

63 Виноградов И.М. Основы теории чисел. – М: Наука, 1974.

64 Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М.: физ.-мат. лит., 2000.

65 Фадеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 2001.

66 Грибанов В.И., Титов П.И. Сборник упражнений по теории чисел. – М.: Просвещение, 1964.

67 Кочева А.А. Задачник-практикум по АТЧ. – М.: Просвещение, 1975.

68 Абылкасымова А.Е., Туяков Е.А., Жумалиева Л.Д., Нурмухамедова Ж.М. Методические основы обучения решению математических задач в школе: учебное пособие. – Алматы, 2018. – 248 с.

69 Скаткин М.Н. Проблемы современной дидактики. – М., 1984. – 344 с.

70 Нурбаева Д.М., Нурмухамедова Ж.М., Жадраева Л.У. Тест как промежуточный контроль знаний // Материалы Международной научно-практической конференции «Радиационно-термические явления и инновационные технологии», посвященной 70-летию юбилея и 50-летию научно-педагогической деятельности доктора физико-математических наук, профессора А.И. Купчишина. – Алматы, 2015. – С.156-159.

71 http://edu.resurs.kz/metod/tehnologiya-kriterialnogo-otsenivaniya-uchaschihsya

72 Список бесплатного программного обеспечения, которое может заменить лицензионные коммерческие пакеты // http://www.bourabai.kz/einf/freeware.htm#7

73 Официальный сайт программы GeoGebra // https://www.geogebra.org/

74 Абылкасымова А.Е., Кучер Т.П., Жумагулова З.А., Корчевский В.Е. Алгебра: учебник для 7 кл. общеобразоват. шк. – Алматы: Мектеп, 2017. – 288 с.

75 Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учебное пособие. – Ростов-на-Дону: Легион, 2015. – 192 с.

76 Нурбаева Д.М., Туяков Е.А. Возможности использования компьютерной программы GeoGebra в обучении курсу алгебры в школе и педвузе / Материалы международной научно-практической конференции

«Цифровое образование – передовые знания и компетентность» в рамках духовного возрождения. – Аркалык, 2018. – С. 55-60.

77 Бабанский Ю.К. Проблемы повышения эффективности педагогических исследований. – М.: Педагогика, 1982. – 192 с.

78 Загвязинский В.И., Поташник М.М. Как учителю подготовить и провести эксперимент. – М.: Педагогическое общество России, 2005. – 144 с.

79 Загвязинский В.И. Методология и методика дидактических исследований. – М.: Педагогика, 1982. – 160 с.

80 Лернер И.Я. Качества знаний учащихся. Какими они должны быть? – М.: Знание, 1978. – 47 с.

81 Новиков А.М., Новиков Д.А. Методология научного исследования. – М.: Либроком, 2010. – 280 с.

82 Крампит А.Г. Методология научных исследований: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. – 164 с.

83 Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л. Основные направления совершенствования математического образования в свете требований школьной реформы // Актуальные вопросы совершенствования школьного математического образования. – М.: НИИ, 1988. – С. 6-15.

84 Фирсов В.В. Планирование обязательных результатов обучения математике – М.: Просвещение, 1989. – 238 с.

85 Кузнецова Л.В., Лурье И.А., Мельникова Н.В. и др. Методические рекомендации по организации уроков дифференцированной работы. – М.:АПН СССР, 1987. – 44 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Описание тем, входящих в раздел «Введение в общую алгебру»

Тема: «Понятие алгебраического действия. Простейшие свойства действий».

Первым шагом, студентам предлагается назвать действия, которые они знают, причем следует обратить внимание, что действия выполняются не только с числами, но и с векторами.

На доску выписываются несколько примеров, показывающих сложение, вычитание, умножение, деление чисел, возведение в степень числа, извлечение квадратного и кубического корней, сложение и вычитание векторов.

Теперь можно предложить учащимся объяснить, что же такое действие. Таким образом, студенты подводятся к определению операции: «Действием $*$ в множестве M называется правило, по которому любой паре элементов a,b из M сопоставляется элемент $c = a * b$ из этого же множества.

Необходимо заметить, что извлечение квадратного и кубического корней не является бинарным действием (определение приведено для бинарного действия), а деление и возведение в степень являются действиями не на всем множестве R . Тут же следует попросить студентов привести такие примеры.

Вторым шагом, студентам предлагается выяснить, являются ли действиями в множествах R, R^+ (положительные числа) и N нахождения среднего арифметического и среднего геометрического двух чисел.

Ответ показан в таблице 13:

Таблица А 1 - Ответы к заданию

	в R	в R^+	в N
Ср. арифм. $a * b = \dfrac{a+b}{2}$	Да	Да	Нет
Ср. геометр. $a * b = \sqrt{ab}$	Нет	Да	Нет

Конечно, в случаях, где в табличной ячейке присутствует ответ: «Нет», учащиеся должны привести контрпример.

Третьим шагом, студентам можно привести пример некорректного задания действия. Например, в множестве яблок определим действие следующим образом: каждой паре яблок сопоставляется большее из них по весу. Некорректность задания такого действия заключается в случае, когда вес обоих яблок одинаков. Можно предложить учащимся привести еще несколько примеров некорректного задания действия и самые лучшие записать в конспекты.

Теперь, можно дать определения простейших свойств действия.

Определение. Действие $*$ в множестве M называется *коммутативным*, если для любых элементов a и b из M верно $a*b=b*a$.

Определение. Действие $*$ в множестве M называется *ассоциативным,* если для любых элементов a,b и c из M верно $a*(b*c)=(a*b)*c$.

Определение. Действие $*$ в множестве M называется *обратимым,* если для любых элементов a и b из M найдутся элементы x и y из M, такие, что $x*a=b, a*y=b$.

Два первых определения для первокурсников обычно не вызывают затруднений, в то время как третье определение требует демонстрации на конкретном примере. В качестве примера можно задать действие в двухэлементном множестве таблицей Кэли:

	a	b
a	a	b
b	a	b

Действие необратимо слева, так как для a и b нет такого x, что $x*a=b$, но оно обратимо так как для любой пары элементов требуемый элемент находится.

В заключение занятия студентам предлагается несколько заданий на проверку простейших свойств различных действий и независимость изученных свойств, то есть привести примеры таких действий, у которых есть ассоциативность, но нет коммутативности и обратимости или есть коммутативность, но нет ассоциативности и т.п.

Примеры заданий. Для нижеприведенных действий проверить коммутативность, ассоциативность и обратимость:

1) В множестве R задано действие * так, что для любых a и b верно $a*b=(a-b)^2$;
2) В множестве R задано действие * так, что для любых a и b верно $a*b=b$;
3) Действие вычитания в множестве R;
4) Действие умножения в множестве R [61].

Тема: «Свойства действий».

В начале занятия можно разобрать домашнее задание, после чего провести небольшую самостоятельную работу (на 5 минут) для закрепления пройденного.

Определение. Действие * в множестве M называется *сократимым,* если из того, что $x*u=x*v$, следует, что $u=v$, и из того, что $u*x=v*x$, следует, что $u=v$.

Определение. Говорят, что элемент e – *нейтральный* элемент множества M с действием *, если для любого элемента x из M выполнены равенства $x*e=e*x=x$.

Определение. Элемент a^{-1} называется *обратным* к элементу a множества M с действием $*$, если в M имеется нейтральный элемент e и выполнены равенства $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$.

Ввиду того, что действие необязательно является коммутативным, необходимо оговаривать каждый раз выполнение двух равенств (сократимость *слева* и *справа*, *левый* и *правый* нейтральный и обратный элементы).

Проверить наличие этих свойств можно на ранее рассмотренных примерах.

Вместе можно доказать **предложения:**

1. *Если действие в конечном множестве сократимо, то оно и обратимо, и, наоборот, из обратимости действия в конечном множестве следует его сократимость.*
2. *В множестве M с действием $*$ может быть лишь один нейтральный элемент.*
3. *Пусть действие $*$ ассоциативно, тогда у произвольного элемента a может быть не более одного обратного элемента.*

Учащимся можно предложить следующие задания. Проверить наличие всех изученных свойств у действий, определенных следующим образом:

1) в множестве числовых функций действие $f*g=\dfrac{f}{g}$;

2) в том же множестве действие $f*g=f+g$;

3) в множестве учеников класса действие определяется следующим образом: если a и b – два ученика, то $a*b$ – тот из них, кто первым записан в списке на странице классного журнала (если $a=b$, то $a*b=a=b$).

Тема: «Понятие группы».

В начале занятия проводим опрос по определениям действия и основных свойств действия.

Перед переходом к новой теме стоит рассказать студентам, что необходимость расширения изучаемых числовых множеств была обусловлена стремлением добиться выполнения отсутствующих ранее свойств. Например, сложение чисел в N – необратимое действие; расширив множество, перейдя к изучению множества Z, мы добиваемся обратимости. Следует отметить учащимся, что в свое время были определены отрицательные числа как обратные по сложению к положительным, а потом уже оказалось, что действие сложения стало обратимым в новом множестве.

Существует несколько определений понятия группы. Карп А.П. предлагает следующие два определения:

Определение 1. Пусть в множестве G определено ассоциативное и обратимое действие, тогда это множество с этим действием называется *группой.*

Определение 2. Пусть в множестве G определено ассоциативное действие, такое, что в G есть нейтральный элемент и у каждого элемента есть обратный. Тогда множество G с этим действием называется *группой*.

В нашей практике определение группы обычно предлагается с помощью аксиом (определение близко к **Определению 2**):

Определение 3. Множество G с операцией (действием) $\circ$, для которого справедливы следующие аксиомы:

1) $\forall a,b\in G\ \exists c\in G$: $a\circ b=c$ – замкнутость относительно операции $\circ$(действия);

2) $\forall a,b,c \in G$: $(a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c)$ – ассоциативность операции $\circ$(действия);

3) $\exists e\in G, \forall a\in G$: $a\circ e=e\circ a=a$ – существование нейтрального элемента;

4) $\forall a\in G\ \exists a^{-1}\in G$: $a\circ a^{-1}=a^{-1}\circ a=e$ – существование обратного элемента

называется *группой*.

Аксиомы 1) – 4) называются аксиомами группы.

Конечно же, все три приведенные определения группы – эквивалентны. Определения 2 и 3 отличаются лишь записью.

Далее можно привести примеры групп, показывая, что они подпадают под данные определения.

1. Z, Q, R относительно сложения.
2. R^{+}, $R/\{0\}$ относительно умножения.
3. Векторы относительно сложения.
4. Одноэлементное множество {1} с действием умножения.
5. Двухэлементное множество {-1;1} с действием умножения.
6. Совокупность классов вычетов по модулю n ($n\in N$) относительно сложения.
7. Трехэлементное множество $\{a,b,c\}$ с действием, заданным таблицей Кэли:

	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

После закрепления нового материала, можно перейти к доказательству эквивалентности определений группы [61].

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Теоретические и практические вопросы самостоятельных работ и срезов для текущего контроля по «Алгебре-1» и «Алгебре-2»

Теоретические вопросы:

1. Понятие действия.
2. Свойства действия. Независимость свойств.
3. Единственность нейтрального элемента.
4. Единственность обратного элемента.
5. Связь между сократимостью и обратимостью в конечном множестве.
6. Определение группы, примеры групп.
7. Определение кольца, примеры колец.
8. Определение поля, примеры полей.
9. Кольца и поля вычетов.
10. Определение и свойства комплексных чисел.
11. Извлечение корня n-степени из комплексного числа и возведение комплексного числа в степень n (формула Муавра).
12. Определения системы линейных уравнений и ее решения.
13. Элементарные преобразования системы линейных уравнений.
14. Метод Гаусса.
15. Матрицы и действия над ними.
16. Как изменится произведение AB матриц A и B, если:

А) переставить i - ю и j - ю строки матрицы A?

Б) к i-й строке матрицы A прибавить j - ю строку, умноженную на число c

В) переставить i-й и j-й столбцы матрицы B?

Г) к i- му столбцу матрицы B прибавить j-й столбец, умноженный на число c?

17. Перестановки и подстановки.
18. Определитель матрицы.
19. Миноры и их алгебраические дополнения.
20. Вычисление определителей.
21. Ранг матрицы.
22. Обратная матрица и ее вычисление.
23. Правило Крамера.
24. Определение векторного пространства. Примеры.
25. Линейная зависимость и независимость векторов.
26. Является ли линейным подпространством совокупность всех векторов n - мерного векторного пространства, координаты которых – целые числа?

27. Является ли линейным подпространством совокупность всех векторов из R_n, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$?

28. Делимость в кольце целых чисел и их свойства. Деление с остатком.

29. Свойства НОД. Алгоритм Евклида. Свойства НОК.

30. Простые числа и их свойства.

31. Основная теорема арифметики.

32. Числовые функции. Теорема о числовых функциях.

33. Систематические числа. Операции над систематическими числами.

34. Конечные цепные дроби. Подходящие дроби и их свойства.

35. Сравнения по модулю. Свойства сравнений.

36. Кольцо вычетов по $\mathrm{mod}\, m$. Полные системы вычетов.

37. Теорема об остатках. Обратимые элементы.

38. Приведенная система вычетов.

39. Функция Эйлера.

40. Теоремы Эйлера и Ферма.

41. Решение сравнений.

42. Порядок классов вычетов. Первообразные корни по простому модулю.

43. Индексы. Таблицы индексов и их применение.

44. Конечные систематические дроби.

45. Бесконечные систематические дроби.

46. Периодические систематические дроби.

47. Признаки делимости, проверка результатов арифметических действий.

48. Понятие многочлена от одной переменной над полем.

49. Алгоритм деления с остатком.

50. НОД двух многочленов. Алгоритм Евклида.

51. Корни многочленов и схема Горнера.

52. Разложение многочленов на неприводимые множители и его единственность.

53. Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах.

54. Нахождение результанта.

55. Нахождение дискриминанта.

56. Непрерывность многочлена комплексного переменного.

57. Доказательство основной теоремы алгебры.

58. Следствие основной теоремы алгебры и формулы Виета.

59. Уравнения третьей (четвертой) степени.

60. Критерий Эйзенштейна.

61. Понятие разрешимости уравнения в квадратных радикалах.

62. Условия разрешимости уравнений третьей степени в квадратных радикалах.

Практические задания

1. Выяснить, образует ли группу каждое из следующих множеств при указанной операции над элементами:
   1) целые числа относительно сложения;
   2) четные числа относительно сложения;
   3) целые числа, кратные данному натуральному числу n, относительно сложения;
   4) нечетные числа относительно сложения;
   5) рациональные числа, отличные от нуля, относительно умножения;
   6) положительные рациональные числа относительно умножения;
   7) положительные рациональные числа относительно деления;
   8) целые числа относительно вычитания;
   9) неотрицательные целые числа относительно сложения.
2. Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами (но не полями) и какие полями относительно указанных операций. (Если операции не указаны, то подразумеваются сложение и умножение чисел):
   1) Целые числа;
   2) Четные числа;
   3) Действительные числа;
   4) Числа вида $a+b\sqrt{2}$ с целыми a и b;
   5) Числа вида $a+b\sqrt{3}$ с рациональными a и b;
3. Вычислить: $(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$.
4. Вычислить: 1) $(1+2i)^6$; 2) $(2+i)^7+(2-i)^7$; 3) $(1+2i)^5-(1-2i)^5$.
5. Решить системы уравнений:

   1) $\begin{cases}(3-i)x+(4+2i)y=2+6i\\(4+2i)x-(2+3i)y=5+4i\end{cases}$;

   2) $\begin{cases}(2+i)x+(2-i)y=6\\(3+2i)x+(3-2i)y=8\end{cases}$;

   3) $\begin{cases}x+yi-2z=10\\x-y+2iz=20\\ix+3iy-(1+i)z=30\end{cases}$.
6. Вычислить: 1) $\sqrt{-8i}$; 2) $\sqrt{-15+8i}$; 3) $\sqrt{-8-6i}$; 4) $\sqrt[4]{-1}$; 5) $\sqrt[4]{2-i\sqrt{12}}$.
7. Вычислить: $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$.
8. Вычислите: $\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\-4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-2&0\\-1&2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&3\\4&3&2\\1&2&3\end{pmatrix}$;

9. Вычислите: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

10.Вычислите: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$;

11.Вычислите: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

12.Вычислите: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$;

13.Вычислите: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$;

14.Вычислите $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^5$, используя равенство $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$;

15.Вычислите значение определителя: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$;

16.Вычислите значение определителя: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$;

17.Вычислите значение определителя: $\begin{vmatrix} \sin\alpha + \sin\beta & \cos\beta + \cos\alpha \\ \cos\beta - \cos\alpha & \sin\alpha - \sin\beta \end{vmatrix}$;

18.Вычислите значение определителя: $\begin{vmatrix} 2\sin\varphi\cos\varphi & 2\sin^2\varphi - 1 \\ 2\cos^2\varphi - 1 & 2\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix}$;

19.Вычислите значение определителя: $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$;

20.Вычислите значение определителя: $\begin{vmatrix} \dfrac{(1-t)^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{2t}{1+t^2} & -\dfrac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$;

21.Вычислите значение определителя: $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$, i - комплексное число;

22.Вычислите значение определителя: $\begin{vmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{vmatrix}$, i - комплексное число;

23.Доказать, что при действительных a,b,c корни уравнения $\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$ будут действительными.

24.Показать, что значение дроби $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, где по крайней мере одно из чисел c,d отлично от нуля, тогда и только тогда не зависит от значения x, когда $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$.

25.Доказать, что при действительных a,b,c,d корни уравнения $\begin{vmatrix} a-x & c+di \\ c-di & b-x \end{vmatrix} = 0$ будут действительными.

26.Вычислите значение определителя: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$;

27.Вычислите значение определителя: $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$;

28.Вычислите значение определителя: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$;

29.Вычислите значение определителя: $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$;

30.Вычислите значение определителя: $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

31.При каком условии справедливо равенство:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}?$$

32.Вычислите определитель: $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$, где $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

33.Вычислите определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$, где $\varepsilon = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$;

34.Вычислите значение определителя: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

35.Вычислите значение определителя: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 4 \\ 6 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

36.Найдите решение системы (методом Гаусса): $\begin{cases} 3x + 4y - z = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \\ -2x - 3z = -9 \end{cases}$;

37.Найдите решение системы (методом Гаусса): $\begin{cases} -2x + 3y = -12 \\ 2x + y + 2z = 6 \\ 3x - 2y + 2z = 15 \end{cases}$;

38.Найдите решение системы (методом Гаусса): $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 9 \\ 3x + 2y - 3z = -1 \\ -5x + 4y - z = -3 \end{cases}$;

39.Найдите решение системы (методом Крамера): $\begin{cases} 5x - 7y + 3z = -10 \\ -3x + 2y - 4z = -5 \\ 2x - 5y + 2z = -6 \end{cases}$;

40.Найдите решение системы (методом Крамера): $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - 3y - 5z = -9 \\ -3x + y - 2z = -8 \end{cases}$;

41.Найдите решение системы (методом Крамера): $\begin{cases} 4x-3y+2z+4=0 \\ 6x-2y+3z+1=0 \\ 5x-3y+2z+3=0 \end{cases}$;

42.Найдите решение системы (методом Крамера): $\begin{cases} 5x+2y+3z+2=0 \\ 2x-2y+5z \quad =0 \\ 3x+4y+2z+10=0 \end{cases}$;

43.Найдите решение системы (методом Крамера): $\begin{cases} 2ax-3by+cz=0 \\ 3ax-6by+5cz=2abc \\ 5ax-4by+2cz=3abc \end{cases}$, где $abc \neq 0$.

44.Найдите решение системы (методом Крамера):

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2 \quad -6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$$

45.Найдите матрицу, обратную следующей: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

46.Найдите матрицу, обратную следующей: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

47. Путем прямого вычисления по правилу треугольников, или правилу Саррюса, доказать следующие свойства определителей 3-го порядка:

А) Если в определителе 3-го порядка поменять ролями строки и столбцы (т.е. транспонировать его матрицу), то определитель не изменится.

Б) Если все элементы какой-нибудь строки (или столбца) определителя умножить на одно и то же число, то и весь определитель умножится на это число.

В) Если две строки (или два столбца) определителя одинаковы, то он равен нулю.

48. Не развертывая определителей, доказать следующее тождество:
$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

49. Не развертывая определителей, доказать следующее тождество:
$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left(1-x^2\right)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

50. Определить число инверсий в перестановках (за исходное расположение принимается расположение $1,2,3,\dots$ в возрастающем порядке):
   1) 2, 3, 5, 4, 1.
   2) 6, 3, 1, 2, 5, 4.
   3) 1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8.
   4) 7, 5, 6, 4, 1, 3, 2.

51. В какой перестановке чисел $1,2,\dots,n$ число инверсий наибольшее и чему оно равно?

52. Перемножить подстановки: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

53. Перемножить подстановки: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

54. Перемножить подстановки: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3$.

55. Найти члены определителя $\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$, содержащие x^4 и x^3.

56. Решить систему уравнений по правилу Крамера: $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6 \end{cases}$

57. Найти ранг следующих матриц методом окаймления миноров:

А) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$;

Б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

В) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

58. Вычислите ранг следующих матриц при помощи элементарных преобразований:

А) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$; Б) $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$.

59. Решить матричные уравнения:

А) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$;

Б) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$;

В) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

Г) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

60. Определить линейную зависимость или линейную независимость следующих систем векторов:

А) $\alpha_1 = (1,2,3)$, $\alpha_2 = (3,6,7)$;

Б) $\alpha_1 = (2,-3,1)$, $\alpha_2 = (3,-1,5)$, $\alpha_3 = (1,-4,3)$;

В) $\alpha_1 = (4,-5,2,6)$, $\alpha_2 = (2,-2,1,3)$, $\alpha_3 = (6,-3,3,9)$, $\alpha_4 = (4,-1,5,6)$.

61. Доказать, что система векторов, содержащая два равных вектора, линейно зависима.

62. Доказать, что система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

63. Найти все значения λ, при которых вектор b линейно выражается через векторы a_1, a_2, a_3:

А) $a_1 = (2,3,5)$,	Б) $a_1 = (4,4,3)$,	В) $a_1 = (3,2,5)$,
$a_2 = (3,7,8)$,	$a_2 = (7,2,1)$,	$a_2 = (2,4,7)$,
$a_3 = (1,-6,1)$,	$a_3 = (4,1,6)$,	$a_3 = (5,6,\lambda)$,

$b=(7,-2,\lambda)$. $\quad b=(5,9,\lambda)$. $\quad b=(1,3,5)$.

64. Определить, какие из строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & 13 \\ 4 & -2 & -7 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4+x_5=0 \\ 5x_1-8x_2+5x_3+4x_4+3x_5=0 \\ x_1-7x_2+4x_3+2x_4 \qquad =0 \\ 4x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=0 \end{cases}.$$

65. Найти координаты вектора x в заданном базисе $e_1,e_2,\ldots,e_n$:

А) $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(1,1,2)$, $e_3=(1,2,3)$; $x=(6,9,14)$;

Б) $e_1=(1,2,-1,-2)$, $e_2=(2,3,0,-1)$, $e_3=(1,2,1,4)$, $e_4=(1,3,-1,0)$; $x=(7,14,-1,2)$.

66. Доказать, что каждая из двух систем векторов является базисом и найти связь координат одного и того же вектора в этих двух базисах:

А) $e_1=(1,2,1)$, $e_2=(2,3.3)$, $e_3=(3,7,1)$; $e_1'=(3,1,4)$, $e_2'=(5,2,1)$, $e_3'=(1,1,-6)$;

Б) $e_1=(1,1,1,1)$, $e_2=(1,2,1,1)$, $e_3=(1,1,2,1)$, $e_4=(1,3,2,3)$;

$e_1'=(1,0,3,3)$, $e_2'=(-2,-3,-5,-4)$, $e_3'=(2,2,5,4)$, $e_4'=(-2,-3,-4,-4)$.

67. Найдите НОД и НОК следующих чисел:

1) 1232 и 1672;
2) 589 и 343;
3) 29719 и 76501;
4) 738089 и 3082607;
5) 12870 и 7650;
6) 41382 и 103818;
7) 3640 и 14300;
8) 35574 и 192423;
9) 10140 и 92274;
10) 1403 и 1058.

68. Запишите числа a и b в системе счисления с основанием g и разделите большее на меньшее:

1) $a=18536,\ b=430,\ g=7$;
2) $a=1653_7,\ b=201,\ g=4$;
3) $a=136,\ b=2632,\ g=7$;
4) $a=121_3,\ b=4731_9,\ g=8$;
5) $a=4321_5,\ b=13,\ g=8$.

69. Выразите систематические дроби в виде обыкновенных дробей, числители и знаменатели которых записаны в десятичной системе:

1) $2{,}114_8$; 2) $5{,}442_7$; 3) $74{,}13_8$; 4) $35{,}13_7$; 5) $0{,}6467_8$.

70. Представьте в виде цепных дробей:

1) $\dfrac{30}{37}$; $\quad$ 4) $\dfrac{71}{41}$; $\quad$ 7) $-\dfrac{251}{764}$;

2) $1{,}23$; 5) $\frac{13}{30}$; 8) $\frac{875}{576}$;

3) $\frac{375}{824}$; 6) $0{,}459$; 9) $7{,}11$

71. Найдите действительные числа, которые обращаются в данные цепные дроби:

1) $[0; 1, 4, 3, 2]$; 6) $[1; 7, (1, 6)]$;

2) $[-1; 1, 2, 4, 5]$; 7) $[5; (2, 1)]$;

3) $[3; 1, 4, 2, 5]$; 8) $[-2; (3, 2)]$;

4) $[1; 2, 3, 4, 2]$; 9) $[4; (2, 8)]$;

5) $[-3; 1, 1, 2]$; 10) $[-1; (1, 2)]$

72. Решите в целых числах следующие уравнения:

1) $275x+145y=10$; 6) $3x+8y=5$;

2) $23x+49y=53$; 7) $4x-14y=7$;

3) $122x+129y=2$; 8) $7x-19y=23$;

4) $70x+33y=1$; 9) $26x+34y=13$;

5) $237x+44y=1$; 10) $60x-91y=2$.

73. Туристское бюро, имеющее в своем распоряжении двадцатитрехместные автобусы и шестиместные легковые автомобили, организует экскурсионную поездку для 310 туристов. Сколько машин того и другого типа следует выделить для экскурсантов при условии, что в выделенных автомашинах не должно оставаться свободных мест?

74. Требуется найти два натуральных числа, каждое из которых не превышает 200, причем таких, что разность между ними равна 11, уменьшаемое кратно 9, а вычитаемое кратно 17.

75. Найдите общий вид чисел, кратных 8, которые при делении на 5 дают в остатке 3.

76. Из имеющихся резисторов сопротивлением по 1,2 и 1,7 Ом требуется составить последовательным соединением цепь сопротивлением 11,1 Ом. Сколько резисторов того и другого типа потребуется?

77. В населенный пункт, с которым установлено лишь авиационное сообщение, требуется доставить 150 контейнеров груза. В распоряжении отправителей имеются транспортные самолеты грузоподъемностью в 8 и 13 контейнеров. сколько понадобится самолетов того и другого типа для того, чтобы перевезти указанный груз одним рейсом? Грузоподъемность каждого самолета должна быть использована полностью.

78. Решите следующие сравнения:

1) $18x \equiv 12 \pmod{30}$; 6) $20x \equiv 35 \pmod{45}$;

2) $11x \equiv 15 \pmod{24}$; 7) $39x \equiv 19 \pmod{53}$;

3) $98x \equiv 70 \pmod{42}$; 8) $64x \equiv 5 \pmod{13}$;

4) $139x \equiv 7 \pmod{8}$; 9) $29x \equiv 35 \pmod{123}$;

5) $111x \equiv 49 \pmod{179}$;

10) $97x \equiv 53 \pmod{169}$.

79. Решите системы сравнений:

1) $\begin{cases} x \equiv 15 \pmod{17} \\ x \equiv 7 \pmod{20} \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod{13} \\ 2x \equiv 17 \pmod{21} \\ 5x \equiv 31 \pmod{32} \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x \equiv 20 \pmod{23} \\ x \equiv 21 \pmod{25} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \\ x = -2 \pmod{11} \end{cases}$.

80. Найдите остаток от деления:

1) 66^{17} на 7;
2) 19^{2402} на 100;
3) $5^{80} + 7^{100}$ на 13;
4) 22^{2342} на 14;
5) $2^{100} + 3^{100}$ на 5;
6) 17^{2001} на 1000;
7) 383^{175} на 45;
8) 66^{17} на 7;
9) 12^{2751} на 5;
10) 178^{2741} на 22.

81. Решите сравнения с помощью индексов:

1) $8x^9 \equiv -17 \pmod{41}$;
2) $9x^{11} + 1 \equiv 0 \pmod{43}$;
3) $32^x \equiv 15 \pmod{37}$;
4) $13 \cdot 7^{5x} + 1 \equiv 0 \pmod{67}$;
5) $x^2 \equiv 37 \pmod{41}$;
6) $17x^5 + 3 \equiv 0 \pmod{37}$;
7) $6x^7 + 19 \equiv 0 \pmod{23}$;
8) $17 \cdot 13^{3x} + 27 \equiv 0 \pmod{29}$;
9) $x^2 \equiv 15 \pmod{17}$;
10) $x^7 + 27 \equiv 0 \pmod{53}$

82. Проверьте результаты действий с помощью чисел 9 и 11:

1) $25045 \cdot 1487 = 37240915$;
2) $3745 \cdot 8067 = 30210915$;
3) $4237 \cdot 27925 = 118275855$;
4) $1965^2 = 3761225$;
5) $25041 + 91382 = 116423$;
6) $37918 - 13207 = 24711$.

83. Выполнить деление с остатком:

1) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ на $x^2 - 3x + 1$;
2) $x^3 - 3x^2 - x - 1$ на $3x^2 - 2x + 1$;
3) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ на $x - 1$;
4) $4x^3 + x^2$ на $x + 1 + i$;
5) $x^3 - x^2 - x$ на $x - 1 + 2i$

84. Определить наибольший общий делитель полиномов:

1) $x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$ и $3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$;
2) $x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$ и $3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7$;
3) $x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 52x^2 - 52x - 12$ и $x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 22x - 12$;
4) $x^4 - 10x^2 + 1$ и $x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1$;
5) $3x^6 - x^5 - 9x^4 - 14x^3 - 11x^2 - 3x - 1$ и $3x^5 + 8x^4 + 9x^3 + 15x^2 + 10x + 9$.

85. Построить полиномы наименьшей степени с вещественными коэффициентами по данным корням:

1) двойной корень 1, простые 2, 3 и $1 + i$;
2) тройной корень $2 - 3i$;

3) двойной корень i, простой $-1-i$.

86. При каком условии $x^{2m}+x^m+1$ делится на x^2+x+1?

87. Разложить на простейшие дроби над полем C:

1) $\dfrac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}$;

2) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$;

3) $\dfrac{5x^2+6x-23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}$.

88. Выразить через основные симметрические полиномы:

1) $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$;

2) $x_1^4+x_2^4+x_3^4-2x_1^2x_2^2-2x_2^2x_3^2-2x_3^2x_1^2$;

3) $(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)$;

4) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_3)(x_2+x_4)(x_3+x_4)$;

5) $(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$.

89. Вычислить результант полиномов:

1) x^3-3x^2+2x+1 и $2x^2-x-1$;

2) $2x^3-3x^2+2x+1$ и x^2+x+3;

3) $2x^3-3x^2-x+2$ и x^4-2x^2-3x+4;

4) $3x^3+2x^2+x+1$ и $2x^3+x^2-x-1$;

5) $2x^4-x^3+3$ и $3x^3-x^2+4$.

90. Вычислить дискриминанты полиномов:

1) x^3-x^2-2x+1;

2) $x^4-x^3-3x^2+x+1$;

3) $3x^3+3x^2+5x+2$;

4) x^3+2x^2+4x+1;

5) $2x^4-x^3-4x^2+x+1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Контрольная работа №1 для школьников.

1. Разложите на множители выражение:

I вариант

1) $27a^3 - 64b^3$;

2) $3b + bc + 3ac + 9a$;

3) $xy^2 + y + x^2y + x + 4xy + 4$.

II вариант

1) $8x^3 - 125y^3$;

2) $x^2 - b^2 - ax - ab$;

3) $3x^2 + 2x - xy - 2y^2 + y^3 - 3xy^2$.

2. Вычислите:

I вариант

1) $15^9 \cdot 15^{-13} \cdot 15^5$;

2) $\dfrac{2^{11} \cdot 3^{11}}{6^{10}} + \left(\dfrac{5}{12}\right)^0$;

3) $\dfrac{46^2 - 26^2}{35^2 - 25^2}$;

4) $72^2 - 2 \cdot 72 \cdot 53 + 53^2$?

II вариант

1) $5^{15} \cdot 5^{-17} \cdot 5^4$;

2) $\dfrac{\left(5^3\right)^6 \cdot 5^{-1}}{\left(5^4\right)^3 \cdot 5^2} + (0{,}7)^0$;

3) $\dfrac{96^2 - 54^2}{83^2 - 67^2}$;

4) $82^2 + 2 \cdot 82 \cdot 73 + 73^2$?

3. Докажите тождество:

I вариант

1) $\left(1 - \dfrac{1}{1-a}\right) : \left(\dfrac{a - 2a^2}{1-a} + a\right) = \dfrac{1}{3a-2}$;

2) $\left(\dfrac{m-2}{m+2} - \dfrac{m+2}{m-2}\right) : \dfrac{8m}{m^2-4} + \dfrac{1-m}{1-3m} = \dfrac{2m}{1-3m}$.

II вариант

1) $\left(\dfrac{a-b}{a^2+ab} - \dfrac{a}{ab+b^2}\right) : \left(\dfrac{1}{a+b} - \dfrac{b^2}{ab^2-a^3}\right) = \dfrac{b-a}{b}$;

2) $\left(\dfrac{2ab}{a^2-b^2} + \dfrac{a-b}{2(a+b)}\right) \cdot \dfrac{2a}{a+b} - \dfrac{b}{a-b} = 1$.

4. Решите следующие системы уравнений разными способами:

I вариант

1) $\begin{cases} -5x + 7y = 15 \\ 3x - 4y = 13 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 0{,}3x - 0{,}7y = -2{,}4 \\ 1{,}2y - 0{,}9x = 2{,}7 \end{cases}$;

II вариант

1) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 5x - 0{,}6y = 60 \\ 2x - 0{,}3y = -36 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3} - \dfrac{2}{7}y = \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{2-x}{3} - \dfrac{5-y}{7} = 8\dfrac{3}{21} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3} - \dfrac{2}{7}y = \dfrac{4}{9} \\ 4x - \dfrac{8-2y}{7} = 5\dfrac{3}{14} \end{cases}$

5. Решите неравенства:

I вариант

1) $(x+5)(x-5)-(x+3)x \le x+1$;

2) $(3x+2)^2-(4-3x)^2 \le 14+37x$;

$|2x-4| \ge 8$.

II вариант

1) $(y+4)(4-y)+(y+5)y > 6y-20$;

2) $(x-1)^3-(x+1)^3 \le x-6x^2$;

3) $|5-4x| \le 7$.

Контрольная работа №2 для школьников

1. Решите квадратное уравнение разными способами:

I вариант

1) $7x^2-20x+14=0$;

2) $3x^2+10x+7=0$;

3) $4x^2-10x+5=0$.

II вариант

1) $8x^2-14x+5=0$;

2) $3x^2-14x+16=0$;

3) $4x^2+9x+2=0$.

2. Составьте рациональное уравнение, корнем которого является:

I вариант

$x=3$.

II вариант

$x=5$.

Проверьте правильность составленного уравнения путем его решения.

3. Сократите дроби:

I вариант

1) $\dfrac{10a^2-6a+5ab-3b}{5a^2-8a+3}$;

2) $\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2(\sqrt{2}-1)x+3-2\sqrt{2}}$;

3) $\dfrac{x^2-2ax-8a^2}{x^2+(2a+1)x+2a}$.

II вариант

1) $\dfrac{2a^2-10a-ab+5b}{3a^2-14a-5}$;

2) $\dfrac{x^2-4x+1}{x^2-2(2+\sqrt{3})x+7+4\sqrt{3}}$;

3) $\dfrac{12a^2-ax-x^2}{x^2-(3a+2)x+6a}$.

4. Не решая уравнения

I вариант

$x^2-8x+13=0$,

II вариант

$3x^2-5x-2=0$,

вычислите значение:

I вариант: $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$.

II вариант: $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}$.

5. Решите неравенство:

I вариант

$$\frac{2x^2+16x-3}{x^2+8x}>2.$$

II вариант

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}<0.$$

6. Найдите сумму всех целых решений неравенства:

I вариант

$$\frac{x^3+17x}{x+8}\le 2$$

II вариант

$$\frac{x^3+2x^2+7}{7-x}\ge 1$$

7. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

I вариант

1) $\sqrt{9-144x^2}$;

2) $\sqrt{3x^2+2x-5}$;

3) $\dfrac{1-y}{\sqrt{4-y^2}}$.

II вариант

1) $\sqrt{36-4x-x^2}$;

2) $\sqrt{64x+x(x+16)}$;

3) $\dfrac{5y^2+7y}{\sqrt{3-2y-y^2}}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Контрольная работа №1 для студентов.

1 вариант.

1. Какие числа называются целыми?
2. Опишите признак делимости числа на 3, 9, 11.
3. Упростите выражение $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$.
4. Разложите многочлен на множители $(a-b)^3+(b-c)^3-(a-c)^3$
5. Решите систему уравнений: $\begin{cases} -4x-11y=-37 \\ 2x+7y=23 \end{cases}$
6. Решите квадратное уравнение разными способами: $3x^2+7x+4=0$
7. Найдите координаты вектора *c,* если известно, что $c=2a+3b$, $a=(3,-2)$, $b=(4,1)$.
8. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x-3y+5z=9 \\ 3x+2y-3z=-1 \\ -5x+4y-z=-3 \end{cases}$

2 вариант.

1. Какие числа называются рациональными?
2. Опишите признак делимости числа на 4, 8, 5.
3. Упростите выражение $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$.
4. Разложите многочлен на множители $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$.
5. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 4x-5y=10 \end{cases}$
6. Решите квадратное уравнение разными способами: $2x^2-5x-25=0$
7. Найдите координаты вектора *c,* если известно, что $c=4a-b$, $a=(-2,5)$, $b=(-4,1)$
8. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-3y-5z=-9 \\ -3x+y-2z=-8 \end{cases}$

Контрольная работа №2 для студентов.

1 вариант.

1. Для нижеприведенных действий проверить коммутативность, ассоциативность и обратимость:

1) В множестве R задано действие $*$ так, что для любых a и b верно $a * b = (a-b)^2$;
2) Действие умножения в множестве R.
2. Выяснить, образует ли группу каждое из следующих множеств при указанной операции над элементами:
1) целые числа относительно сложения;
2) нечетные числа относительно сложения;
3) положительные рациональные числа относительно умножения.

3. Решить систему уравнений $\begin{cases} (3-i)x + (4+2i)y = 2+6i \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i \end{cases}$.

4. Вычислите: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

5. Вычислите значение определителя: $\begin{vmatrix} \sin\alpha + \sin\beta & \cos\beta + \cos\alpha \\ \cos\beta - \cos\alpha & \sin\alpha - \sin\beta \end{vmatrix}$

6. Вычислите определитель: $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$, где $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. Найдите решение системы (методом Гаусса): $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 9 \\ 3x + 2y - 3z = -1 \\ -5x + 4y - z = -3 \end{cases}$

8. Найдите решение системы (методом Крамера): $\begin{cases} 4x - 3y + 2z + 4 = 0 \\ 6x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ 5x - 3y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$

9. Найдите матрицу, обратную следующей: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

10. Перемножить подстановки: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

11. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

12. Найти все значения λ, при которых вектор b линейно выражается через векторы a_1, a_2, a_3: $a_1 = (4,4,3)$, $a_2 = (7,2,1)$, $a_3 = (4,1,6)$, $b = (5,9,\lambda)$.

13. Найдите НОД и НОК следующих чисел:
1) 1232 и 1672,
2) 41382 и 103818,
3) 738089 и 3082607.
14. Запишите числа a и b в системе счисления с основанием g и разделите большее на меньшее: $a = 136,\ b = 2632,\ g = 7$
15. Представьте в виде цепных дробей:
1) $\frac{30}{37}$,
2) $1{,}23$,
3) $\frac{875}{576}$.
16. Решите в целых числах следующие уравнения:
1) $275x + 145y = 10$,
2) $70x + 33y = 1$
17. Решите следующие сравнения:
1) $18x \equiv 12 \pmod{30}$,
2) $98x \equiv 70 \pmod{42}$,
3) $111x \equiv 49 \pmod{179}$.
18. Определить наибольший общий делитель полиномов: $x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 52x^2 - 52x - 12$ и $x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 22x - 12$
19. Разложить на простейшие дроби над полем C: $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$
20. Вычислить результант полиномов: $2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ и $x^2 + x + 3$
21. Вычислить дискриминанты полиномов:
1) $3x^3 + 3x^2 + 5x + 2$,
2) $x^3 + 2x^2 + 4x + 1$.

2 вариант.
1. Для нижеприведенных действий проверить коммутативность, ассоциативность и обратимость:
1) В множестве R задано действие * так, что для любых a и b верно $a * b = b$;
2) Действие вычитания в множестве R.
2. Выяснить, образует ли группу каждое из следующих множеств при указанной операции над элементами:
1) четные числа относительно сложения;
2) рациональные числа, отличные от нуля, относительно умножения;
3) неотрицательные целые числа относительно сложения.
3. Решить систему уравнений $\begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6 \\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8 \end{cases}$.

4. Вычислите: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Вычислите значение определителя: $\begin{vmatrix} 2\sin\varphi\cos\varphi & 2\sin^2\varphi - 1 \\ 2\cos^2\varphi - 1 & 2\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix}$

6. Вычислите определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$, где $\varepsilon = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$

7. Найдите решение системы (методом Гаусса): $\begin{cases} -2x + 3y = -12 \\ 2x + y + 2z = 6 \\ 3x - 2y + 2z = 15 \end{cases}$

8. Найдите решение системы (методом Крамера): $\begin{cases} 5x + 2y + 3z + 2 = 0 \\ 2x - 2y + 5z = 0 \\ 3x + 4y + 2z + 10 = 0 \end{cases}$

9. Найдите матрицу, обратную следующей: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

10. Перемножить подстановки: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

11. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$

12. Найти все значения λ, при которых вектор b линейно выражается через векторы a_1, a_2, a_3: $a_1 = (2,3,5)$, $a_2 = (3,7,8)$, $a_3 = (1,-6,1)$, $b = (7,-2,\lambda)$.

13. Найдите НОД и НОК следующих чисел:

1) 3640 и 14300,
2) 29719 и 76501,
3) 10140 и 92274.

14. Запишите числа a и b в системе счисления с основанием g и разделите большее на меньшее: $a = 18536$, $b = 430$, $g = 7$

15. Представьте в виде цепных дробей:

1) $\frac{13}{30}$,
2) $0{,}459$,

3) $\frac{375}{824}$.

16. Решите в целых числах следующие уравнения:

1) $3x+8y=5$,

2) $26x+34y=13$

17. Решите следующие сравнения:

1) $20x \equiv 35 \pmod{45}$,

2) $64x \equiv 5 \pmod{13}$,

3) $97x \equiv 53 \pmod{169}$.

18. Определить наибольший общий делитель полиномов: $x^5+x^4-x^3-2x-1$ и $3x^4+2x^3+x^2+2x-2$

19. Разложить на простейшие дроби над полем C: $\frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}$

20. Вычислить результант полиномов: $2x^3-3x^2-x+2$ и x^4-2x^2-3x+4

21. Вычислить дискриминанты полиномов:

1) x^3-x^2-2x+1,

2) $3x^3+3x^2+5x+2$

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Статистическая обработка результатов педагогического эксперимента
(Подсчет критерия Манна-Уитни)

Первым шагом, мы сравнили результаты, полученные в следствие начального среза, который проводился в целях сравнения уровня знаний студентов экспериментальной и контрольной групп (в итоге изучения школьного курса алгебры).

Сформулируем гипотезы.

H_0: Уровень знаний по алгебре студентов группы 1 (экспериментальная) не ниже уровня знаний студентов группы 2 (контрольная).

H_1: Уровень знаний по алгебре студентов группы 1 (экспериментальная) ниже уровня знаний студентов группы 2 (контрольная).

В результате подсчета критерия получили:

$T_x = 1834; n_1 = 46, n_2 = 36, n_x = 46$

$U_{эмп} = 753$

Критические значения для данных выборок: $U_{0.01} = 578$; $U_{0.05} = 651$

$U_{Эмп} > U_{Кр}(0{,}05)$

На основе полученного результата, опровергаем гипотезу H_1 и принимаем гипотезу H_0. Значение полученного эмпирического критерия находится в «зоне незначимости», т.е. можно сделать вывод, что разница между уровнями знаний двух групп незначительная.

Вторым шагом, аналогичными вычислениями можно сравнить результаты контрольных работ студентов экспериментальной группы до и после проведенного эксперимента.

Гипотезы:

H_0: Уровень знаний студентов группы 1 (до эксперимента) не ниже уровня знаний студентов группы 2 (после эксперимента).

H_1: Уровень знаний студентов группы 1 (до эксперимента) ниже уровня знаний студентов группы 2 (после эксперимента).

$T_x = 2680; n_1 = 46, n_2 = 46, n_x = 46$

$U_{эмп} = 516{,}5$

Критические значения для данных выборок: $U_{0.01} = 759$; $U_{0.05} = 846$

$U_{Эмп} < U_{Кр}(0{,}01)$

Значит опровергаем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1. Полученное нами значение эмпирического критерия находится в «зоне значимости», т.е. разница между уровнями знаний – значительная, что доказывает эффективность предложенной нами методики организации обучения.

Аналогично формулируя гипотезы и произведя вычисления получим следующие результаты.

Третьим шагом, сравнивая результаты контрольных работ студентов контрольной группы в начале учебного года и в конце учебного года, получили: $U_{Эмп} = 613, U_{0.01} = 440, U_{0.05} = 501;\ U_{Эмп} > U_{Кр}(0{,}05)$. Значение эмпирического критерия попадает в зону незначимости, значит разница между уровнями знаний студентов в результате обучения по традиционной системе изменились незначительно.

Четвертым шагом, сравним результаты студентов экспериментальной и контрольной групп после проведения эксперимента. Получили следующие значения: $U_{Эмп} = 504, U_{0.01} = 578, U_{0.05} = 651;\ U_{Эмп} < U_{Кр}(0{,}01)$. Значение эмпирического критерия попадает в зону значимости, откуда следует, что уровень знаний студентов экспериментальной группы значительно отличается от уровня студентов контрольной группы, причем по процентным соотношениям уровней знаний, приведенных в параграфе 2.4, уровень обучающихся в экспериментальной группе выше.