Казахский национальный педагогический университет имени Абая

УДК: 378.075.8:535 На правах рукописи

ӘКІМЖАН НАҒИМА ШОПАНҚЫЗЫ

Совершенствование математической подготовки студентов посредством обучения решению обратных и некорректных задач в педагогическом вузе

6D010900 - Математика

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Отечественный научный консультант
Доктор педагогических наук,
профессор Бидайбеков Е.Ы.

Зарубежные научные консультанты
Член-корреспондент РАН, доктор
физико-математических наук,
профессор Кабанихин С.И.
Доктор педагогических наук,
профессор Корнилов В.С.

Республика Казахстан
Алматы, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

В настоящей диссертации использованы ссылки на следующие документы:

Послание Президента Республики Казахстан Н.А.Назарбаева - Лидера нации народу Казахстана «Стратегия «Казахстан-2050» – новый политический курс состоявшегося государства». – Астана, 14.12.2012.

План нации - 100 конкретных шагов. Программа Президента Республики Казахстан от 20 мая 2015 года. – Астана, 2015.

Послание Президента Республики Казахстан народу Казахстана. «Казахстан в новой глобальной реальности: рост, реформы, развитие». – Астана, 30.11.2015.

Послание Президента Республики Казахстан Н.Назарбаева народу Казахстана «Новые возможности развития в условиях четвертой промышленной революции». – Астана, 10.01.2018.

Закон Республики Казахстан «Об образовании»: принят 27 июля 2007 года, № 319-III (с изменениями и дополнениями по состоянию на 11.07.2017г.).

Государственный общеобязательный стандарт высшего образования // утвержден Постановлением Правительства Республики Казахстан от 23 августа 2012 года №1080. – Астана, 2012.

Государственная программа развития образования и науки Республики Казахстан на 2016–2019 годы // Указ Президента Республики Казахстан от 1 марта 2016 года, № 205. – Астана, 2016.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

Вуз	–	Высшее учебное заведение
ОНЗ	–	Обратные и некорректные задачи
Педвуз	–	Педагогическое высшее учебное заведение
СЛАУ	–	Система линейных алгебраических уравнений
СНГ	–	Содружество Независимых Государств
СРС	–	Самостоятельная работа студента
СРСП	–	Самостоятельная работа студента с преподавателем

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Основные принципы государственной образовательной политики страны заложены в Законе Республики Казахстан «Об образовании» [1], в Государственной программе развития образования и науки Республики Казахстан на 2016–2019 годы [2], в посланиях Президента Республики Казахстан Н.А. Назарбаева народу Казахстана: «Стратегия «Казахстан-2050» – новый политический курс состоявшегося государства» [3], План нации – 100 конкретных шагов по реализации пяти институциональных реформ [4], «Казахстан в новой глобальной реальности: рост, реформы, развитие» [5], «Новые возможности развития в условиях четвертой промышленной революции» [6] и в других нормативных документах.

Основными целями системы непрерывного образования в Республике Казахстан являются: повышение конкурентоспособности образования и науки, развитие человеческого капитала для устойчивого роста экономики, обеспечение отраслей экономики конкурентоспособными кадрами с высшим и послевузовским образованием, интеграция образования, науки и инноваций и другие важнейшие программные цели [2].

В этой связи, ключевым ориентиром в современной системе высшего педагогического образования является повышение качества знаний, умений и профессиональных навыков выпускников на основе сохранения фундаментальности образования в соответствии с актуальными и перспективными потребностями личности, общества и государства.

Необходимость усиления качества преподавания математических и естественных наук на всех уровнях образования была подчеркнута президентом Республики Казахстан Н. Назарбаевым [6].

Одна из важных задач фундаментализации математического образования является преодоление исторически возникшего разобщения естественнонаучной и гуманитарной компонентов культуры путем их взаимообогащения и поиска оснований целостной культуры на новом этапе развития цивилизации.

Значимость фундаментализации математического образования неоднократно подчеркивалось в работах казахстанских ученых, как А.Е.Абылкасымова, М.А. Бектемесов, Е.Ы. Бидайбеков, Г.Б. Камалова, М.О.Отелбаев, Ш.С. Смагулов, Ж.Сулейменов, У.М. Султангазин, С.Е. Темирболат и другие, а также в работах российских ученых, как А.А. Аданников, В.В. Беликов, И.В. Егорченко, Л.С. Ёлгина, В.С. Корнилов, В.Н. Лозовский, А.Д. Новиков, В.Г. Романов, Н.И. Попов, А.А. Самарский, С.Л. Соболев, В.А. Тестов, А.Н. Тихонов, А.Я. Хинчин и другие ученые [7-30].

Развитию компонентов системы математического образования влияют различные факторы, как приоритетность научных исследований, организованных на стыке различных наук, успешность которых в значительной степени зависит от наличия фундаментальных знании; информатизация образования, представляющая собой область научно-практической деятельности человека, направленной на применение методов и средств сбора, хранения, обработки и распространения информации для систематизации имеющихся; формирование новых знаний на основе достижения психолого-педагогических целей обучения и воспитания студентов.

Движущие силы развития математики имеют два основных объективно существующих источника. Один из них связан с необходимостью систематизировать имеющиеся математические факты, объединить их в стройную теорию, развивать ее, разрабатывать методы для решения математических задач, а второй – с необходимостью решения математическими средствами задач естествознания, экономики и т.д. Два направления в развитии математики, отвечающие этим двум источникам, называются, соответственно, чистой математикой и прикладной математикой [31].

В настоящее время прикладная математика оказывает существенное влияние на развитие различных областей человеческой деятельности и является одним из определяющих факторов научно-технического прогресса. Значительные результаты в области прикладной математики получены российскими учеными Е.П. Велиховым, Н.Е. Жуковским, М.В. Келдышем, А.Н. Колмогоровым, С.П. Королевым, Н.Е. Кочиным, А.Н. Крыловым, М.А. Лаврентьевым, В.Г. Романовым, А.М. Ляпуновым, А.А. Самарским, С.Л. Соболевым, Д.Г. Стоксом, А.Н. Тихоновым, С.А. Чаплыгиным и другими учеными. К числу казахстанских ученых, внесших вклад в развитие прикладной математики, можно отнести Т.Ш. Кальменова, Ш.С. Смагулова, У.М. Султангазина и других ученых.

Одной из современных направлений прикладной математики является решение задач естествознаний, экономики, промышленности и т.д., методами математики. Интерес представляет обратные и некорректные задачи (ОНЗ).

Теория и практика ОНЗ стремительно развивается с середины 60-х годов прошлого века и находит свое развитие в работах отечественных ученых, таких как М.А. Бектемесов, К.Т. Искаков, Т.Ш. Кальменов, Г.Б.Камалова, Б.Г.Муканова, С.Т.Мухамбетжанов, К.Т.Мынбаев, Д.Б.Нурсеитов, А.Т. Нурсеитова, М.О.Отелбаев, Ш.С.Смагулов, У.М. Султангазин, С.Е.Темирболат, Б.Б.Шолпанбаев и другие, а также в работах российских ученых, таких как А.С. Алексеев, В.Я. Арсенин, Х.Д.Буи, А.Л.Бухгейм, А.О. Ватульян, М.Л.Гервер, В.Б.Гласко, Н.Л.Гольдман, А.В.Гончарский, А.М.Денисов, В.К. Иванов, С.И. Кабанихин, В.С.Корнилов, М.М. Лаврентьев, Е.В.Мамонтов, Ю.П. Петров, А.И. Прилепко, В.Г. Романов, В.С. Сизиков, С.Л. Соболев, В.Н. Танана, Ю.М. Тимофеев, А.Н. Тихонов, А.М. Федотов, М.А. Шишленин, А.Г. Ягола, В.Г. Яхно и другие ученые [10-12, 14-16, 32-86] .

С помощью теории и методологии ОНЗ могут успешно исследоваться прикладные задачи физики, геофизики, сейсмологии, морских природных катастроф, химии, обработки фотоизображений, медицины, экономики, экологии, промышленности, астрономии, астрофизики и других областей. ОНЗ широко применяются в прикладной математике, в таких разделах, как алгебра, анализ, геометрия, обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения, операторные уравнения, оптимальное управление, а также, и в других разделах прикладной математики.

В этой связи, в настоящее время, во многих высших учебных заведениях стран СНГ на физико-математических (в том числе педагогических) и естественнонаучных направлениях для подготовки бакалавров и магистрантов преподаются элективные курсы по ОНЗ [32-33, 35, 36, 41, 42, 57, 58, 71, 83, 87-109]. Например, среди казахстанских вузов можно отметить следующих: Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, Государственный университет имени Шакарима города Семей, Уральский государственный университет, а среди росийских вузов - Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Московский городской педагогический университет, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Ростовский государственный университет, Санкт-Петербургский государственный университет, Сибирский Федеральный университет, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова и другие вузы. Однако, читаются элективные курсы по-разному, так как нет единого подхода к изучению теории и практики ОНЗ.

Все это требует исследовательского подхода к выявлению научно-образовательного потенциала обучения решению ОНЗ и составлению научно-обоснованной методики организации обучения студентов решению таких задач.

Актуальность данной проблемы и определила тему нашего исследования: «Совершенствование математической подготовки студентов посредством обучения решению обратных и некорректных задач в педагогическом вузе».

Цель исследования: Разработка научно-обоснованной методики организации обучения студентов-математиков решению обратных и некорректных задач.

Объект исследования: Система математической подготовки студентов в педагогическом вузе.

Предмет исследования: Совершенствование математической подготовки студентов посредством обучения решению обратных и некорректных задач.

Гипотеза исследования: если обучать студентов решению обратных и некорректных задач по разработанной научно-обоснованной методике, учитывающая образовательный потенциал обратных и некорректных задач, **то** это будет способствовать фундаментализации математической подготовки, повышать качество математической и профессиональной подготовки студентов педагогического вуза.

В соответствии с целью, предметом и гипотезой исследования поставлены следующие **задачи исследования:**

- выявить роль и место обратных и некорректных задач в математической подготовке студентов педагогического вуза;
- анализировать работы по вопросам обучения решению обратных и

некорректных задач в школе и вузе;

- изучить пути реализации дидактических принципов в обучении студентов решению обратных и некорректных задач в педагогическом вузе;

- определить содержание, методы и формы организации обучения решению обратных и некорректных задач;

- разработать методику обучения обратным и некорректным задачам с применением информационных технологий;

- организовать и провести педагогический эксперимент по проверке гипотезы исследования.

Методы исследования: анализ отечественных и зарубежных научных трудов по педагогике, психологии, философии, обратным и некорректным задачам; анализ учебных программ, пособий, диссертаций, материалов конференций; обобщение опыта по обучению решению обратных и некорректных задач; применение эмпирических методов научного познания, как беседа, наблюдение, проведение лекционных и практических занятий со студентами; педагогический эксперимент и анализ экспериментальной деятельности.

Научная новизна исследования:

- выявлены роль и место обратных и некорректных задач в математической подготовке студентов педагогического вуза;

- определен научно-образовательный потенциал обучения обратным и некорректным задачам;

- разработана научно-обоснованная методика обучения решению обратных и некорректных задач, способствующая формированию у студентов фундаментальных знаний в области прикладной математики и навыков применения теоретических знаний на практике.

Теоретическая значимость проведенного исследования заключается в разработке методологических и научно-методических основ обучения решению обратных и некорректных задач, в выявлении и конкретизации научно-образовательного потенциала обучения обратным и некорректным задачам, и его роли в формировании у студентов фундаментальных знаний в области математики; в разработке методики использования информационных технологий в решении прикладных задач.

Практическая значимость полученных результатов заключается в том, что:

- разработана методика обучения решению обратных и некорректных задач студентов педагогического вуза;

- описаны методы рациональных рассуждений, применяемые в обучении решению обратных и некорректных задач: выдвижение гипотез при аналитическом или численном решении ОНЗ, уточнение хода решения ОНЗ, контроль сходимости и погрешности конструктивного вычислительного алгоритма решения ОНЗ, разумные аналогии при решении ОНЗ, осмысление физических свойств исследуемого объекта в процессе решения ОНЗ и др.;

- разработаны рекомендации по использованию компьютерного математического пакета Mathcad на лабораторных занятиях в процессе решения учебных обратных и некорректных задач;

- результаты и рекомендации, полученные в ходе исследования, могут быть использованы при обучении математическим дисциплинам, при написании учебных пособий по математическим курсам для студентов и преподавателей вузов.

Этапы исследования. Исследовательская работа проводилась с 2013 по 2018 годы и ее можно условно разделить на три этапа**:**

На первом этапе (2013–2014 гг.) осуществлена постановка проблемы исследования; определена степень разработанности научной проблемы; сформулированы цель, гипотеза, задачи исследования; анализированы философские, психолого-педагогические, математические, методические источники и диссертационные работы по теме исследования, а также подходы к фундаментализации математического образования.

На втором этапе (2014–2016 гг.) выявлен научно-образовательный потенциал обучения обратным и некорректным задачам; анализированы существующие подходы к обучению студентов обратным и некорректным задачам; разработаны методические основы обучения решению обратных и некорректных задач в педагогическом вузе; проведена экспериментальная проверка эффективности разработанной методической системы обучения решению обратных и некорректных задач в педагогическом вузе.

На третьем этапе (2016–2018 гг.) проведено исследование по выявлению влияния обучения обратным и некорректным задачам на формирование у студентов фундаментальных знаний в области прикладной математики. Осуществлено описание основных положений и результатов исследования, оформление диссертационной работы.

На защиту выносятся следующие положения:

- Целевые установки и научно-образовательный потенциал обучения решению обратным и некорректным задачам.
- Методическая система обучения решению обратных и некорректных задач студентов педагогического вуза.
- Результаты, полученные в ходе применения и апробации экспериментальной методической системы обучения решению обратных и некорректных задач студентов педагогического вуза.

Результаты исследования внедрены в учебный процесс Казахского национального педагогического университета имени Абая.

Апробация результатов исследования. Полученные результаты докладывались и обсуждались на шестой международной молодежной научной школе-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Алматы, 2014), VII Международной научно-методической конференции «Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке» (Алматы, 2015), седьмой международной молодежной научной школе-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (г. Новосибирск, Россия, 19–24 октября 2015 г.), на международной конференции «International Conference on Advancements in Mathematical Sciences (AMS)» (г. Анталия, Турция, 5–7 ноября 2015 г.), на научно-методологическом семинаре Института математики, информатики и естественных наук ГАОУ ВО города Москвы «Московский городской педагогический университет» (г. Москва, Россия, 2 марта 2016 г), на заседаниях кафедры информатики и информатизации образования Института математики, физики и информатики Казахского национального педагогического университета имени Абая (2014–2016 гг.).

Основные результаты исследования **опубликованы** в 14 научных работах, в том числе 3 научные работы опубликованы в изданиях, рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки Министерства образования и науки Республики Казахстан, 1 научная работа опубликована в журнале, входящем в базу данных компании Scopus, 2 научные работы опубликованы в научных журналах Российской Федерации.

Структура диссертации. Логика исследования и изложения его результатов определили структуру диссертации, состоящую из введения, двух разделов, заключения, списка использованных источников и приложений.

Во введении обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цель, объект, предмет, гипотеза и задачи исследования, описаны методы, научная новизна и практическая значимость исследования, представлены основные положения, выносимые на защиту, данные об апробации и внедрении разработанных результатов, краткое содержание диссертации.

В первом разделе раскрыты роль и место обратных и некорректных задач в фундаментализации математической подготовки студентов педагогических вузов, научно-образовательный потенциал обучения решению обратных и некорректных задач в вуз, основные дидактические принципы в обучении решению обратных и некорректных задач.

Во втором разделе представлена методика организации обучения решению обратных и некорректных задач: содержание, методы, формы, средства и технология обучения, описаны результаты педагогического эксперимента по апробации данной методики и проверки гипотезы исследования.

В заключении отражены основные результаты проведенного исследования, а также выводы по их использованию в дальнейших исследованиях в области педагогики и методики обучения математике.

Список использованныхисточников: В процессе проведенного исследования, использована литература из 170 наименований.

В приложении представлены алгоритм метода «обруча» в отыскании корней полиномов, контрольные задания и вопросы, акты внедрения результатов исследования в учебный процесс вуза.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ РЕШЕНИЮ ОБРАТНЫХ И НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В ПЕДАГОГИЧЕСКОМ ВУЗЕ

1.1 Роль и место обратных и некорректных задач в математической подготовке студентов в педагогическом вузе

В настоящее время Республика Казахстан ведет активное международное сотрудничество в сфере высшего образования. Интеграция системы высшего образования в мировое образовательное пространство является одним из долговременных стратегических приоритетов страны. Государственная политика в области образования определяет стратегическую и главную цель высшего образования в Республике Казахстан – обеспечение будущим специалистам современную и качественную профессиональную подготовку на основе сохранения фундаментальности образования, следования отечественным образовательным традициям и положительному мировому опыту, соответствия потребностям личности и государства.

Вузовское образование призвано обеспечить с учетом перспектив развития страны конкурентоспособными высококвалифицированными кадрами с высокими духовно-нравственными качествами, способных к самостоятельному мышлению и обеспечению прогрессивного научно-технического, социально-экономического и культурного развития общества. В связи с чем, одной из основных задач послевузовского образования является создание необходимых условий магистрантам для получения системы фундаментальных знаний, развития личности на основе национальных и общечеловеческих ценностей, достижений науки, техники, культуры.

Проблема фундаментализации математического образования неоднократно подчеркивалось в ранее указанных работах [7-30, 109].

По мнению отечественного ученого-методиста А.Е.Абылкасымовой [8, с.148], именно на основе фундаментального (базового) образования, осуществляется формирование и совершенствование профессионального мастерства, создается условие дляприобретения необходимых прикладных знаний на основе владения «ядром» знаний, благодаря интеллектуальному фундаменту.

А.Д.Новиков, определяя фундаментализацию среднего и высшего образования как сложный и непрерывный процесс, в основе которого лежит сближение и интеграция образовательного процесса с научными знаниями в соответствующей области специализации обучаемых, про фундаментализацию математического образования,отмечает следующее [23, с.43]: «…Фундаментализация математического образования в высшей школе и старших классах средней школы предполагает использование в процессе глубокого и основательного изучения математических дисциплин новых научных исследований и достижений математики, создание оптимальных условий для воспитания у школьников и студентов гибкого научного мышления».

И.В.Егорченко [19, с.12] группирует различные трактовки фундаментализации образования вокруг трех тенденций: интеграция (сближение) науки и образования; универсализация знаний, навыков и умений; формирование общекультурных основ в процессе обучения.

Повышение уровня фундаментальности высшего образования обусловлено необходимостью ориентации студентов на овладение глубинными, сущностными основаниями и связями между различными процессами окружающего мира, с развитием его интеллектуального потенциала. Единство онтологического и гносеологического аспектов фундаментализации образования предоставляет вместе с тем уникальную возможность для обучения мышлению (его методологии, методов и отдельных приемов) непосредственно на наглядном материале, с учетом его характерной специфики.

Анализ имеющихся научных работ наглядно показывает, что фундаментализация математической подготовки обеспечивается реализацией принципов, которые предопределяют интегративную организацию математического образования.

Среди таких принципов:

– *принцип единства интеграции и дифференциации*. Данный принцип развивает принцип природосообразности Я.А. Коменского [110], в основе которого лежит модель естественного природного развития. Реализация данного принципа выражает способ самоорганизации образования и позволяет осмыслить образование как целостный организм, который в процессе своего исторического развития последовательно качественно развивается;

– *принцип антропоцентрического характера интеграции.* Этот принцип был сформулирован в конце XIX века основоположником межпредметной интергации Джоном Дьюи [110, с.237]. Данный принцип определяет положение обучаемого и обучающего в интегральной образовательной системе. Реализация данного принципа способствует повышению уровня интегрированности современного образования;

–*принцип культуросообразности интеграции образования.* Педагогическая идея данного принципа принадлежат Джону Локку и И.Г.Песталоцци [110, с.360], которые считали, что знание происходит из человеческого опыта, и что человек формируется только под влиянием среды и воспитания. Этот принцип характеризует отношение образования к культурному наследию и позволяет повысить качество современного образования.

Направленность обучения на постижение глубинных, сущностных, системообразующих оснований и связей между разнообразными процессами окружающего мира является системной характеристикой фундаментализации математического образования.

Очевидно, что обучение студентов в условиях фундаментализации математического образования является не только способом получения знаний и формирования умений и навыков, но является и средством самостоятельного освоения методов получения новых знаний, умений и навыков.

Фундаментализация математического образования должна основываться на органическом единстве естественнонаучной и гуманитарной составляющих. Взаимосвязь содержания учебных предметов необходима и для создания целостной картины мира, служащей научной основой для последующей практической деятельности обучаемого. Поэтому фундаментализация математического образования формирует системно-информационную картину мира и позволяет осознать законы природы и общества, по которым живет человечество и которые нельзя игнорировать.

С позиции деятельностного подхода, рассматривающего учение как деятельность, фундаментальность представляется наличием таких структурных элементов содержания образования, как: знания, умения действовать по образцу; готовность находить нестандартные решения и др. При этом каждый предшествующий элемент служит предпосылкой для перехода к следующему элементу, что соответствует систематичности и последовательности обучения.

С точки зрения системного подхода фундаментализация математического образования характеризуется целостностью, взаимосвязанностью и взаимодействием элементов, а также наличием системообразующих стержней. В процессе обучения формируется целостное естественнонаучное мировоззрение, приобретаются навыки мыслить целостными фундаментальными теориями и действовать на практике сообразно методам получения фундаментальных знаний. Принцип целостности предполагает рассмотрение совокупности устойчивых связей, что означает, изучение не изолированных дидактических единиц, а согласованные разделы, с учетом внутрипредметных и межпредметных связей.

Внутрипредметные связи раскрывают взаимосвязь основных понятий изучаемой отрасли знаний, ее структуру. Это означает, что формирование и развитие представлений о понятиях и структуре изучаемой дисциплины является условием реализации внутрипредметных связей в процессе обучения любому предмету. Межпредметные связи выражаются в формировании целостного представления об изучаемых дисциплинах как о единой науке. Это создает объективную основу построения учебного процесса, когда становится возможной интеграция различных содержательно-методических аспектов в процессе формирования теоретических знаний и практических умений.

Одной из важных задач фундаментализации математического образования является формирование системы общенаучных знаний и профессионально значимых умений и навыков, на которых в дальнейшем строится профессиональное образование, формируется профессиональная компетентность, обеспечивающая: развитие творческих способностей выпускника; совершенствование профессионального мастерства и т.д. В результате такой подготовки приобретаются фундаментальные знания – стержневые, системообразущие методологически значимые представления, восходящие к истокам понимания, к первичным сущностям.

Фундаментализация математического образования предполагает разностороннее гуманитарное и естественнонаучное образование студентов для создания единой мировоззренческой системы и основанное на фундаментальных принципах современной методологии. Методологические принципы объединяют и организуют отдельные методы и приемы в единый научный метод. К методологическим принципам относятся принцип верификации, принцип инвариантности, принцип системности, принцип соответствия, принцип простоты, принцип наблюдаемости, принцип красоты и другие методологические принципы.

Несомненно, это требует интеграции гуманитарного и естественнонаучного знания, установления преемственности и междисциплинарных связей, опоры на осознание студентами сущности методологии познавательной и практической преобразующей деятельности. Все это вместе взятое диктует новые требования к системе образования, в том числе к усилению его гуманитарной и фундаментальной компонент. В результате образование становится фундаментом материальной, духовной, теоретической и практической деятельности людей.

Математическое образование является не только важнейшей составляющей фундаментальной подготовки студентов педагогических вузов, но и элементом общей культуры современного человека. Рассмотрение педагогического процесса математического образования, его задачи, планирование, технологии исходят из потребности в поисках нового, оптимального в методах, средствах и формах обучения, способствующих формированию целостной системы научных знаний. Интеграция наук и стремление получить как можно более точное представление об общей картине мира свойственна на современное время.

При этом достижения современных наук о природе, имеющие общеобразовательное значение, не могут оставаться достоянием только ученых. Сущность и практическая роль этих достижений должны быть раскрыты на уровне, доступном студентам и магистрантам высших учебных заведений. Эти идеи находят отражение в концепции современного вузовского математического образования.

Содержание дисциплин математической подготовки формируется на основе современных достижений таких научных областей, как: математическая физика, спектральная теория дифференциальных уравнений, математическое моделирование, вычислительные методы, исследование операций, оптимальное управление, обратные задачи для дифференциальных уравнений и другие научные области. В процессе математической подготовке студенты приобретают умения и навыки исследования прикладных задач при помощи математического моделирования и вычислительного эксперимента. В результате такие выпускники в своей профессиональной деятельности, для приобретения новых знаний об окружающем мире, способны строить корректные математические модели изучаемых процессов и исследовать их, используя эффективные методы современной мировой науки. Наличие у таких выпускников вышеотмеченных профессиональных качеств наглядно демонстрирует их компетентность в области математики.

В процессе такого обучения уделяется большое внимание на формирование у студентов умений и навыков всестороннего анализа математических моделей, который позволяет им в математических методах и полученных результатах видеть не только систему знаний, но и возможности их использования в своей профессиональной деятельности, в рациональном использовании материальных и природных ресурсов в исследованиях окружающего мира.

Существующая потребность именно в таких компетентных специалистах в области математики инициирует реформирование современного вузовского математического образования. И такая работа, сегодня, при поддержке государственных органов ведется со стороны Министерства образования и науки Казахстана. Один из таких ее результатов – разработка и внедрение в вузовский процесс государственного общеобязательного стандарта высшего образования и послевузовского образования нового поколения, реализующих компетентностный подход.

Обучение студентов педагогических вузов математических специальностей в условиях фундаментализации математического образования является не только способом получения системы математических знаний, позволяющая успешно решать разнообразные прикладные задачи, но является и средством самостоятельного освоения методами получения новых знаний, умений и навыков.

Совершенствование подготовки студентов специальности математика невозможно без повышения качества их математической подготовки, а также, без усиления прикладного аспекта математических знаний.

Прикладная математика, как отмечает А.А. Петров [112], дала эффективные инструменты познания природы. Изучение движения планет завершилось формулировкой общих принципов классической механики. Понятие импульса, энергии, принципы сохранения давали эвристическую основу для исследований движения молекул и теплоты. Исследования электрических и магнитных явлений, завершившиеся уравнениями Максвелла, привели к общим принципам теории относительности. Уравнение Шредингера заставило пересмотреть представления о детерминизме в природе. Исследование нелинейных параболических уравнений раскрыло общие принципы синергетики. Прикладная математика не только инструментпознания, но и средство преобразования мира. Исследование устойчивости регулятора Уатта открыло современную теорию управления. Большой раздел ее составила теория устойчивости движения, развитая А.М. Ляпуновым Теория оптимального управления Л.С. Понтрягина поставила на научный фундамент конструирование технических объектов.

Благодаря прикладной математике проводятся исследования космического пространства, глубинных свойств Земли и Мирового океана, природных катастроф, волн-наводнений типа цунами, вызванных подводными землетрясениями, оползнями, взрывами подводных вулканов, осуществляется термоядерный синтез, поиск полезных ископаемых и другие практические исследования. Создаются диагностические приборы, совмещающие в себе возможность сбора большого числа ракурсов, с обработкой ее компьютерными средствами. Среди таких приборов – компьютерные томографы, предназначенные для диагностики и неразрушающего контроля качества изделий и применяемые в различных областях человеческой деятельности: медицине, биологии, химии, геофизике и других прикладных областях. Практическая реализация исследований в области прикладной математики развивает атомную энергетику, промышленность, экономику, сельское хозяйство, спутниковое телевидение, сотовую связь, новые информационные технологии и другие области.

По мнению Г.Г. Малинецкого в XXI веке будут решаться новые задачи, которые дадут стимулы к развитию новых прикладных исследований. К числу таких задач Г.Г. Малинецкий относит [111]:

- прогноз и предупреждение бедствий, катастроф, других опасностей в природной, техногенной и социальной сферах;
- открытие «психологического кода» – выяснение способа кодирования, передачи, алгоритмов обработки информации в нервной системе, биологический анализ работы сознания;
- анализ стратегических рисков – событий, технологий, решений, которые могут существенно сузить коридор возможностей стран, регионов или цивилизаций, привести их к кризису или катастрофе.

Ю.Н. Павловский [111] отмечая важнейшую роль прикладной математики в современном обществе, обращает внимание на то, что математическое моделирование будет трактоваться как технология, используемая для прогноза развития реальных явлений, процессов, систем или для прогноза их свойств. Эта технология встроена в процесс производства материальных благ и в процесс их потребления так, что ни то, ни другое в современном виде существовать без этой технологии не могут.

В настоящее время в высших учебных заведениях Республики Казахстан (Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова, Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, Государственный университет имени Шакарима города Семей, Жетысуский государственный университет им. Ильяса Жансугурова, Карагандинский государственный университет им. академика Букетова, Международный казахско-турецкий университет им. Ходжа Ахмеда Ясави и другие вузы) осуществляется обучение дисциплинам прикладной математики. В процессе такого обучения студенты приобретают опыт решения прикладных математических задач.

В содержании обучения прикладной математике имеется специфичная терминология, реализуются междисциплинарные связи изучаемых вузовских математических курсов, используются математические модели и методы их исследования. В процессе обучения студентам предлагаются учебные задачи и задания, решение которых носит фундаментальный характер, поскольку оно подчинено принципу выделения этапов рациональных рассуждений. В процессе такого обучения реализуется обучение через, которое обеспечивает возможность для творческого развития студентов и формирования у них компетентности в области прикладной математики.

В процессе обучения математике используются разнообразные прикладные математические задачи. Среди них встречаются и нетипичные математические задачи, как по постановке, так и по методам их решения. Среди таких задач отдельное внимание заслуживает, на наш взгляд, обратные и некорректные задачи (далее - ОНЗ).

Прежде чем привести некоторые примеры таких задач, рассмотрим понятие «корректность математической задачи» и понятие «обратная задача».

Среди математических задач выделяется класс корректно поставленных задач, то есть задач, для которых решение существует, единственно и непрерывно зависит от данных задачи. Хотя эти требования на первый взгляд кажутся совершенно естественными, их, тем не менее, необходимо доказывать в рамках принятой математической модели.

Доказательство корректности – это первая апробация математической модели: модель непротиворечива (решение существует), модель однозначно описывает физический процесс (решение единственно), модель мало чувствительна к погрешностям измерений физических величин (решение непрерывно зависит от данных задачи).

Понятие корректности (правильности) постановки задач для дифференциальных уравнений было сформулировано в 1902 г. французским математиком Ж. Адамаром и рассмотрены многими исследователями [15, 16, 24, 26, 27,29, 32, 33, 41, 44, 46, 47, 52,56-75,78-83,85, 86,104, 105].

Задача называется *поставленной корректной* (по Ж. Адамару), если выполняются следующие условия:

а) решение задачи существует;

б) решение задачи единственно;

в) решение задачи непрерывно зависит от данных.

Задачи, не удовлетворяющие перечисленным требованиям, называются *некорректно поставленными*.

Первое условие требует, чтобы данных в задаче не было слишком много (чтобы задача не была переопределенной). Второе условие требует, чтобы данных было достаточно для определенности задачи. Третье условие связано со следующим обстоятельством: если задача связана с описанием физического явления, то данные в задаче не могут считаться известными абсолютно точно. Можно считать лишь, что нам известно некоторое приближение к данным задачам. Таким образом, если непрерывная зависимость решения от данных не имеет место, решение задачи будет физически неопределенным.

Сформулированные выше условия корректности требуют уточнения. В теории краевых задач и решение, и данные рассматриваются как элементы некоторых функциональных пространств, а условия корректности формулируются следующим образом:

- решение задачи существует для любых данных, принадлежащих некоторому замкнутому подпространству в линейном нормированном пространстве $C^{(k)}$, L_p, W_p^l, ... и принадлежат одному из этих пространств;

- решение задачи единственно в каком- либо из указанных пространств;

- бесконечно малым вариациям данных в этом пространстве, в котором рассматриваются данные, соответствуют бесконечно малые вариации решения (в том пространстве, в котором рассматриваются решения). Теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости решений от данных являются доказательством корректности постановки задачи.

Для эллиптических уравнений корректными являются задачи, в которых краевые условия задаются на всей границе области, где требуется определить решение.

Для гиперболических и параболических уравнений корректными являются задачи Коши и смешанные задачи, в которых данные задаются на части границы области. Данные Коши с точки зрения физического процесса, которому соответствует математическая задача, означают, что нам известно состояние поля в некоторый начальный момент времени. Задача – определить поле в последующие моменты времени.

Рассмотрим решение диференциального уровнения с точки зрения функционального анализа.

Дифференциальное уравнение в совокупности с дополнительными условиями определяет оператор A, который ставит в соответствие любому решению $u \in U$ набор функций, входящих в дополнительные условия. Рассматривая этот набор функций как элемент f функционального пространства F, мы получаем, что решение задачи для дифференциального уравнения эквивалентно решению операторного уравнения

$$A\,u = f \qquad (1.1.1)$$

при условии, что $u \in U$. Чтобы решение этого уравнения существовало, необходимо и достаточно, чтобы f являлось образом некоторого элемента $u \in U$, т.е. принадлежало множеству значений оператора A. Таким образом, множество данных задачи вполне определяется заданием пространства решений U.

Условия существования и единственности решения уравнения (1.1.1) гарантируют существование A^{-1} :

$$u = A^{-1} f \qquad (1.1.2)$$

который способствут решению задачи, ставя в соответствие данным задачи, т.е. элементу f, решение $u \in U$. Необходимо, однако, помнить, чтопри решении прикладных задач математическим методомцелью являетсяматематическое описаниефизических процессов. При этом данные задачи моделируются и как уже отмечалось выше, берутся из опыта, и они не могут быть измерены абсолютно точно, следовательно, в данных задачи всегда присутствуют ошибки измерения. Чтобы математическая модель описывала реальный физический процесс, к задаче необходимо предъявить еще некоторые требования, которые отражают физический факт малого изменения решения при небольшом изменении данных задачи или как принято говорить, устойчивости решения к малым возмущениям входных данных. Сформулируем сказанное выше в математических терминах.

Пусть u – решение уравнения (1.1.1), в котором оператор A действует из нормированного пространства U в нормированное пространство F. Говорят, что решение уравнения (1.1.1) устойчиво к малым изменениям правой части $f \in F$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого $\overline{f} \in F$ для которого $\left\| f - \overline{f} \right\|_F < \delta$ выполнено неравенство $\left\| u - \overline{u} \right\|_U < \varepsilon$. При этом $A\,u = f$, $A\,\overline{u} = \overline{f}$.

Математическая задача решения уравнения (1.1.1), удовлетворяющая требованиям существования, единственности и устойчивости решения к малым изменениям данных носит название корректной задачи.

Сформулируем это понятие более точно.

Пусть A – оператор, действующий из нормированного пространства U в нормированное пространство F

$$A : U \xrightarrow{A} F$$

Задача решения уравнения (1.1.1) называется поставленной корректно на паре пространств U, F, если она удовлетворяет следующим требованиям :

а) решение задачи существует для любого $f \in F$ и принадлежит U;

б) решение задачи единственно в пространстве U;

в) решение задачи устойчиво на любом элементе $f \in F$.

Отметим, что задача может быть корректной на одной паре пространств и некорректной на другой. Ясно, например, что при расширении пространства F можно прийти в противоречие с требованием существования решения при любом $f \in F$.

Приведем пример корректной задачи из [72]. Рассмотрим уравнение колебания струны

$$u_{tt} = a^2\, u_{xx}\,, \tag{1.1.3}$$

в полуплоскости $D = \left\{ (x,t) \;\middle|\; x \in R\,,\ t > 0 \right\}$.

В этом случае для него достаточно задать данные Коши

$$u(x,0) = \varphi(x), \ \ u_t(x,0) = \psi(x), \ \ x \in R. \qquad (1.1.4)$$

При этом функция $u(x,t)$ равна смещению струны в точке x в момент времени t от положения равновесия, совпадающего с осью x, а $u_t(x,t)$ – начальной скорости струны. Числовой коэффициент a характеризует скорость передачи сигналов в струне (скорость звука).

Решение задачи (1.1.3),(1.1.4) единственно и дается формулой Даламбера

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi. \qquad (1.1.5)$$

Для произвольного $T \in (0,\infty)$ рассмотрим характеристический треугольник $D(T) = \left\{(x,t) \;\middle|\; 0 \le t \le T - |x|\right\}$.

Из формулы (1.1.5) следует, что для $\varphi \in C^2\left[-T,T\right]$, $\psi \in C^1\left[-T,T\right]$ решение $u \in C^2(D(T))$. Кроме того, малое изменение функций φ, ψ по норме соответствующих пространств вызывает малые изменения решения u в норме $C^2 D(T))$. Убедимся в этом.

Введем для этого нормы соответствующих пространств

$$\| u \| = \| u \|_{C^2(D(T))} = \max_{(x,t)\in D(T)} \left[\, |u(x,t)| + |u_x(x,t)| + |u_t(x,t)| + \right.$$

$$\left. + |u_{xx}(x,t)| + |u_{xt}(x,t)| + |u_{tt}(x,t)| \,\right],$$

$$\| \varphi \| = \| \varphi \|_{C^2[-T,T]} = \max_{|x| \le T} \left[\, |\varphi(x)| + |\varphi'(x)| + |\varphi''(x)| \,\right],$$

$$\| \psi \| = \| \psi \|_{C^2[-T,T]} = \max_{|x| \le T} \left[\, |\psi(x)| + |\psi'(x)| \,\right].$$

Проводя оценки для уравнения (1.1.5), находим

$$|u(x,t)| \le \| \varphi \| + T \cdot \| \psi \|.$$

Дифференцируя равенство (1.1.5) и делая аналогичные оценки, получаем

$$|u_t(x,t)| \le a \cdot \| \varphi \| + \| \psi \|, \ \ |u_x(x,t)| \le \| \varphi \| + \frac{1}{a} \cdot \| \psi \|,$$

$$|u_{xt}(x,t)| \le a \cdot \| \varphi \| + \| \psi \|, \ \ |u_{xx}(x,t)| \le \| \varphi \| + \frac{1}{a} \cdot \| \psi \|,$$

$$|u_{tt}(x,t)| \le a^2 \cdot \| \varphi \| + a \cdot \| \psi \|.$$

Складывая все полученные неравенства, получаем, что

$$\| u \| \le \left(3 + 2a + a^2\right) \| \varphi \| + \left(T + 2 + a + \frac{2}{a} \right) \| \psi \| \qquad (1.1.6)$$

Возьмем теперь произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда, если

$$\| \varphi \| < \frac{\varepsilon}{2(3 + 2a + a^2)} = \delta_1 , \ \| \psi \| < \frac{\varepsilon}{2\left(T + 2 + a + \frac{2}{a}\right)} = \delta_2 ,$$

то $\| u \| < \varepsilon$ и, следовательно, малым по норме функциям φ и ψ соответствуют малые решения $u(x,t)$ задачи (1.1.3),(1.1.4). Так как задача линейная, то отсюда следует, что малым изменениям функций φ и ψ соответствуют малые изменения решения. Действительно, положим $\varphi = \varphi - \varphi_\delta$, $\psi = \psi - \psi_\delta$,

$u = u - u_\delta$. Тогда имеем из (1.2.6), что если $\| \varphi - \varphi_\delta \| < \delta_1$, $\| \psi - \psi_\delta \| < \delta_2$, то $\| u - u_\delta \| < \varepsilon$.

Заметим, что та же самая задача, если считать φ, ψ просто непрерывными функциями, а для решения сохранить прежнее пространство $C^2(D(T))$, будет некорректной, так как не будут выполнены первое и третье условия корректности.

Приведем примеры некорректно поставленных задач.

Пример 1.1.1. Рассмотрим ОДУ второго порядка с краевыми условиями

$$x''(t) - x(t) = 0 , \qquad x(0) = 0,\ x(a) = b \qquad (1.1.7)$$

Общее решение (1.1.7) имеет вид

$$x = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t),$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования.

Из первого краевого условия находим, что $c_2 = 0$. Из второго краевого условия находим, что $c_1 = \dfrac{b}{\sin(a)}$.

Таким образом, частное решение (1.1.7) имеет вид

$$x_1(t) = \frac{b}{\sin(a)} \sin(t) .$$

А если краевое условие относится не к точке $t = a$, а к точке $t = a + \varepsilon$, что вполне возможно, так как малые погрешности в краевых условиях неизбежны, то частное решение (1.1.7) уже будет иметь вид

$$x_2(t) = \frac{b}{\sin(a+\varepsilon)}\sin(t).$$

И если, например, $a = \pi - \varepsilon$, то модуль разности между $x_1(t)$ и $x_2(t)$ может быть сколь угодно велик даже для сколь угодно малых ε.

Пример 1.1.2 (пример Ж. Адамара задачи Коши для уравнения Лапласа).

Пусть $u = u(x, y)$ – решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{1.1.8}$$

в полуполосе $G = \{(x,y) \mid -\pi < x < \pi,\ y > 0\}$, удовлетворяющее следующим условиям

$$u(-\pi, y) = u(\pi, y) = 0,\ u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial}{\partial y}u(x,0) = \psi(x) \tag{1.1.9}$$

Данная задача является неустойчивой. Действительно, рассмотрим решения двух задач:

1) $\Delta u = 0,\ u(-\pi, y) = u(\pi, y) = 0,\ u(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial}{\partial y}u(x,0) = 0;$

2) $\Delta u_\lambda = 0,\ u_\lambda(-\pi, y) = u_\lambda(\pi, y) = 0,\ u_\lambda(x, 0) = 0,$

$$\frac{\partial}{\partial y}u_\lambda(x,0) = \exp\left(-\sqrt{\lambda}\right)\cdot Sin(\lambda x).$$

При достаточно больших λ ($\lambda \to +\infty$) данные в этих задачах мало отличаются

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}u(x,0) - \frac{\partial}{\partial y}u_\lambda(x,0)\right| = \left|\exp\left(-\sqrt{\lambda}\right)\cdot Sin(\lambda x)\right| \le \exp(-\sqrt{\lambda})$$

С другой стороны, их решения

$$u \equiv 0,\ u_\lambda = \frac{1}{\lambda}\exp\left(-\sqrt{\lambda}\right)\cdot Sin(\lambda x)\cdot sh(\lambda y)$$

отличаются на величину

$$\left| u(x,t) - u_\lambda(x,t) \right| = \left| \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\sqrt{\lambda} \right) \cdot Sin(\lambda x) \cdot sh(\lambda y) \right| ,$$

которая, при любом фиксированном $y > 0$ и достаточно большом λ имеет вид синусоиды со сколь угодно большой амплитудой, превосходящей любое наперед заданное число $M > 0$.

Следовательно, сколь угодно малому изменению данных задачи (1.1.8), (1.1.9) в $C^l[-\pi,\pi]$ или $W_2^l[-\pi,\pi]$ при любом конечном l соответствуют большие изменения решения. В силу неустойчивости задача (1.1.8),(1.1.9) является некорректной.

Некорректной также является задача Коши для гиперболического уравнения с начальными данными на характеристике, так как в этом случае нарушается единственность.

Широким классом некорректно поставленных задач являются обратные задачи для дифференциальных уравнений.

Обычно в основе получаемых дифференциальных уравнений, при исследовании какого-либо реального процесса или явления, лежат физические законы, которые позволяют сформулировать общий вид дифференциальных соотношений. Как правило, в них присутствует некоторое число произвольных функций, определяющих свойства физической среды. Если свойства среды известны, то дифференциальное уравнение в сочетании с краевыми и начальными условиями позволяет предсказать развитие физического явления в пространственно-временной области. Это классическая задача для дифференциальных уравнений. В теории обратных задач подобные задачи называются «прямыми».

При исследовании прикладных задач типична ситуация, когда интересующие характеристики объекта недоступны или труднодоступны для непосредственного наблюдения (например, глубинные свойства Земли и Мирового океана, астрофизические явления, проблема неразрушающего контроля качества изделий и конструкций, выявление дефектов внутри работающего объекта, медицинские исследования, направленные на выявление патологий внутренних органов человека, и многие другие исследования). Проведение самого эксперимента может быть невозможно, потому что он либо запрещен, либо слишком опасен, либо исследуемый объект существует в единственном экземпляре. Наконец, эксперимент может быть связан с очень большими финансовыми затратами. В этом случае собирается некоторая косвенная информация об исследуемом объекте. Эта информация определяется природой исследуемого объекта и используемым при этом экспериментальным комплексом. Так как основные законы природы выражаются, как правило, на языке дифференциальных уравнений, то исходная задача сводится к задаче определения коэффициентов дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных), правой части, начальных условий по некоторым известным функционалам их решения. Такие задачи, в отличие от обычных задач для дифференциальных уравнений, когда уравнение задано, а требуется отыскать его решение (прямые задачи), получили название обратных задач для дифференциальных уравнений – обратных в причинно-следственном отношении (восстановление неизвестных причин известных следствий). При этом «причины» конкретизируются в виде неизвестных коэффициентов, правой части, начальных условий. В качестве «следствий» выступают функционалы от решения дифференциального уравнения.

Теории и практике ОНЗ посвящены работы многих казахстанских и российских ученых [10-12, 14-16, 32-86].

Пример 1.1.3. Широким классом некорректно поставленных задач являются обратные задачи определения количественных характеристик явления по результатам измерений их косвенных проявлений.

Пусть изучаемый объект (явление) характеризуется элементом z_T (век-

тором функцией), принадлежащим множеству F. Часто z_T недоступен для прямого изучения и исследуется некоторое его проявление $Az_T = u_T$ ($u_T \in AF$, где AF – образ множества F при отображении, осуществляемом оператором A). Очевидно, что уравнение

$$Az = u \tag{1.1.10}$$

имеет решение на F только для таких элементов u, которые принадлежат множеству AF. Элемент u_T обычно получается путем измерений и поэтому известен нам приближенно. Пусть u_δ – это приближенное значение. В этих случаях речь может идти лишь о нахождении приближенного (к z_T) решения уравнения

$$Az = u_\delta \tag{1.1.11}$$

При этом u_δ, вообще говоря, не принадлежит множеству AF. Оператор A во многих случаях таков, что обратный ему оператор A^{-1} не является непрерывным. В этих случаях нельзя в качестве приближенного решения брать точное решение уравнения (1.1.10) с приближенной правой частью, т.е. нельзя в качестве приближенного решения брать элемент $z = A^{-1}u_\delta$, так как:

- такого решения может не существовать на множестве F, поскольку u_δ может не принадлежать множеству AF (не выполняется требование а) корректности);

- такое решение, если даже оно существует, не будет обладать свойством устойчивости, поскольку обратный оператор A^{-1} не является непрерывным (в то время как условие устойчивости решения задачи (1.1.10) обычно является следствием ее физической детерминированности, и поэтому приближенное решение должно обладать этим свойством). Таким образом, не выполняется требование в) корректности. Следовательно, задача (1.1.10) является некорректно поставленной.

Отсутствие устойчивости во многих случаях затрудняет физическую интерпретацию результатов измерений. Наличие этого свойства необходимо также для использования численных методов решения по приближенным исходным данным.

Таким образом, для обратных задач возникает принципиальной важности вопрос: что надо понимать под «приближенным решением» таких задач? Если дан ответ на этот вопрос, то возникает задача нахождения таких алгоритмов построения приближенных решений этих задач, которые обладают свойством устойчивости к малым изменениям исходных данных.

Ж. Адамар высказал мнение, что задачи, решения которых не удовлетворяют условиям непрерывности, не имеют физического смысла. Оказалось, что мнение Ж. Адамара оказалось ошибочным. Некорректные в классическом смысле задачи встречались при математическом описании физических явлений уже давно. При обсуждениях, связанных с некорректными задачами, с представителями естественных наук математики неоднократно утверждали, что рассмотрение некорректных задач лишено смысла, ссылаясь на мнение Ж. Адамара. В 30-40-х годах прошлого столетия геофизики обнаружили связь между задачей, эквивалентной задаче Коши для уравнения Лапласа и некоторыми вопросами интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Специалисты-математики уходили от обсуждения этих задач, а попытки проведения расчетов без теоретической основы были неэффективными.

Для задач, не являющихся корректными в классическом смысле, А.Н. Тихонов в 1943 г. предложил [29] новое понятие корректности, которое является физически оправданным для многих прикладных задач. Для подхода А.Н. Тихонова к вопросу корректности характерно, что рассматривается некоторое множество $m \subset U$, существенно более узкое, чем все пространство U.

Чаще всего это некоторое компактное множество. На практике, как правило, об искомом решение имеется несколько больше информации, чем это отражено в уравнении (1.1.1). Так, часто, если решение ищется, скажем в $C[0,1]$, то из физических соображений известно, что $\| u \|_{C^1[0,1]} \le C$, а это множество есть компакт в $C[0,1]$, и т.п.

Пусть образ множества m при отображении с помощью оператора A в пространстве F есть множество R, т.е. $Am = R$.

В первоначальной постановке задач А.Н. Тихонова предполагаются выполненными следующие условия:

а) априори известно, что решение уравнения (1.1.1) существует и принадлежит некоторому компакту m;

б) решение в m единственно;

в) при варьировании f мы не выходим за пределы.

Выполнение этих условий обеспечивает непрерывную зависимость u от f.

Но этот подход к решению некорректных задач оказался не очень удобным, так как при численном решении вместо точной правой части f_T нам известно лишь его приближение f_δ, которое может не только не принадлежать R, но даже выйти из $R(A)$.

Следующий шаг в постановке и решении некорректных задач был сделан в 1956 г. М.М. Лаврентьевым [60, с.819], который сформулировал новое определение корректности математической задачи, основанное на использовании дополнительной априорной информации о свойствах решения. Он предложил принципиально новый подход к понятию решения математических задач с неточными исходными данными, позволяющий существенно расширить класс математических постановок и моделей, для которых существует разумная интерпретация результатов. Это привело к изучению нового класса задач, которые впоследствии были названы М.М. Лаврентьевым условно-корректными. Высказанные им идеи явились фундаментом построения эффективных численных методов решения ряда прикладных некорректных в классическом смысле задач.

Приведем определение корректной по М.М. Лаврентьеву задачи. Задача (1.1.1) называется условно-корректной (или корректной по А.Н.Тихонову), если выполнены следующие условия:

1) априори известно, что решение задачи существует и принадлежит некоторому заданному множеству m функционального пространства U;

2) решение единственно на множестве m;

3) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $f, \overline{f} \in R = Am$ и таких, что $\left\| f - \overline{f} \right\|_F < \delta$ выполнено неравенство $\left\| u - \overline{u} \right\|_U < \varepsilon$.

Множество m называется множеством корректности задачи.Отметим особенности этого определения, отличающего его от классического. При классическом определении корректности предполагается, что данные задачи f принадлежат некоторому метрическому пространству F. Первое из требований корректности при этом требует доказательства, что для любого $f \in F$ решение уравнения (1.1.1) существует и принадлежит U. Существующее требование корректности, по А.Н. Тихонову, постулирует принадлежность решения уравнения (1.1.1) заданному множеству m. Какими свойствами для этого должно обладать множество $R = Am$, не обсуждается. Это связано с тем, что для многих некорректных задач условия принадлежности $f \in Am$ практически не проверяемы.

Требование единственности решения задачи на множестве m совпадает с классическим требованием единственности решения задачи в пространстве решений U.

Перейдем к третьему требованию. При классическом понятии корректности решение задачи существует при любом $f \in F$ и принадлежит пространству U. Поэтому естественно требовать, чтобы малому изменению элемента f по норме пространства F соответствовало малое изменение решения по норме пространства U. Корректность задачи, по А.Н. Тихонову, совсем не требует знания множества данных, но постулирует принадлежность решения к некоторому множеству m. При этом малое изменение данных задачи в норме F может привести к тому, что решение задачи либо совсем не существует, либо существует, но не принадлежит m. В связи с этим разумно модифицировать требование непрерывной зависимости решения от данных задачи, потребовав непрерывную зависимость для таких вариаций f, которые не выводят решение из множества m. Это отражено в третьем требовании корректности.

В связи с определением условной корректности заметим также, что в нем модифицированы два из трех условий корректности. Конечно, если удастся для неустойчивой задачи описать конструктивно множество данных, т.е. множество $R = Am$, тогда не имеет смысла отказываться от первого из требований корректности в его классическом варианте.

Многие задачи, являющиеся некорректными в классическом смысле, являются условно-корректными. В частности, приведенная выше задача (1.1.8), (1.1.9) является условно-корректной [60, с.829] на множестве функций $u(x,y)$, $x \in\in \left[-\pi,\pi\right], y \in [0,1]$, принадлежащих при каждом y пространству $L_2[-\pi,\pi]$ и удовлетворяющих дополнительному условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} u^2(x,1)\,dx \le M^2,$$

где M – заданная постоянная.

Для случая, когда оператор A является непрерывным, а m – компактное множество, из общих теорем функционального анализа следует, что выполнение первого и второго условий корректности влечет за собой выполнение третьего условия. Именно это обстоятельство и послужило основой определения условной корректности задачи. Задача, которая является неустойчивой на всем пространстве F, может оказаться устойчивой на множестве $R = Am$. Корректный вид оценки устойчивости при этом в сильной мере зависит от множества m. При новом определении корректности на передний план выдвигается проблема однозначности решения задачи, т.е. установление теоремы единственности.

Поясним, почему же понятие корректности, по А.Н. Тихонову, оказывается довольно естественным при рассмотрении многих задач и особенно обратных задач для дифференциальных уравнений. Рассмотрим, например, обратную задачу о колебаниях струны. В этом случае, когда плотность струны меняется от точки к точке, процесс малых колебаний струны описывается уравнением (1.1.3), в котором $a = a(x)$. Пусть мы рассматриваем задачу определения функции $a(x)$ по некоторым известным функционалам от решения прямой задачи (1.1.3), (1.1.4). В качестве таких функционалов здесь естественно рассматривать смещения отдельных точек струны в различные моменты времени. При этом физическая постановка задачи подсказывает, что решение следует искать в классе функций, положительных, ограниченных сверху и снизу некоторыми константами, которые можно указать, зная возможный набор материалов, использованных при конструировании струны. Возможно, что известны и другие свойства струны, например, что плотность ее меняется непрерывно или кусочно-непрерывно. В результате мы можем заранее указать множество m, которому должна принадлежать функция $a(x)$.

Если теперь данные задачи взяты из конкретного физического эксперимента со струной, у которой $a(x) \in m$, то у нас не может быть сомнений в том, что существует реальная $a(x)$, отвечающая этим измерениям. Вопрос заключается только в том, как ее найти, и достаточно ли этой информации, чтобы определить ее однозначно. Здесь, однако, мы должны несколько оговориться. Дело в том, что данные мы снимаем с определенной погрешностью δ и, следовательно, вместо элемента f получаем $\overline{f}$, причем $\left\| f - \overline{f} \right\| < \delta$. Элемент $\overline{f}$, вообще говоря, не будет принадлежать множеству Am. Поэтому, возвращаясь к физическому эксперименту, следовало бы сказать так : существует функция $a(x)$, такая, что рассчитанные для нее теоретические данные f будут отличаться от измеренных $\overline{f}$ не более чем на δ.

Пусть данные физического эксперимента позволяют однозначно найти $a(x)$ из указанного класса ($a(x) \in m$) и, кроме того, есть непрерывная зависимость решения задачи от данных на множестве $R = Am$. Рассмотрим в пространстве F шар $S\left(\overline{f}, \delta\right)$ радиусом δ с центром в точке $\overline{f}$. Нам известно, что в этом шаре есть по крайней мере один элемент $f \in R$ и, следовательно, существует его прообраз $a(x) \in m$. Если же в шаре $S\left(\overline{f}, \delta\right)$ есть еще и другие элементы из R, то все они удалены один от другого не далее, чем на 2δ. Поэтому при малом δ (т.е. высокой точности эксперимента) в силу непрерывной зависимости $a(x)$ от $f \in R$ их прообразы различаются также мало. Это означает, что какой бы из них мы не взяли, функция $a(x)$ близка к истинной. Ситуация, аналогичная рассматриваемой, характерна для многих задач геофизики.

В начале 60-х годов А.Н. Тихоновым [29, 44] был предложен принципиально новый подход к решению некорректных задач, который основывается на использовании лишь точности задания исходных данных. Этот подход послужил толчком для бурного развития теории некорректных задач и его приложений в различных разделах естествознания и техники.

Необходимость исследования некорректных задач связана с одной из основных проблем прикладной математики – обеспечения надежных результатов при учете неизбежных погрешностей в задании коэффициентов и параметров математической модели, по которой проводятся расчеты.

Действительно, коэффициенты математической модели, коэффициенты уравнений или системы уравнений, по которой производятся расчеты, получены, как правило, на основе измерений и поэтому имеют ограниченную точность. Кроме того, параметры реального процесса или технического объекта, который мы рассчитываем, не остаются идеально постоянными, они испытывают малые неконтролируемые изменения, вариации, точная величина которых обычно неизвестна.

Приведем несколько примеров.

Рассмотрим систему двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \qquad (1.1.12)$$

Каждое уравнение является уравнением прямой на плоскости (x, y). Решение системы (1.2.12) то есть значения x и y, обращающие уравнения в тождества, являются координатами точки пересечения этих прямых.

Пример 1.1.4. Так для системы

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \qquad (1.1.13)$$

Система (1.1.13) имеет решение $x = 1, y = 1$.Исследуем влияние вариации коэффициента при x в первом из уравнений (1.1.13) на погрешность решения.

Пример 1.1.5. Система уравнений

$$\begin{cases} (1+\varepsilon)x + 2y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

будет иметь решение

$$x = \frac{3}{3-\varepsilon},\ y = \frac{3-3\varepsilon}{3-\varepsilon}.$$

Если $|\,\varepsilon\,| \le 0{,}01$, то

$$0{,}996 \le x \le 1{,}0034,\ 0{,}986 \le y \le 1{,}0034 \qquad (1.1.14)$$

Мы убедились, что в данном случае малые погрешности в коэффициенте привели к малым погрешностям в решении. Однако существуют системы, в которых относительная погрешность решения существенно больше относительной погрешности коэффициентов. Такие системы называют плохо обусловленными системами.

Пример 1.1.6. Для системы

$$\begin{cases} 1{,}1x + y = 1{,}1 \\ (1+\varepsilon)x + y = 1 \end{cases} \tag{1.1.15}$$

ее определитель равен $0{,}1-\varepsilon$.

Система (1.1.15) имеет решение

$$x = \frac{1}{10-\varepsilon},\ y = -\frac{11\varepsilon}{1-10\varepsilon}.$$

Если $|\varepsilon| \le 0{,}001$, то $0{,}99 \le x \le 1{,}01$.

Если $|\varepsilon| \le 0{,}01$, то $0{,}909 \le x \le 1{,}11$.

Если $|\varepsilon| \le 0{,}1$, то $0{,}5 \le x \le \infty$.

В примере 1.1.6 погрешность решений x и y больше погрешности коэффициентов. Кроме того, она быстро возрастает с ростом ε и если $|\varepsilon| \le 0{,}1$, то погрешность уже может быть сколь угодно большой.

В случае с системой (1.1.12) все достаточно очевидно: погрешности решений велики, тогда, когда мал определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1.16}$$

Малость определителя (1.1.16) говорит о том, что прямые пересекаются друг с другом под очень малым углом и поэтому даже небольшая вариация коэффициента, изменяющая этот угол, приводит к большому изменению координат точки пересечения.

Рассмотрим предельный случай, когда определитель (1.1.16) при номинальных значениях коэффициентов равен нулю. В этом случае уже сколь угодно малые вариации коэффициентов могут привести к большим и даже к коренным изменениям решений.

Пример 1.1.7. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x + y = c \\ x + y = 1 \end{cases} \tag{1.1.17}$$

для которой ее определитель равен нулю.

Если $c \ne 1$, то решений не существует (прямые параллельны). Если $c = 1$, то решений много (прямые совпадают и любая пара чисел $x = 1 - y$ является решением.

Пример 1.1.8. Рассмотрим теперь систему

$$\begin{cases}(1+\varepsilon)x+y=c\\ x+y=1\end{cases} \tag{1.1.18}$$

Имеем

$$x=\frac{c-1}{\varepsilon}, y=1-\frac{c-1}{\varepsilon} \tag{1.1.19}$$

Если $c\neq1$, то теперь для любого ε решение существует, но оно целиком зависит от неизвестной нам погрешности ε. Практического смысла это решение не имеет, хотя оно существует для любого $\varepsilon\neq0$. Если же $c=1$, то в этом случае, также вычитая второе из уравнений (1.1.17) из первого, получим $\varepsilon\cdot x=0$, откуда вытекает решение: $x=0$, $y=1$, справедливое для всех ε, кроме $\varepsilon=0$, которому соответствуют бесконечное множество решений.

Поэтому решения системы (1.1.12) при определителе (1.1.16) равном нулю, сами по себе практического смысла не имеют.

Приведем примеры обратных и некорректных задач (ОНЗ), использованные при математической подготовке студентов педагогических вузов.

Пример 1.1.9. В физике при исследовании различных явлений и взаимодействий часто приходится решать обратную задачу механики: зная, как движется тело, определять действующие на него неизвестные силы. Именно путем решения обратной задачи механики были установлены многие фундаментальные законы природы, открыты действующие в природе силы. Так один из методов вывода закона Гука основан на решении обратной задачи механики. Обратную задачу механики решал Э. Резерфорд в своем классическом опыте по рассеиванию α-частиц. Наиболее ярким примером решения обратной задачи механики является открытие закона всемирного тяготения: $F=\gamma\frac{mM}{R^2}$, γ – гравитационная постоянная, M и m – массы двух тел, R – расстояние между ними, F – сила взаимного гравитационного притяжения между ними.

Задачи исследования операций также делятся на две категории: прямые и обратные. *Прямые задачи* отвечают на вопрос: что будет, если в заданных условиях мы примем какое-то решение $x\in X$? В частности, чему будет равен, при данном решении x, выбранный показатель эффективности W (или же ряд таких показателей)?

Для решения такой задачи строится математическая модель, позволяющая выразить один или несколько показателей эффективности через заданные условия и элементы решения.

Обратные задачи отвечают на вопрос: как выбрать решение x для того, чтобы показатель эффективности W обратился в максимум (минимум)?

Если число возможных вариантов решения, образующих множество X, невелико, то можно попросту вычислить величину W для каждого из них, сравнить между собой полученные значения и непосредственно указать один или несколько оптимальных вариантов, для которых W достигает максимума (минимума).

Такой способ нахождения оптимального решения называется «простым перебором». Однако, когда число возможных вариантов решения, образующих множество X, велико, поиск среди них оптимального «вслепую», простым перебором, затруднителен, а зачастую практически невозможен. В этих случаях применяются методы «направленного перебора», обладающие той общей особенностью, что оптимальное решение находится рядом последовательных «попыток» или «приближений», из которых каждое последующее приближает нас к искомому оптимальному.

Сформулируем обратную задачу исследования операций в самой общей форме. Пусть имеется некоторая операция $\Re$, на успех которой мы можем в какой-то мере влиять, выбирая тем или другим способом решение x (напомним, что x – не число, а целая группа параметров). Пусть эффективность операции характеризуется одним показателем $W \to \max$ ($W \to \min$).

Возьмем самый простой, так называемый «детерминированный»случай, когда все условия операции полностью известны заранее, т.е. не содержат неопределенности. Тогда все факторы, от которых зависит успех операции,делятся на две группы:

– заданные, заранее известные факторы (условия выполнения операции), которые мы для краткости обозначим одной буквой α;

– зависящие от нас элементы решения, образующие в своей совокупности решение x.

Заметим, что первая группа факторов содержит, в частности, и ограничения, налагаемые на решение, т.е. определяет область возможных решений X.

Показатель эффективности W зависит от обеих групп факторов. Это мы запишем в виде формулы:

$$W = W(\alpha, x) \qquad (1.1.20)$$

При рассмотрении формулы (1.1.20) не надо забывать, что как x, так и α в общем случае – не числа, а совокупность чисел (векторы), функции и т.д. В числе заданных условий α обычно присутствуют ограничения, налагаемые на элементы решения, имеющие вид равенств или неравенств.

Будем считать, что вид зависимости (1.1.20) нам известен, т.е. прямая задача решена. Тогда обратная задача формулируется следующим образом.

Обратная задача. При заданном комплексе условий α найти решение $x = x^*$, которое обращает показатель эффективности W в максимум (минимум).

Этот показатель мы обозначим:

$$W^* = \max_{x \in X} \{W(\alpha, x)\} \qquad (W^* = \min_{x \in X} \{W(\alpha, x)\}) \qquad (1.1.21)$$

Эта задача принадлежит к классу вариационных задач,хорошо разработанных в математике. Самые простые из таких задач (задачи на максимум и минимум) знакомы многим. Чтобы найти максимум или минимум (экстремум) функции многих аргументов, надо продифференцировать ее по всем аргументам (в данном случае – элементам решения), приравнять производную нулю и решить полученную систему уравнений.

Казалось бы, чего проще? Но в исследовании операций этот классический метод имеет весьма ограниченное применение. Во-первых, когда аргументов много, задача решения системы уравнений зачастую оказывается не проще, а сложнее, чем непосредственный поиск экстремума. Во-вторых, когда на элементы решения наложены ограничения, экстремум часто достигается в точке, где производные равны нулю (такой точки может вообще не быть) где-то на границе области X. Возникают все специфические трудности так называемой «многомерной вариационной задачи при ограничениях», иной раз непосильной по своей сложности при ее реализации компьютерными средствами.

Кроме того, в некоторых задачах функция W вообще не имеет производных (например, задана только для целочисленных значений аргументов). Все это делает задачу поиска экстремума далеко не такой простой, как она кажется с первого взгляда.

Метод поиска экстремума и связанного с ним оптимального решения x^* должен всегда выбираться исходя из особенностей функции Wи вида ограничений, накладываемых на решение. Например, если функция Wлинейно зависит от элементов решения $x_1, x_2, ...,$ имеют вид линейных равенств или неравенств, возникает ставшая классической задача линейного программирования, которая решается сравнительно простыми, стандартными методами.

Если функция W выпукла, применяются специальные методы выпуклого программирования. Для оптимизации управления многоэтапными операциями применяется метод динамического программирования. Наконец, существует целый набор численных методов отыскания экстремумов, специально приспособленных для реализации компьютерными средствами; некоторые из них включают элемент «случайного поиска», который для многомерных задач нередко оказывается эффективнее упорядоченного перебора.

В данном параграфе в качестве примера рассмотрим задачу динамического программирования.

Пример 1.1.10.Сконструировать путь, соединяющий два пункта – A и B(рисунок 1), из которых второй лежит к северо-востоку от первого. Для простоты допустим, что конструкция пути состоит из ряда шагов, и на каждом шаге мы можем двигаться либо строго на север, либо строго на восток; любой путь из A в B представляет собой ступенчатую ломаную линию, отрезки которой параллельны одной из координатных осей. Затраты на сооружение каждого из таких отрезков известны. Требуется проложить такой путь из A в B, при котором суммарные затраты минимальны.

Как решить задачу? Можно поступить одним из двух способов: либо перебрать все возможные варианты пути и выбрать тот, на котором затраты минимальны (при большом числе отрезков это очень трудно, так как число вариантов при количестве клеток таблицы, скажем n на m равно $k = \frac{(m+n)!}{n!\ m!}$); либо разделить процесс перехода из A в B на отдельные шаги (один шаг – один отрезок) и оптимизировать управление по шагам.

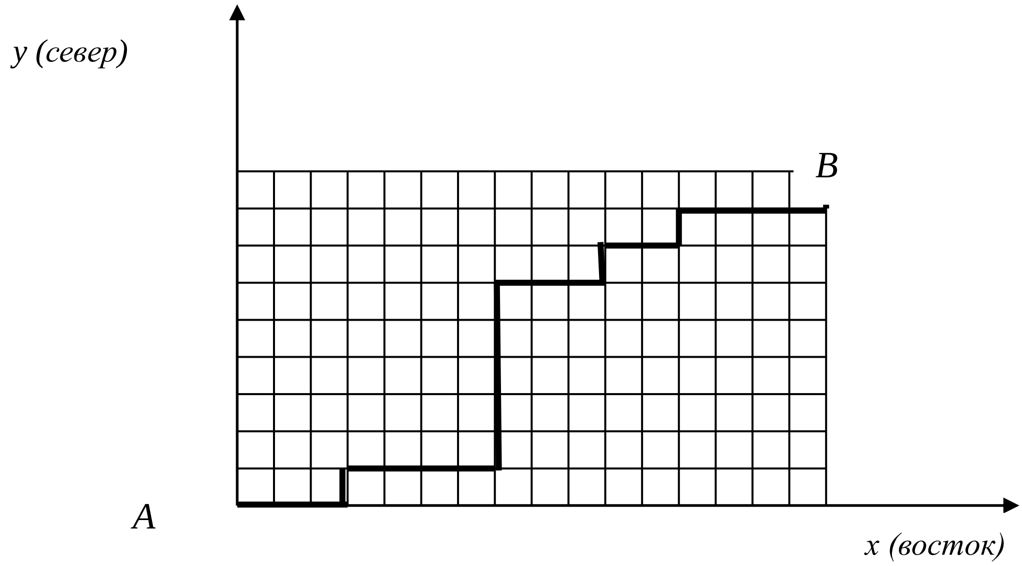

Рисунок1 - Путь, соединяющий два пункта – A и B

Оказывается, второй способ несравненно удобнее! Тут, как и везде в исследовании операций, сказываются преимущества целенаправленного, организованного поиска решения перед непосредственным перебором.

К некорректным задачам относится очень широкий круг задач на максимум и минимум (экстремальные задачи).

Пример 1.1.11. Какова минимальная длина изгороди, необходимая для плотного, без щелей, огораживания участка земли площадью s?

На первый взгляд задача совсем проста: известно, что минимум длины изгороди достигается в том случае, если огораживаемый участок имеет форму круга с периметром $p = 2\pi R$ и площадью $s = \pi R^2$, R – радиус круга. Исключая R, получим $p_{\min} = \sqrt{4\pi} \cdot \sqrt{s}$. Однако площадь sне может быть измерена идеально точно. Если истинная площадь больше номинальной s_n хотя бы на малую величину Δs, то изгородь длиной $p_{\min} = \sqrt{4\pi} \cdot \sqrt{s_n}$ не удастся замкнуть, задача огораживания решена не будет. Мы убеждаемся, что рассматриваемая задача, как и, впрочем, любая задача об элементе, доставляющем минимум – является задачей некорректной. При сколь угодно малой погрешности в условии решение может исчезнуть.

На этом простом примере удобно разъяснить общий подход к решению некорректных задач: задачу некорректную, неимеющую, поэтому практического смысла, надо заменить на близкую к ней задачу корректную.

В данном случае корректная задача такова: если площадь земельного участка s_n известна с погрешностью, не превышающей Δs, то какой запас длины изгороди Δp следует прибавить к минимальной длине $p_{\min}$ для того, чтобы задача огораживания была всегда выполнима?

Из условия

$$p_{\min} + \Delta p = \sqrt{4\pi} \cdot \sqrt{s_n + \Delta s}$$

сразу находим

$$\Delta p = \sqrt{4\pi} \cdot \left(\sqrt{s_n + \Delta s} - \sqrt{s_n} \right)$$

Поскольку погрешность Δs может быть различной, равной $\Delta_i s$, то полученная формула дает нам для каждого $\Delta_i s$ последовательность корректных задач, имеющих смысл. В пределе, при $\Delta s \to 0$ получаем предельное, уже не имеющее практического смысла, решение исходной некорректной задачи.

Рассмотренный пример демонстрирует простейший случай, называемаярегуляризацией некорректной задачи: исходную некорректную задачу, не имеющую практического смысла, мы заменяем на последовательность корректных задач с некоторым параметром, предельное значение которого соответствует исходной некорректной задаче.

К некорректным задачам относятся задачи на вычисление корней полиномов, если эти корни кратные, а физический смысл имеют, лишь вещественные значения.

Пример 1.1.12.Рассмотрим полином второй степени

$$x^2 + 2x + 1 \tag{1.1.22}$$

Этот полином имеет двукратный корень

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1$$

Однако если коэффициент при последнем члене равен не точно единице, а $1+\varepsilon$, что всегда возможно, поскольку все коэффициенты известны лишь с ограниченной точностью, то вещественное решение при сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ сразу исчезает, в этом случае

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4(1+\varepsilon)}}{2} = -1 \pm \sqrt{-\varepsilon}$$

Если нас интересуют только вещественные решения, то уже при сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ решение исчезает. *Задача вычисления вещественных кратных корней некорректна.*

Пример Уилкинсона (пример неустойчивой задачи). Рассматривается многочлен: $P(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-20) = x^{20} - 210x^{19} + \ldots$. Очевидно, что корнями этого многочлена являются значения: $x_1 = 1$, $x_2 = 2, \ldots, x_{20} = 20$.

Предположим, что один из коэффициентов многочлена вычислен с некоторой малой погрешностью. Например, коэффициент -210 при x^{19} увеличим на 2^{-23} (около 10^{-7}). В результате вычислений, даже с точностью до 11 значащих цифр, получим существенно другие значения корней. Приведем для наглядности эти значения, округлённые до трех знаков: x_1 =1.00, x_2 =2.00, x_3=3.00, x_4=4.00, x_5 =5.00, x_6 =6.00, x_7=7.00, x_8=8.01, x_9 =8.92, $x_{10,11}$=10.1$\pm$0.6441, $x_{12,13}$=11.8$\pm$1.65i, $x_{14,15}$ =14.0$\pm$2.52i, $x_{16,17}$ = 16.7$\pm$ 2.81i, $x_{18,19}$ = 19.5$\pm$1.94i, x_{20} = 20.8, i = $\sqrt{-1}$.

Покажем неустойчивость примера Уилкинсона. Пусть n- натуральное число и $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$ $(a_0 \neq 0)$– полином, или, по-другому многочлен, комплексного переменного с комплексными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots a_n$. В соответствии с основной теоремой алгебры $f(z)$ имеет ровно n корней: $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$.

До появления компьютерных средств нахождение всех величин ω_k $(k = \overline{1,n})$ считалось весьма трудоемкой задачей и для каждого конкретного случая опиралось, как правило, на выбор специальных приемов и методов, учитывающих свойства $f(z)$. В настоящее время разработаны весьма простые и эффективные алгоритмы нахождения корней полиномов, ориентированные на использование компьютерных средств. Один из таких алгоритмов – метод обруча.

Метод обруча. Метод нахождения корней ω_s $(s = 1,\ldots n)$ многочлена $f(z)$ использует то, что $f(z)$– аналитическая во всей комплексной плоскости функция и поэтому для нее справедлив принцип максимума модуля аналитической функции. Этот принцип формулируется так: модуль функции $f(z)$, аналитической в области G и на равной тождественно постоянной, не может иметь максимума ни в одной точке области. Из принципа максимума модуля вытекает принцип минимума модуля: модуль аналитической функции $f(z) \neq const$ не может иметь минимума ни в одной точке области, не являющейся нулем функции $f(z)$.

В самом деле, если $f(z_0) \neq 0$, то в силу непрерывности $f(z)$ неравенство $f(z) \neq 0$ имеет место в некоторой окрестности U точки z_0, принадлежащей G.

Следовательно, в U функция $\varphi(z)=1/f(z)$ является аналитической и не равной тождественно постоянной. Поэтому модуль $\varphi(z)$ не может иметь максимума в точке z_0. Но тогда и $|f(z)|$ не имеет минимума в точке z_0, если в этой точке модуль f(z) не равен 0.

Над комплексной плоскостью мысленно сконструируем поверхность $F(z)=|f(z)|$, называемую аналитическим ландшафтом $f(z)$. Далее, из совпадения нулей $f(z)$ и $F(z)$ и того, что $F(z)\geq 0$, вытекает, что нули $f(z)$ соответствуют наиболее глубоким «впадинам» аналитического ландшафта. Но из принципа минимума модуля функции следует, что в аналитическом ландшафте других впадин просто нет. Таким образом, двигаясь по ландшафту от любой его точки «вниз» к комплексной плоскости, будем приближаться к одному из корней $f(z)$. На подобном движении и основан предлагаемый в приложении В алгоритм метода «обруча» отыскания корней полиномов. Этот алгоритм следует отнести к разновидности многочисленных методов спуска. Варьирование направлений спуска дает возможность получать различные минимизирующие последовательности для каждого конкретного корня $f(z)$. Иногда это позволяет проводить уточняющий анализ полученных приближений к корням.

В теории приближенных вычислений рассматриваются два основных вида задач. *Прямая задача.* Указаны действия, которые следует выполнить над приближенными значениями чисел (например, произвести вычисления по данной формуле), и заданы предельные погрешности приближений. Требуется оценить погрешность полученного результата. *Обратная задача.* Указаны действия, которые нужно выполнить над приближенными значениями чисел (например, произвести вычисления по данной формуле), и задана погрешность, которая допустима для результата. Требуется установить, какими должны быть погрешности исходных приближений, чтобы полученный результат имел заданную степень точности.

Обратная задача решается неоднозначно и потому является математически неопределенной. Для ее решения необходимо наложить какие-либо условия на погрешности исходных данных, например, потребовав, чтобы предельные погрешности данных величин были равны между собой.

Пример 1.1.13. С какой точностью надо измерить стороны a и b прямоугольника, чтобы абсолютная погрешность при вычислении диагонали c не превышала 0,39 см, если $a\approx 5\,см,\ b\approx 12\,см$?

Решение. Диагональ данного прямоугольника вычисляется по формуле $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Используя известные формулы из теории численных методов, имеем

$$\delta(a^2) = 2\delta(a),\ \delta(b^2) = 2\delta(b),$$

$$\delta(\sqrt{a^2+b^2}) = \frac{1}{2}\delta(a^2+b^2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta(a^2+b^2)}{a^2+b^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta(a^2)+\Delta(b^2)}{a^2+b^2}$$

Учтя, что

$$\Delta(a^2) = \delta(a^2)\cdot a^2,\ \Delta(b^2) = \delta(b^2)\cdot b^2,$$

Имеем

$$\delta(c) = \frac{a^2\,\delta(a) + b^2\,\delta(b)}{a^2 + b^2} \qquad (1.1.23)$$

По условию задачи, $\Delta(c) = 0{,}39\,см$, а $\Delta(a)$ и $\Delta(b)$ неизвестны, имеем уравнение (1.1.23) с двумя неизвестными. И чтобы, наша задача стала математически определенной, потребуем, чтобы измерения сторон были выполнены с одинаковой степенью точности. Это значит, что $\delta(a) = \delta(b)$.

Тогда из (1.1.23) имеем $\delta(c) = \delta(a)$. Отсюда $\delta(a) = \delta(b) = \dfrac{\Delta(c)}{c}$.

Подставляя числовые значения, найдем

$$\delta(a) = \delta(b) = \frac{0{,}39}{\sqrt{5^2+12^2}} = 0{,}03$$

Можно взять

$$\Delta(a) = \delta(a)\cdot a = 0{,}03\cdot 5 = 0{,}15;\ \ \Delta(b) = \delta(b)\cdot b = 0{,}03\cdot 12 = 0{,}36.$$

Таким образом, для того, чтобы определить длину диагонали с погрешностью $\Delta_c = 0{,}36\,см$, достаточно измерить стороны так, чтобы предельная абсолютная погрешность при измерении сторон a и b не превышала 0,15 *см* и 0,36 *см* соответственно.

В вычислительной практике часто возникает задача о вычислении промежуточных значений некоторой таблично заданной функции $f(x):\ f(x_i) = y_i,\ i = \overline{0,n}$ (задача о восполнении функции). Такие таблицы могут быть результатом численного эксперимента или некоторого эксперимента в естествознании. С этой целью строят функцию $\varphi(x)$ совпадающую с данной функцией $f(x)$ в точках x_i, а при остальных значениях x из области определения должно выполнятся приближенное равенство: $f(x) \approx \varphi(x)$.

Такой способ восполнения значений функции называется *интерполированием.* При этом функция $\varphi(x)$ называется *интерполирующей* (часто в качестве такой функции берется многочлен $L_n(x)$, который называется интерполяционным многочленом), точки x_i $i = \overline{1,n}$ – *узлами интерполяции*. В каждом конкретном случае существует много вариантов построения функции $\varphi(x)$, поэтому к ней предъявляются требования, наиболее естественным из которых является простота вычисления этой функции.

Имеются различные формы записи интерполяционных многочленов. Широко распространенной формой записи является многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}. \tag{1.1.24}$$

К интерполированию нередко прибегают, когда аналитическое выражение для $f(x)$ известно, но его вычисление слишком трудоемко.

Постановка обратной задачи интерполирования. Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений: $f(x_i) = y,\ i = \overline{0,n}$. Обратное интерполирование заключается в нахождении по промежуточному, не содержащемуся в таблице, значению функции соответствующего значения аргумента; при обратном интерполировании находятся значения обратной функции $x = \varphi(y)$.

Так как табличные разности Δy данной функции не сохраняют постоянного значения (за исключением случая линейной зависимости), то для интерполирования обратной функции $x = \varphi(y)$ применяют, в частности, интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y - y_0)(y - y_1)\dots(y - y_{i-1})(y - y_{i+1})\dots(y - y_n)}{(y_i - y_0)(y_i - y_1)\dots(y_i - y_{i-1})(y_i - y_{i+1})\dots(y_i - y_n)}\ x_i$$

Пример 1.1.14. Функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений:

Таблица 1 – Табличное значение функции $y = f(x)$

x_i	*1,0*	*1,5*	*2,0*
y_i	*1,24*	*1,36*	*1,48*

Требуется по заданному значению функции y=1,4 найти соответствующее значение аргумента x.

Поменяв местами x и y, получим таблицу для обратной функции $y = \varphi(x)$:

Таблица 2 - Табличное значение функции $y = \varphi(x)$

x_i	*1,24*	*1,36*	*1,48*
y_i	*1,0*	*1,5*	*2,0*

Составим многочлен Лагранжа второго порядка:

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$

Подставив в выражение многочлена значения x_i и y_i из таблицы, получим $L_2(1{,}4) = 1{,}66$. Таким образом, $\varphi(1{,}4) \approx 1{,}66$.

Подобные задачи позволяют устанавливать причинно-следственные связи. Знакомство с математическими методами решения таких задач в процессе обучения математике, осмысление их прикладных аспектов, причинно-следственных связей способствуют формированию у студентов и магистрантов системы фундаментальных знаний в области математики.

1.2 Анализ работ по вопросам обучения решению обратных и некорректных задач в школе и вузе

Анализ подходов к обучению обратным и некорректным задачам в школе

Изучение проблемы обучения обратным и некорректным задачам в школе показало, что к обучению ОНЗ в школе посвящены работы некоторых российских авторов, таких как Т.А.Безусова, Н.Н.Яремко, А.А.Аксёнов. Среди них можно отметить диссертационную работу Т.А.Безусовой на тему: «Некорректные задачи как средство развития культуры математического и естественнонаучного мышления школьников» [112].

Предметом исследования данной диссертации является способы формирования и использования некорректных задач с целью развития культуры математического и естественнонаучного мышления школьников.

Научная новизна данного диссертационного исследования состоит в том, что раскрыто понятие культуры математического и естественнонаучного мышления с позиции системного подхода как интегративной характеристики развития ее составляющих в аспекте целостности, взаимодействия и взаимовлияния способов умственной деятельности; определены уровни развития культуры математического и естественнонаучного мышления, которые соотнесены с видами и функциями мыслительной деятельности учащихся и иерархически структурируют ее с учетом сложности умственных действий;

выделены функции математического, и естественнонаучного мышления (моделирующая, методологическая, интегрирующая, формирующая логические приемы мыслительной деятельности, эвристическая, прогностическая, корректирующая); для школьного образования конкретизировано понятие некорректной задачи; уточнены требования математической определенности данных; требования физической детерминированности считаются априори выполненными; определены показатели развития культуры математического и естественнонаучного мышления, которые соотнесены с типами некорректных задач и уровнем развития ее компонентов: образного (семантическая гибкость, образная адаптивная гибкость), логического (критичность), абстрактного (семантическая спонтанная гибкость), систематизирующего (целостность и системность, рефлексивность).

Таким образом, вопрос обучения обратным и некорректным задачам в школе все еще остается открытым вопросом.

Анализ подходов к обучению обратным и некорректным задачам в вузе

Изучение наличии иследовательских работ по обучению обратным и некорректным задачам в вузе позволило анализировать следующие работы:

1.Корнилов В.С. Теоретические и методические основы обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений в условиях гуманитаризации высшего математического образования: дисс. ... д-ра пед. наук. – М., 2008. – 481 с.[104]

Предметом исследования данной диссертации является методическая система обучения студентов вузов обратным задачам для дифференциальных уравнений в условиях гуманитаризации высшего математического образования. Научная новизна выполненного В.С. Корниловым исследования состоит в том, что выявлен гуманитарный потенциал обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений, выявлено влияние обучения обратным задачам на формирование личностных качеств студентов в рамках гуманитаризации математического образования, определены научные основы для проектирования гуманитарно-ориентированных учебных занятий по обратным задачам для дифференциальных уравнений, раскрыты дидактические принципы обучения обратным задачам с использованием компьютерных математических пакетов.

2. *Яремко Н.Н. Теоретико - методические основания критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений: дисс. ... д-ра пед. наук. - Орел, 2016. - 399 с.* [113]

Целью исследования данной диссертации является разработка теоретических оснований и создание методики критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений, а также обоснование ее эффективности. В связи с этим в первой главе своей диссертации Н.Н.Яремко анализирует вопросы, связанные с определением корректной и некорректной задачи в математике, в естественнонаучных областях знаний, в теории и методике обучения математике, выявляет место, роль, функции, назначение некорректных задач в обучении математике. К тому же дает заключение, что определение Ж. Адамара корректной и некорректной математической задачи может быть приемлемым и в методике обучения математике.

Анализируя выше отмеченные диссертации, отметим, что первая диссертация рассматривает теорию и методику обучения лишь обратных задач для дифференциальных уравнений (теория и методика обучения других обратных задач и некорректных задач в диссертации не рассматриваются), а вторая работа посвящена созданию методики обучения математике на основе рассмотрения корректных и некорректных задач. Исходя из этого, можно отметить о недостаточности исследования в области обучения обратным и некорректным задачам в вузовской системе и необходимости разработки методики обучения решению обратных и некорректных задач для совершенствования математической подготовки студентов в педагогическом вузе.

Изучение состояния обеспеченности учебного процесса по обучению решению ОНЗ показало наличие учебных программ, УМК и пособий, изданные как в Казахстане, так и в Росии.

Итак:

1. *Рабочая программа дисциплины «Обратные и некорректные задачи и методы их решения»* для бакалавров направления подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» (автор: Увайсов С.У., г. Москва, Россия. -2015 г.) [114].

Цели дисциплины - формирование базовых знаний по методам решения некорректных задач и углубление знаний в области математического программирования, решения многопараметрических оптимизационных задач с ограничениями применительно к особенностям радиоэлектронных и телекоммуникационных устройств, а также развитие способностей анализа обратных задач на корректность. Объем дисциплины – 144 часов.

2. *Рабочая программа дисциплины «Обратные и некорректные задачи математической физики»* для магистрантов специальности «6М060100-Математика» (составитель: Л.Н.Темирбекова – КазНПУ им. Абая, г. Алматы, Казахстан. – 2016 г.) [115].

Целью дисциплины является изучение раздела прикладной математики – некорректные и обратные задачи математической физики. Объем дисциплины – 135 часов (3 кредита).

3. Учебно-методический комплекс дисциплины «Численные методы решения обратных задач математической физики» для магистантов специальности 6М060100 – «Математика (автор: Ф.Х. Вильданова - г. Семей, Казахстан.- 2014 г.) [116].

Цель обучения – ознакомление магистрантов с численными методами решения обратных задач дифференциальных уравнений параболического, эллиптического, гиперболического типов. Объем дисциплины – 180 часов.

4. *Рабочая программа дисциплины «Обратные задачи»* для магистрантов специальности 6М070500 – «Математическое и компьютерное моделирование» (автор: С.Ж. Рахметуллина – Восточно-Казахстанский государственный

технический университет им. Д. Серикбаева. - г. Өскемен, Казахстан. - 2014 г.) [117].

Целью изучения дисциплины «Обратные задачи» является освоение основных идей обратных и некорректных задач; особенностей областей применения и методики их использования в качестве готового инструмента для практической работы; математической обработке и содержательной интерпретации данных при решении прикладных задач; построении алгоритмов и их реализации с использованием современных информационных технологий. Объем дисциплины – 135 часов (3 кредита).

5. *Рабочая программа «Введение в теорию обратных задач математической физики» для* магистрантов направления подготовки 09.04.01 – «Информатика и вычислительная техника» (автор: С.И. Кабанихин. – г. Новосибирск, Россия. - 2014 г.) [118].

Цель обучения – знакомство магистрантов с теорией обратных и некорректных задач математической физики: изучение понятия корректности задачи и прикладных постановок, приводящих к обратным задачам; изучение основных особенностей постановок обратных задач; изучение способов и наиболее распространенных алгоритмов их решения. Объем дисциплины – 144 часа.

6. *Спецкурс «Некорректно поставленные задачи»* для аспирантов кафедры математики физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (автор: А.Г. Ягола- г. Москва, Россия) [119]. Объем спецкурса – 3 зачетных единиц.

Анализ вышеотмеченных рабочих программ, учебно-методических комплексов дисциплин и специальных курсов по ОНЗ показал их соответствие содержанию материала современным достижениям теории и практики ОНЗ. Анализируя их содержания можно отметить то, что нет единого подхода к обучению ОНЗ, который охватывал бы все разделы ОНЗ.

В качестве подходов к обучению ОНЗ также можно отнести:

– участие бакалавров и магистрантов в научных семинарах, посвященных ОНЗ. Посещая подобные семинары, бакалавры и магистранты знакомятся с новыми достижениями в области теории и практики ОНЗ, дискутируют с участниками семинара, приобщаясь к данной научной области и приобретается опыт выступления перед аудиторией, общения не только со своими сверстниками, но и с маститыми учеными;

– написание бакалаврами и магистрантами рефератов по материалам научных статей, посвященных ОНЗ. В процессе обучения ОНЗ бакалаврам и магистрантам в качестве самостоятельной, индивидуальной работы, предлагается прочитать научную статью и написать по ней реферат. При работе над рефератом, бакалавры и магистранты приобретают опыт самостоятельной работы со специальной литературой по ОНЗ, привыкают к стилю изложения материала в научных публикациях, который намного сложнее, чем в учебно-методических материалах, адресованных студентам; знакомятся с вычислительным методом, который не встречается на спецкурсе.

Методическое обеспечение учебного процесса учебными пособиями выглядит следующим образом:

1. *Ватульян А.О., Беляк О.А., Сухов Д.Ю., Явруян О.В. Обратные и некорректные задачи: учебник для студентов вузов. – Ростов-на Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2011. – 232 с.* [50]

Учебник адресован студентам и аспирантам высших учебных заведений математических и инженерных специальностей. В учебнике излагаются наиболее часто встречающиеся в приложениях обратные и некорректные задачи с большим количеством примеров. В учебнике представлены основные понятия, определения, теоремы функционального анализа и теории обратных и некорректных задач, перечислены их основные свойства. Изложены методы регуляризации и численные схемы их реализации, способы преодоления некорректности. Исследованы модельные линейные и нелинейные обратные задачи. В конце каждого раздела предлагаются контрольные вопросы и проектные задания.

2. *Темирболат С.Е. Новая методика исследования (решения) некорректно поставленных краевых задач: Учебное пособие. – Алматы: Қазақ университеті, 2009г. - 62 с.* [15]

В основе методики лежат интегральные преобразования Фурье-Лапласа и неклассические решения вырожденной системы линейных алгебраических уравнений. Путем уравнений выясняются, какие задачи будут некорректными. Исследование завершается доказательством условной корректности выделенных некорректных задач, при этом удается получить явный вид «решения».

Пособие предназначено для студентов бакалавриата и магистратуры, специализирующихся по математической физике. Оно может быть использовано молодыми преподавателями, работающими в этой области.

3. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи: учебник для студентов вузов. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 458 с. [58]

Учебник рекомендован Научно-методическим советом по математике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по специальностям направлений подготовки: «Прикладная математика и информатика», «Прикладная математика», «Механика», «Прикладная механика».

В учебнике изложены методы исследования и решения обратных инекорректных задач линейной алгебры, интегральных и операторныхуравнений, интегральной геометрии, спектральных обратных задач иобратных задач рассеяния; рассмотрены линейные некорректные задачи икоэффициентные обратные задачи для гиперболических, параболических иэллиптических уравнений; дан обширный справочный материал.

4. Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Шишленин М.А. Методы решения некорректных задач линейной алгебры: учебное пособие / 2-е изд. – Алматы: КазНПУ им. Абая, 2011. – 131 с. [83]

Учебное пособие рекомендовано к изданию Республиканским учебно-методическим советом при Министерстве образования и науки Республики Казахстан по специальностям группы «Образование» при КазНПУ им. Абая.

Учебное пособие адресовано студентам, магистрантам и докторантам PhD физико-математических специальностей.

В учебном пособии рассматриваются свойства и методы решения некорректных задач линейной алгебры. Рассмотрены причины некорректности, неустойчивости, потери точности при решении некорректных задач линейной алгебры. Приведены примеры А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова, С.К. Годунова и других авторов.

5. Кабанихин С.И., Искаков К.Т., Бектемесов М.А., Шишленин М.А. Алгоритмы и численные методы решения обратных и некорректных задач: учебное пособие для студентов вузов. – Астана, 2011. – 328 с. [33]

Учебное пособие предназначено для специалистов, использующих численные методы решения обратных и некорректных задач, а также для докторантов PhD, соискателей, магистрантов и студентов старших курсов. Учебное пособие может быть использовано для составления спецкурсов по обратным и некорректным задачам для студентов старших курсов университетов и технических вузов.

В учебном пособии изложены численные методы решения обратных и некорректных задач, возникающих в сейсморазведке, электроразведке, магниторазведке, гравиразведке, электродинамике и акустике. Изложены алгоритмы решения обратной кинематической задачи сейсмики и их применение в геотомографии. Приведено описание алгоритмов решения обратных задач малоглубинной геофизики, подповерхностной георадиолокации. Приведены алгоритмы регуляризации, методы нахождения квазирешения, метод квазиобращения, методы регуляризации нахождения нормального решения, алгоритмы решения вырожденных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений, а также алгоритмы, основанные на сингулярном разложении компактных операторов и прямоугольных матриц. Учебник сформирован на основе принципов модульно-кредитной технологии обучения студентов вузов. Модуль состоит из физической постановки задач, построения численных методов решения прямых и обратных задач, анализа результатов численных расчетов и экспериментальных исследований. В каждом модуле во введении излагается состояние проблемы, анализ известных результатов, а в заключении приводятся списки использованных источников для самостоятельного углубленного изучения.

6. Корнилов В.С. Некоторые обратные задачи идентификации параметров математических моделей: учебное пособие для студентов вузов. – М.: МГПУ, 2005. – 359 с. [59]

Учебное пособие адресовано студентам, аспирантам и научным работникам, специализирующимся в области прикладной математики и математической физики.

Основным содержанием учебного пособия является изложение методов исследования обратных задач для некоторых одномерных и многомерных обратных задач для линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа, которыми описываются волновые процессы, инициированные импульсными источниками типа дельта-функции Дирака.

Проведенный анализ учебных пособий по ОНЗ позволяет сказать, что их содержание соответствует современным достижениям теории и практики ОНЗ. Авторы обращают внимание на физическую интерпретацию исследуемых физических процессов, межпредметные связи и прикладную направленность обучения ОНЗ.

Научно-образовательный потенциал обучения решению обратных и некорректных задач

Однозначного определения понятия «потенциал» в педагогической науке не сформировано. Данное понятие в последние годы часто используется многими методистами и исследователями в области педагогики за счет выявления различных аспектов. В толковом словаре Ожеговой-Шведовой [120], потенциал определяется как степень мощности в каком-нибудь отношении, совокупность каких-нибудь средств, возможностей, ресурсов необходимых длячего-нибудь.Опираясь на данную трактовку можно определитьобразовательный потенциал обратных и некорректных задач как совокупность их научных, информационных, методологических и развивающих ресурсов, в том числе скрытых и/или недостаточно используемых в современной теории и практике обучения математике, необходимых для получения значимых результатов математического образования студентов и магистрантов, определенных в контексте предъявляемых ему современных требований.

При построении методики обучения студентов педагогических вузов решению обратных и некорректных задач целесообразно учитывать научно-образовательный потенциал таких задач, который выявляется в реализации таких аспектов обучения, как:

- реализация историко-математической линии обучения;
- реализация междисциплинарных связей;
- расширение научного мировоззрения;
- реализация прикладной направленности обучения;
- развитие логического мышления;
- развитие алгоритмического мышления;
- развитие информационного мышления;
- реализация психологических аспектов обучения.

Рассмотрим их более подробно.

Историческая линия обучения решению обратных и некорректных задач. В процессе обучения студентов на формирование и развитие их личности и творческих способностей оказывают влияние не только полученные знания по различным математическим учебным дисциплинам, в том числе и ОНЗ, но и знания истории создания и развития тех научных теорий, на основе которых формируется содержание обучения ОНЗ; вклада теории и практики ОНЗ в развитие человеческой цивилизации. Осознание взаимосвязи в развитии теории и практики ОНЗ и развития человеческого общества позволяет магистрантам глубже осознать специфику теории и методологии ОНЗ, ее общественной и гуманитарной значимости. У них формируется правильное представление о методах и средствах приобретения человеческой цивилизацией знаний об окружающем мире, о развитии методов такого познания.

Историко-математическая линия обучения находит свое развитие в диссертационных исследованиях Р.М. Асланова [109], В.В. Беликова [18], В.С. Корнилова [104] и других авторов. По мнению авторов, история математикиявляется важной частью всеобщей истории и что без изучения истории математики на соответствующем для современного образования уровня у студентов не может быть сформировано целостное представление о развитии человеческого общества. Исторические сведения способствуют формированию мировоззрения студентов, активизируют учебно-познавательный процесс, являются средством развития их интереса к обучаемой учебной дисциплине.

Знание истории создания и развития теории ОНЗ позволяет студентам глубже осознать гносеологический процесс прикладной математики.В результате у студентов создается правильное представление о путях приобретения человечеством знаний об окружающем нас мире, о развитии методов этого познания.

В XVIII–XX веках была создана стройная теория дифференциальных уравнений, позволяющая качественно и количественно описывать основные физические закономерности окружающего нас мира, зарождение и развитие которых связано с расширением в XVIII в. круга приложений математического анализа к задачам естествознания, прежде всего небесной механики, гидродинамики, плоской и пространственной геометрии, технической практики. Основы этой науки были заложены трудами И.Ньютона, Г.В.Лейбница, Д.Риккати, Я.Германа, Л.Эйлера, семьи швейцарских ученых Бернулли, А.К.Клеро, Ж.Л.Даламбера, Ж.Л.Лагранжа, Г.Монжа, П.С.Лапласа, А.М.Лежандра, Ж.Б.Ж.Фурье, С.Д.Пуассона, О.Л.Коши, А.Пуанкаре и других ученых, многие из которых были не только математиками, но и механиками, физиками, астрономами.

Разработанные ими идеи и методы для исследования конкретных прикладных задач оказались применимыми к изучению широких классов дифференциальных уравнений, что и послужило в конце XIX века основой для развития общей теории дифференциальных уравнений.

Существенный вклад в современную теорию дифференциальных уравнений внесли В.И. Арнольд, Н.Н. Боголюбов, Н.П. Еругин, Т.Ш. Кальменов, С.В. Ковалевская, М.В. Келдыш, А.Н. Колмогоров, М.А. Лаврентьев, Н.Н. Лузин, А.М. Ляпунов, М.О. Отелбаев, И.Г. Петровский, Л.С. Понтрягин, Ш.С. Смагулов, С.Л. Соболев, В.А. Стеклов, В.В. Степанов, У.М.Султангазин, А.Н.Тихонов и другие ученые.

ОНЗ применяются во многих разделах мировой науки. Еще в XIX веке, в астрономии, астрофизике, теоретической физике, инженерных науках, геофизике был поставлен целый ряд математически сложных, но практически важных задач, которые можно назвать обратными задачами. А.И. Прилепко [53] выделяет из этого ряда четыре обратные задачи, которые сыграли важную роль в развитии научно-технического прогресса:

- теория фигур равновесия вращающейся жидкости, развитая А.М.Ляпуновым, является обратной задачей о нахождении неизвестной границы фигуры;
- обратные задачи геофизики об обнаружении полезных ископаемых с помощью гравиметрических данных (обратная задача теории потенциала), с помощью распространения и отражения волн (обратные задачи сейсморазведки, электроразведки и т.д.);
- в астрофизике, теоретической физике широко известна обратная спектральная задача о нахождении потенциала рассеяния по спектральным данным и т.д.;
- различные задачи теории управления в инженерных науках, их тоже можно отнести к обратным задачам, в том числе задачи оптимального управления. Эти проблемы привлекают пристальное внимание многих отечественных и зарубежных исследователей.

К ОНЗ относятся инженерные задачи, связанные с разработкой и созданием различных приборов с заранее заданными или планируемыми характеристиками; обработкой и оценкой экспериментальных данных.

Отметим некоторые исторические предпосылки возникновения важнейших классов ОНЗ.

1. В начале прошлого века в геофизике был поставлен вопрос: нельзя ли, располагая картиной движения фронтов сейсмических волн по поверхности Земли, порожденных землетрясениями, найти скорость распространения сейсмических волн внутри Земли? В 1905–1907 гг. эта обратная кинематическая задача была решена Г. Герглотцем и Е. Вихертом [71-75] для сферически-симметричной модели Земли в предположении, что скорость распространения возмущений монотонно растет с глубиной. Это позволило, основываясь на данных сейсмических наблюдений над землетрясениями, сделать первые выводы о глубинном строении Земли.

2. С потребностями геофизики, а именно, гравитационной и магнитной разведки, связано возникновение и другой обратной задачи – теории потенциала. Общая ее формулировка заключается в следующем: вне некоторой области, ограниченной поверхностью, задан потенциал (объемных масс, простого слоя или магнитный), порожденный телом с некоторой плотностью, лежащим внутри области. Требуется определить положение, форму и плотность тела. К такой постановке задачи приводят, например, задачи рудной геофизики об отыскании залежей полезных ископаемых по аномалиям силы тяжести. Первые теоремы единственности для обратной задачи Ньютоновского потенциала были получены П.С.Новиковым в 1938 году.

В дальнейшем исследованием обратных задач теории потенциала занимались Л.Н.Сретенский (1938 г.), И.М.Рапопорт (1940 г.), А.Н. Тихонов (1943 г.), М.М. Лаврентьев (1956 г.), А.И. Прилепко (1964 г.) и другие. В настоящее время теория обратной задачи потенциала существенно развита, причем разработаны и численные методы решения этих задач.

3. Некоторые вопросы квантовой механики привели к следующей задаче: дан спектр дифференциального оператора второго порядка, требуется определить этот оператор. Эта задача получила название обратной задачи Штурма-Лиувилля. Здесь первые результаты были получены В.А. Амбарцумяном в 1929 году и Г. Боргом в 1945 году. Интенсивно теория обратной задачи Штурма-Лиувилля начала развиваться в 50-х годах прошлого века. Фундаментальную роль в ее изучении сыграли работы Л.Д. Фадеева, В.А. Марченко, М.Г. Крейна, И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана.

4. Первая теорема единственности обратных задач для дифференциальных уравнений (для уравнения теплопроводности) была доказана А.Н. Тихоновым в 1935 г. Эта работа явилась основополагающей в исследованиях обратных задач для параболических уравнений, для обратных задач тепловых потенциалов, обратных задач теории управления в начальных условиях и др. Проблема устойчивости решения обратных задач также была впервые исследована А.Н. Тихоновым в 1943 г. для обратной задачи теории потенциала. Результаты этой работы послужили основой нового направления по исследованию некорректных в классическом смысле задач, получивших название условно-корректных задач (корректных по А.Н. Тихонову).

В области уравнений в частных производных первые результаты, связанные с обратными краевыми задачами, находящими приложения в аэродинамике, теории фильтрации и теории взрыва, были получены Д. Рябушинским в 1929 году, который, по мнению Н.Б. Ильинского, впервые сформулировал обратную краевую задачу как чисто математическую для гармонической функции. Вклад в развитие теории этих задач внесли Г.Г. Тумашев и М.Т. Нужин, И.С.Красновидова и В.С.Рогожин, Ф.Д.Гахов, в последующие годы – А.М. Елизаров, Н.Б. Ильинский, А.В. Поташев и другие. Первые теоремы единственности для обратной задачи спектрального анализа для уравнения Шредингера в классе кусочно-аналитических функций были получены Ю.М. Березанским в 1958 году; для обратных задач для волновых уравнений были получены А.С. Алексеевым в 1962 году, М.М. Лаврентьевым в 1964 году, М.М. Лаврентьевым и В.Г. Романовым в 1966 году, Ю.Е. Аниконовым в 1969 году и другими. Первые теоремы единственности обратных задач для уравнений параболического типа получены Б.М. Будаком и А.Д. Искендеровым в 1966 году, М.М. Лаврентьевым и К.Г. Резницкой в 1973 году и другими авторами.

5. Одной из важнейших в прикладном отношении задач является обратная задача электромагнитной разведки. Взаимодействие электромагнитного поля со средой описывается системой уравнений Максвелла, в которую входят в качестве коэффициентов диэлектрическая, магнитная проницаемости, а также

ее электропроводимость. Электромагнитная разведка заключается обычно в том, что измеряются электрические и магнитные поля на поверхности Земли, создаваемые с помощью специального источника электрических колебаний. По этим измерениям требуется найти перечисленные выше электромагнитные параметры. До 50-х годов прошлого века вся электроразведка базировалась на постоянном токе. Началу использования переменных электромагнитных полей положило появление в 1949 году работы А.Н. Тихонова. В дальнейшем на основе этого метода были получены важные результаты Д.Н. Четаевым в 1959 году, В.А. Филатовым в 1969 году, В.И. Дмитриевым в 1970 году, А.С. Барашковым в 1973 году, М.М. Лаврентьевым, М.Г. Ноппе, К.Г. Резницкой в 1975 году, В.Г. Романовым, С.И. Кабанихиным, Т.П. Пухначевой в 1982 г. и другими авторами.

Фундаментальные результаты в исследовании обратных задач для системы уравнений Максвелла, гиперболических систем первого порядка, многомерных обратных задач для гиперболических уравнений и уравнений теории упругости, а также численным методам их решения были получены В.Г. Романовым, Ю.Е. Аниконовым, С.И. Кабанихиным, В.Г. Яхно и другими авторами.

Реализация междисциплинарных связей при обучении решению обратных и некорректных задач. Общеизвестно, что в педагогических исследованиях большое внимание уделяется проблеме междисциплинарных связей, выражающих всевозможные объективно существующие связи между содержанием различных учебных дисциплин. Междисциплинарным связям уделяли внимание великие ученые прошлых столетий, среди которых А.Дистервег, Я.А. Коменский, Д. Локк, И.Г. Песталоцци, К.Д. Ушинский и другие ученые[110].

Я.А. Коменскому принадлежит утверждение о том, что все, что находится во взаимной связи, должно преподаваться в такой же связи и все должно вестись в неразрывной последовательности так, чтобы все сегодняшнее закрепляло вчерашнее и пролагало дорогу для завтрашнего. По мнению К.Д. Ушинского, предметы учебнойдисциплины представляют собой не беспорядочную группу знаний, а систему, в которой каждая дисциплина имеет свою логику, а все вместе составляют органически связное целое, смысл которого должен быть совершенно ясен педагогу.

В настоящее время выявлению значения междисциплинарных связей в повышении качества обучения и роли междисциплинарных связей в формировании содержания образования, классификации междисциплинарных связей, выявлению функций и типов междисциплинарных связей в процессе обучения, проблеме реализации междисциплинарных связей в обучении различным математическим дисциплинам посвящены исследования Казахстанских и Российских ученых [8-10, 13, 58, 90, 94, 97, 104, 109, 121-127]. Актуальность проблемы реализации междисциплинарных связей в процессе обучения в высших учебных учреждениях, обуславливается необходимостью высокой степени интеграции общественных, естественнонаучных и технических знаний для осуществления инновационных педагогических технологий.

Междисциплинарные связи в обучении ОНЗ демонстрируют комплексный подход к воспитанию и обучению, позволяют выявить главные элементы содержания такого обучения и взаимосвязи между учебными предметами; формируют конкретные знания студентов, раскрывают гносеологические проблемы; способствуют студентам пользоваться познавательными методами, имеющими общенаучный характер. С помощью междисциплинарных связей на высоком уровне решаются задачи обучения, развития и воспитания студентов, закладывается фундамент для комплексного видения, подхода и решения сложных проблем реальной действительности.

Рассмотрим постановку обратной задачи с подробной схемой исследования.

Обратная задача 1.2.1. На отрезке рассматривается краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + f(t)\,, \tag{1.2.1}$$

$$B\,x(0) + C\,x(T) = d \tag{1.2.2}$$

В (1.2.1), (1.2.2) $t \in [0,\, T]$, x, d, $f(t)$ – n-мерные векторы-столбцы, A, B и C – матрицы порядка $n \times n$, причем $A(t)$ и $f(t)$ – непрерывны на отрезке $[0,\, T]$.

От студентов требуется определить вектор-функцию $x(t)$, непрерывную на отрезке $[0,\, T]$, непрерывно-дифференцируемую на $(0,\, T)$, удовлетворяющую краевым условиям (1.2.2) и дифференциальному уравнению (1.2.1).

Введя обозначение $x(0) \equiv \lambda$ и осуществляя замену искомой функции $u(t) = x(t) - \lambda$, решение рассматриваемой краевой задачи магистранты сводят ее к обратной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = A(t)\,u + A(t)\,\lambda + f(t)\,, \qquad u(0) = 0\,, \tag{1.2.3}$$

$$(B + C)\lambda + C\,u(T) = d \tag{1.2.4}$$

т.е. к нахождению пары $\{\lambda,\, u(t)\}$, удовлетворяющей равенствам (1.2.3), (1.2.4).

Полученная обратная задача (1.2.3), (1.2.4) эквивалентна исходной задаче (1.2.1), (1.2.2) в том смысле, что если $\{\lambda,\, u(t)\}$ – решение задачи (1.2.3), (1.2.4), то $x(t) = \lambda + u(t)$ – является решением задачи (1.2.1), (1.2.2) и наоборот, если $x(t)$ – решение задачи (1.2.1.), (1.2.2), то пара $\{x(0),\, x(t) - x(0)\}$ является решением задачи (1.2.3), (1.2.4).

Алгоритм решения полученной обратной задачи студенты строят в соответствии с методикой, изложенной в работе. Прежде всего, путем интегрирования уравнения (1.2.3) от 0 до T, определяется

$$u(T)=\int_0^T A(t)u(t)\,dt+\lambda\int_0^T A(t)\;dt+\int_0^T f(t)\;dt.$$

Осуществляя его подстановку в краевые условия (1.2.4) и предполагая, что матрица $M=B+C\left[I+\int_0^T A(t)dt\right]$ имеет обратную ($\det M\neq 0$), студенты получают уравнение относительно λ:

$$\lambda=M^{-1}\cdot\left[d-C\int_0^T f(t)\;dt-C\int_0^T A(t)u(t)\;dt\right] \qquad (1.2.5)$$

Решение обратной задачи (1.2.3), (1.2.4) – пару $\{\lambda^*,\,u^*(t)\}$магистранты ищут по следующему алгоритму. За начальное приближение берется $\lambda^{(0)}=M^{-1}\cdot\left[d-C\int_0^T f(t)\;dt\right]$ и $u^{(0)}(t)$– являющееся решением задачи Коши (1.2.3) при $\lambda=\lambda^{(0)}$.

После подстановки $u^{(0)}(t)$ в правую часть уравнения (1.2.5), получается:

$$\lambda^{(1)}=M^{-1}\cdot\left[d-C\int_0^T f(t)\;dt-C\int_0^T A(t)u^{(0)}(t)\;dt\right],$$

а $u^{(1)}(t)$ находится как решение задачи Коши (1.2.3) при $\lambda=\lambda^{(1)}$.

Продолжая итерационный процесс, аналогично изложенному, по известному $\{\lambda^{(k-1)},\,u^{(k-1)}(t)\}$магистранты находят следующее приближение$\{\lambda^{(k)},\,u^{(k)}(t)\}$.

Достаточные условия сходимости итерационного процесса и однозначной разрешимости задачи (1.2.1), (1.2.2) магистрантамиустанавливаются путем доказательства следующей теоремы. Приведем ее формулировку и изложим основные фрагменты ее доказательства.

Теорема 1.2.1. Если выполнены условия:

1) для матрицы M существует обратная M^{-1} и $\|A(t)\|\leq\alpha(t)$;

2) $q=\|M^{-1}\|\cdot\|C\|\cdot[e^{\int_0^T\alpha(t)\,dt}-1-\int_0^T\alpha(t)\;dt]<1$,

то обратная задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.2.3), (1.2.4), а, следовательно, и эквивалентная ей двухточечная краевая задача (1.2.1), (1.2.2) имеет единственное решение и приведенный выше алгоритм сходится.

Доказательство. Так как

$$\lambda^{(k+1)} = M^{-1} \cdot \left[d - C\int_0^T f(t)\ dt - C\int_0^T A(t)u^{(k)}(t)\ dt \right],$$

$$\lambda^{(k)} = M^{-1} \cdot \left[d - C\int_0^T f(t)\ dt - C\int_0^T A(t)u^{(k-1)}(t)\ dt \right],$$

то

$$\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)} = M^{-1} \cdot C \int_0^T A(t)[u^{(k)}(t) - u^{(k-1)}(t)]\,dt$$

и справедлива оценка

$$\left\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right\| \le \left\|M^{-1}\right\| \cdot \|C\| \int_0^T \alpha(t)\left\|u^{(k)}(t) - u^{(k-1)}(t)\right\| dt. \qquad (1.2.6)$$

Найдем оценку разности $u^{(k)}(t) - u^{(k-1)}(t)$.
Так как

$$u^{(k)}(t) = \int_0^t A(\tau)u^{(k)}(\tau)\,d\tau + \lambda^{(k)}\int_0^t A(\tau)\ d\tau + \int_0^t f(\tau)\ d\tau,$$

$$u^{(k-1)}(t) = \int_0^t A(\tau)u^{(k-1)}(\tau)\,d\tau + \lambda^{(k-1)}\int_0^t A(\tau)\ d\tau + \int_0^t f(\tau)\ d\tau.$$

Тогда для разности имеет место равенство

$$u^{(k)}(t) - u^{(k-1)}(t) = \int_0^t A(\tau)\left[u^{(k)}(\tau) - u^{(k-1)}(\tau)\right]d\tau + \left[\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\right]\int_0^t A(\tau)\ d\tau.$$

Откуда следует оценка

$$\left\|u^{(k)}(t) - u^{(k-1)}(t)\right\| \le \int_0^t \alpha(\tau)\left\|u^{(k)}(\tau) - u^{(k-1)}(\tau)\right\| d\tau + \left\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\right\|\int_0^t \alpha(\tau)\ d\tau$$

Используя лемму Гронуолла-Беллмана, получим неравенство

$$\left\|u^{(k)}(t) - u^{(k-1)}(t)\right\| \le (e^{\int_0^t \alpha(\tau)d\tau} - 1) \cdot \left\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\right\|. \qquad (1.2.7)$$

Из (1.2.6) на основе неравенства (1.2.7) справедлива оценка

$$\left\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right\| \le q\left\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\right\|, \text{ где } q = \left\|M^{-1}\right\| \cdot \left\|C\right\| \cdot [e^{\int_0^T \alpha(t)\,dt} - 1 - \int_0^T \alpha(t)\ dt].$$

Если $q < 1$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda^{(k)} = \lambda^*$, $\lim\limits_{k\to\infty} u^{(k)}(t) = u^*(t)$ (равномерно по t на отрезке $[0, T]$).

Следовательно, $\{\lambda^*, u^*(t)\}$ является решением обратной задачи (1.2.3), (1.2.4). Тогда функция $x^*(t) = \lambda^* + u^*(t)$ будет решением задачи (1.2.1), (1.2.2).

Доказательство единственности проведем от противного. Пусть $x^*(t)$, $x^{**}(t)$ – два решения задачи (1.2.1), (1.2.2). Тогда пары $\{\lambda^* = x^*(0), u^*(t) = x^*(t) - x^*(0)\}$, $\{\lambda^{**} = x^{**}(0), u^{**}(t) = x^{**}(t) - x^{**}(0)\}$ являются решениями задачи (1.2.3), (1.2.4).

Аналогично оценкам (1.2.6), (1.2.7) устанавливаются оценки

$$\left\|\lambda^* - \lambda^{**}\right\| = \left\|M^{-1}\right\| \cdot \left\|C\right\| \int_0^T \alpha(t) \left\|u^*(t) - u^{**}(t)\right\| dt,$$

$$\left\|u^*(t) - u^{**}(t)\right\| \le (e^{\int_0^t \alpha(\tau)d\tau} - 1) \cdot \left\|\lambda^* - \lambda^{**}\right\|.$$

Откуда следует неравенство $\left\|\lambda^* - \lambda^{**}\right\| \le q\left\|\lambda^* - \lambda^{**}\right\|$, но в силу условия теоремы $q < 1$, поэтому $\lambda^* = \lambda^{**}$, $\lambda^* = \lambda^{**}$.

Теорема 1.2.1 доказана.

В процессе исследования данной обратной задачи магистранты применяют сведения из векторного анализа, математического анализа и функционального анализа, используют принцип сжимающих отображений, метод последовательных приближений, доказывают сходимость функциональных рядов, применяют другие методы функционального анализа.

Особо хочется остановиться на функциональном анализе. Функциональный анализ сформировался в начале XX века в результате обобщения различных понятий и методов математического анализа, алгебры и геометрии, является одним из важных разделов современной математики и в настоящее время находит обширные применения во многих областях естествознания, в том числе – в математической физике. Фундаментальное значение в функциональном анализе отводится понятию оператора – обобщению понятия функции. Исследование общей теории операторов и является основным содержанием функционального анализа. Существенный вклад в создание и развитие функционального анализа внесли исследования П.С. Александрова, С. Банаха, О.В. Бесова, С. Бохнера, И.М. Гельфанда, Д. Гильберта, К. Т.В. Вейерштрасса, К. Иосиды, Л.В. Кантаровича, А.Н. Колмогорова, С.В. Ковалевской, Ж.Л. Лагранжа, Н.Н. Лузина, Л.А. Люстерника, Ф. Риса, В.И. Смирнова, С.Л. Соболева, Л. Хёрмандера, Л. Шварца, Г.Е. Шилова и других ученых.

Реализация междисциплинарных связей в процессе обучения ОНЗ позволяет студентам приобрести, в частности, фундаментальные знания по конечномерным и бесконечномерным эвклидовым пространствам, метрическим, нормированным, гильбертовым, банаховым пространствам, непрерывным операторам в метрических пространствах, линейным операторам, линейным функционалам; освоить принцип сжатых отображений, теоремы вложения и др.

Расширение научного мировоззрения при обучении решению обратных и некорректных задач. Одной из важных целей обучения студентовпедагогических вузовявляется развитие их научного мировоззрения. Это может быть достигнуто за счет успешной организации процесса обучения, при котором освоение учебной дисциплины организуется на основе мировоззренческих идей, систематизированных в результате реализации внутрипредметных и междисциплинарных связей.

Поиск путей формирования научного мировоззрения, его значение в развитии человеческой цивилизации, психолого-педагогические основания мировоззрения рассматривались в исследованиях Аристотеля, И.В. Вернадского, Гегеля, Декарта, Я.А. Коменского, Канта, Платона, М. Хайдеггера, К.Д. Ушинского и других ученых прошлых веков. Решение проблемы формирования научного мировоззрения находит свое развитие в современных исследованиях не только математиков и физиков, но и философов, педагогов, психологов и других ученых [10,18, 94, 95, 104, 109, 128].

В.И. Вернадский[129] считал, что научное мировоззрение содержит истины общеобязательные для всех (в той части, где они не зависят от времени и субъективных точек зрения – совпадают с эмпирической реальностью.Б.В. Гнеденко[130], подчеркивая роль математики в познании окружающего мира, отмечал, что под мировоззрением понимают систему взглядов на окружающий нас мир, на возможность его познания человеком, на отношение человека к обществу и общественно полезному труду. Поэтому воспитание научного мировоззрения является сложной и ответственной задачей, которая требует длительного и настойчивого внимания, а также постоянного и неназойливого воздействия педагогического коллектива. В.А. Сластенин [131] полагал, что научное мировоззрение представляет собой целостную систему научных, философских, социально-политических, нравственных, эстетических взглядов на мир. Воплощая в себе достижения мировой цивилизации, научное мировоззрение вооружает человека научной картиной мира как системным отражением наиболее существенных сторон бытия и мышления, природы и общества.

В своих исследованиях в области научного мировоззрения многие авторы делают выводы о том, что научное мировоззрение является обобщающей формой знаний об окружающем мире, опирающееся на принципы и законы, многократно проверенные научным методом и подтвержденные практикой человечества в целом.

Смысл и содержание этих выводов во многом имеют отношение к обучению обратным и некорректным задачам (ОНЗ) студентов высших учебных заведений физико-математических и естественнонаучных направлений подготовки. С помощью теории и методологии ОНЗ могут успешно исследоваться прикладные задачи физики, геофизики, сейсмологии, морских природных катастроф, химии, обработки фотоизображений, медицины, экономики, экологии, промышленности, астрономии, астрофизики и других областей.

Содержание обучения решению обратных и некорректных задачвключает разнообразные задачи [9, 21, 32, 33, 36, 41, 42, 46-48, 51-59, 83, 87, 132, 133]. Среди них: *обратные и некорректные задачи линейной алгебры, анализа, исследования операций, теории приближенных вычислений, интегральных и операторных уравнений* и другие ОНЗ. Большой раздел в содержании обучения ОНЗ составляют обратные задачи для дифференциальных уравнений, такие, как *обратные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений* (обратные задачи определения коэффициентов, правых частей линейных и нелинейных дифференциальных уравнений и другие обратные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений); *коэффициентные, граничные и эволюционные обратные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных* (одномерные и многомерные обратные задачи для гиперболических, параболических, эллиптических, интегро-дифференциальных уравнений и других типов дифференциальных уравнений в частных производных, рассматриваемые в различных функциональных пространствах); з*адачи определения функции по значениям интегралов* (задача определения функции одной переменной по значениям ее интегралов, задачи компьютерной томографии, задача об отыскании функции по ее сферическим средним и другие задачи); *приближенные методы решения обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных* (конечно-разностные методы, оптимизационные методы, метод Ньютона-Канторовича, метод линеаризации и другие приближенные методы).

Реализация мировоззренческих идей, внутрипредметных и междисциплинарных связей при обучении ОНЗ обязывает формировать содержание такого обучения не только отбором конкретных ОНЗ, которые имеют математические особенности, подразделяются на типы, обладают индивидуальностью и решаются различными методами. При формировании содержания обучениярешению обратных и некорректных задач должны быть учтены единство учебного материала, его обобщенность, полнота, оптимальность; критерии дидактической, методологической значимости и другие критерии. Очевидно, что эффективность такого обучения во многом зависит и от сформулированных целей и принципов обучения, форм организации учебных занятий, методов обучения, намеченных путей их реализации. Приведем несколько примеров.

При изучении вычислительных алгоритмов решения проблем собственных значений λ в разделе некорректных задач линейной алгебры, магистрантам приводятся сведения о том, что характеристическое уравнение вида $\det(A-\lambda E)=0$, где $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, E– единичная матрица, вместе с его собственными значениями λ и соответствующими собственными векторами x играют важную роль в теории колебаний (механические, электрические, микроскопические и др.); упругих колебаниях моста и других жестких сооружений; неустойчивых колебания крыла самолета; неустановившихся колебаниях электрической сети; колебаний атомов и молекул в волновой механике и др. В процессе такого обучения магистрантам излагаются подобные прикладные аспекты, проводится анализ подходов выбора вычислительных алгоритмов решения соответствующих задач, что помогает им подбирать или самостоятельно разрабатывать наиболее эффективные алгоритмы решения некорректных задач линейной алгебры.

Рассмотрим одну из таких задач.

Пример 1.2.1. Рассмотрим систему ОДУ второго порядка

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) = 3z'(t) - z(t) \\ y'(t) = 3z(t) \end{cases} \tag{1.2.8}$$

Предположим, что решения системы (1.2.8) являются функции

$$y(t) = c_1 \exp(\lambda t),\; z(t) = c_2 \exp(\lambda t), \tag{1.2.9}$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования.

Подставляя (1.2.9) в (1.2.8), получим

$$\begin{cases} \exp(\lambda t)\left[(\lambda^2 - 2\lambda)c_1 + (1-3\lambda)c_2\right] = 0, \\ \exp(\lambda t)\left[\lambda c \;\; - 3c_2\right] = 0. \end{cases}$$

Сократив в этой системе на $\exp(\lambda t)$, придем к системе

$$\begin{cases} \left[(\lambda^2 - 2\lambda)c_1 + (1-3\lambda)c_2\right] = 0, \\ \left[\lambda c \;\; - 3c_2\right] = 0. \end{cases} \tag{1.2.10}$$

Собственные значения λ равны корням определителя матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 2\lambda & 1-3\lambda \\ \lambda & -3 \end{pmatrix} \tag{1.2.11}$$

Определитель матрицы (1.2.11) равен

$$\det A = \begin{vmatrix} \lambda^2 - 2\lambda & 1 - 3\lambda \\ \lambda & -3 \end{vmatrix} = 5\lambda \qquad (1.2.12)$$

Корнем характеристического уравнения $5\lambda = 0$ является $\lambda = 0$.

Задачи вычисления корней характеристического уравнения типа $\det A = 0$ могут быть корректными и некорректными. Задача вычисления определителя (1.2.12) является некорректной.

Действительно, рассмотрим вариацию одного коэффициента и вместо определителя (1.2.12) определитель

$$\det A = \begin{vmatrix} \lambda^2 - 2\lambda & 1 - 3\lambda \\ \lambda & -3(1+\varepsilon) \end{vmatrix} = -3\varepsilon\lambda^2 - 6\varepsilon\lambda + 5\lambda .$$

Корнями характеристического уравнения: $-3\varepsilon\lambda^2 - 6\varepsilon\lambda + 5\lambda = 0$ являются уже два корня: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2 + \dfrac{5}{3\varepsilon}$. Причем второй корень λ_2 при $\varepsilon \to 0$ не стремится к λ_1 и исчезает лишь при $\varepsilon = 0$.

В процессе обучения решению обратных и некорректных задачстуденты знакомятся с различными математическими моделями ОНЗ, осваивают методы их исследования. В процессе такого обучения студенты приобретают фундаментальные знания о методах и методологии исследования математических моделей ОНЗ, формируя представления о них как об универсальном средстве познания окружающего мира. Студенты в процессе обучения ОНЗ формируют мотивацию и стремление к знаниям, желание к познанию окружающей действительности, к развитию мировоззрения и другие творческие способности.

Наличие научного мировоззрения при обучении ОНЗ позволяет студентам осмысливать и применять принципы организации теоретических и практических исследований ОНЗ. Отметим некоторые из них.

а) Принцип междисциплинарного подхода. Идея этого принципа – многопредметность описания целостных процессов и явлений на базе знаний из различных научных областей.

б) Принцип структурно-функционального и динамического единства. Данный принцип обязывает к описанию законов объектов, функционирования и развития в их единстве, и требует исследования процессов, явлений или объектов во всем их многообразии. Это способствует объяснениюпроцессовобразования явлений, раскрытию характера и содержания поведения данного явления или процесса.

*в) Принцип многоуровневости.*Этот принцип призываетизучить объект и как определенную целостность, и как образование, включенное в более сложную систему. Его использование позволяет исследовать общие особенности и единичные черты объекта. При многоуровневом описании системы каждый из уровней может в свою очередь быть разбит на ряд подуровней. Количество этих подуровней отражает глубину проникновения в сущность исследуемого процесса или явления на каждом уровне.

г) Принцип причинно-следственных связей. Это основной принцип, который требует глубокого изучения причинно-следственных связей, связанных с направлением причинно-следственного хода событий и явлений. Это позволяет восстанавливать неизвестные причины известных следствий – конкретные свойства изучаемых объектов. При этом технология достижения целостности познания включает не только применение определенной совокупности методов исследования ОНЗ, но и обобщения полученных прикладных знаний в единую научную картину, выяснения возможностей практического применения полученных результатов исследований ОНЗ. Такой подход к исследованию ОНЗ способствует расширению кругозора исследователя, обеспечивает взаимопроникновение и взаимообогащение научных методов, подходов и приемов, разработанных в разных областях знаний.

Наличие научного мировоззрения позволяет магистрантамосознать, что большая часть математических моделей приобретает стройность и достоверность благодаря достижениям теории и практики ОНЗ, которые имеют отношение ко всем трем методам человеческого познания: к теории, эксперименту и философии.

Реализация прикладной направленности обучения решению обратных и некорректных задач. Прикладная направленность обучения решению обратных и некорректных задач реализуется через решение прикладных задач методом математического моделирования. При решении прикладных задач студенты получают представление о прикладной математике, ее методах, о роли математического моделирования в познании окружающего мира.

В настоящее время математическое моделирование является универсальным компонентом методологии любой науки и междисциплинарной областью знаний с присущими ей объектами, подходами и методами исследования [122-124, 134, 135, 136, 137, 138]. Многие прикладные исследования, в которых решающее слово остается за экспериментом, сталкиваются с решением обратных задач, представляющих собой единство теории и эксперимента и имеющих отношение ко всем трем методам человеческого познания: к теории, эксперименту и философии. Самый первый этап решения обратной задачи заключается обычно в формулировке законов, связывающих причины со следствиями. Так как основные законы природы выражаются, как правило, на языке дифференциальных уравнений, то мы в результате приходим к математическим моделям обратных задач.

В качестве примера рассмотрим постановку обратной задачи, вошедшую в содержание обучения решению обратных и некорректных задач.

Пример 1.2.2. Рассмотрим в области $(x,t) \in R^2$ волновое уравнение [129]

$$U_{tt} - U_{xx} + a(x,t)U + \delta'(t)\,\delta(x-\lambda), \quad (x,t) \in R^2, \qquad (1.2.17)$$

при начальных условиях

$$U\big|_{t<0} \equiv 0 \qquad (1.2.18)$$

В (1.2.17) $U = U(x,t,\lambda)$, $\lambda \in R$ – числовой параметр, $\delta'(t)$ – производная дельта-функции Дирака.

Сформулируем обратную задачу. Из соотношений (1.2.17), (1.2.18) определить неизвестный коэффициент $a(x,t)$, если о решении прямой задачи (1.2.17), (1.2.18) известна дополнительная информация вида

$$U(0,t,\lambda) = f_1(t,\lambda), \; U_x(0,t,\lambda) = f_2(t,\lambda), \; (\lambda,t) \in G(T), \qquad (1.2.19)$$

где

$$G(T) = \left\{(\lambda,t) \;\middle|\; -T < \lambda < T, \; |\lambda| < t \le T\right\},$$

T – некоторое положительное число.

Теория обратных и некорректных задач используется при решении прикладных задач почти во всех областях науки (таблица 3) [58, с.20].

Таблица 3 - ОНЗ в предметных областях

Предметная область	Обратные и некорректные задачи
1	2
Физика	- Квантовая теория рассеяния - Электродинамика - Акустика
Геофизика	- Сейсмика - Электроразведка - Гравиразведка, магниторазведка, терморазведка
Химия	- Сорбция - Молекулярная химия
Медицина	- УЗИ - ЯМР – томография - Рентген

Биология	- Исследование популяций - Анализ молекул
Экономика	- Оптимальное управление - Финансовая математика

Продолжение таблицы 3

1	2
Экология	- Дистанционное зондирование - Радары, лазеры - Диагностика состояния воздуха, воды, земной поверхности
Промышленность	- Дефектоскопия - Неразрушающий контроль - Управление технологическими процессами

Студенты в процессе решения ОНЗ осознают корректность математической модели ОНЗ, постановки проблемных ситуации в реализации математического метода решения ОНЗ, применяют полученные знания для решения конкретной прикладной задачи, обнаруживают знания в области теории и практики исследования ОНЗ, грамотно объясняют и обосновывают практические выводы полученного решения прикладной задачи. Очевидно, что в данном случае студенты демонстрируют компетентность в области прикладной математики.

Развитие логического мышления при обучении решению обратных и некорректных задач. Широко известно, что логика исследует те формы и законы мышления, которыми определяются принципы сочетания смысловых предметностей сознания.

Основными формами абстрактного мышления являются:

- понятие – это форма мышления, в которой отражаются общие признаки одного класса однородных предметов;
- суждение – форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о предметах, их свойствах или отношениях и выражается в форме повествовательного предложения;
- умозаключение – это форма мышления, посредством которой из одного или нескольких суждений по определенным правилам вывода делается заключение.

Согласно историческим сведениям [33, 71], логические проблемы стали возникать у человека более 2,5 тысяч лет назад в Древней Индии, Древнем Китае и Древней Греции в связи с зарождением и первоначальным развитием наук. Успехи в развитии математики и проникновение математических методов в другие науки уже во второй половине XVII в. выдвигали две фундаментальные проблемы: применение логики для разработки теоретических оснований математики, и математизация самой логики как науки. Во второй половине XIX века была создана математическая логика, изучающая логические связи и отношения, лежащие в основе дедуктивного вывода. Основоположником математической логики является Г.В. Лейбниц, научные идеи которого нашли свое дальнейшее развитие в исследованиях Д. Буля, Б.А.У. Рассела, Ф.В.К.Э. Шредера, А. Уайтхеда, Ф.Л.Г. Фреге и других ученых.

Причинная связь между явлениями определяется с помощью методов сходства, различия, сопутствующих изменений и других методов, которые были описаны и классифицированы Ф. Бэконом [139].

Предметом изучения логики являются формы и законы правильного мышления, которое является функцией человеческого мозга неразрывно связанная с языком. Язык является средством общения людей. Ему свойственны такие функции, как хранение информации, средство выражения эмоций, средство познания и другие. Язык является знаковой информационной системой. На основе естественных языков были созданы искусственные языки, среди которых языки математики, физики, химии и других областей. Существенный вклад в развитие математической логики внесли фундаментальные исследования С.И. Адяна, А.П. Замятина, А.А. Зиновьева, С.К. Клини, А.Н. Колмогорова, А.А. Маркова, П.С. Новикова, П.С. Порецкого, А. Чёрча, Д. Шенфилда и других ученых [139]. А.А. Марков определяет современную логику как точную науку, применяющую математические методы. С.К. Клини считает, что математическая логика – это логика, развиваемая с помощью математических методов. Эти определения не являются противоречивыми, они дополняют друг друга.

Математическая логика играет важную роль при решении разнообразных прикладных задач. В современных условиях знания, умения и навыки в области математической логики нужны специалистам разнообразных предметных областей для своей профессиональной деятельности. Известно, что образование состоит не только в изучении новых понятий и овладении соответствующими навыками, но в обогащении связей между различными понятиями и что важной целью изучения элементов логики с точки зрения формирования обобщенной стратегии решения прикладных задач является демонстрация одной из основ современного научного мышления и научного анализа. Профессиональная направленность обучения решению обратных и некорректных задач способствует развитию их логического мышления.

Рассмотрим пример переопределенной СЛАУ из содержания обучения ОНЗ.

Пример 1.2.3. Переопределенная СЛАУ

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ -x + 2y = 3 \\ x + 4y = 15 \end{cases} \tag{1.2.20}$$

Данная СЛАУ действительно является переопределенной и не имеет решения, так как ранг расширенной матрицы $\rho = rang(A|f) = 3$, а ранг матрицы A равен $r = rang(A) = 2$, то есть $\rho > r$. Кроме того, число независимых строк в (1.2.20) равно 3 и больше n, равного 2.

В том, что СЛАУ (1.2.20) не имеет решения x и y, студенты убеждаются непосредственно, совершая логические размышления. Действительно, рассматривая лишь первые два уравнения, они получают решение: $x = 1$ и $y = 2$. Рассматривая второе и третье уравнения, студенты получают решение: $x = y = 3$. Наконец, рассматривая первое и третье уравнения -получают решение: $x = 2.635$, $y = 3{,}09$. В конечном счете, студенты убеждаются в том, что решение СЛАУ (1.2.20) не существует – нарушен первый пункт корректности по Адамару.

В процессе решения данной задачи студенты анализируют постановку задачи, ведут научный спор, при помощи логических размышлений, доказывая свою точку зрения. Стиль изложения математики, ее язык оказывают влияние на развитие речи студентов, которые должны иметь представления об основных понятиях содержания обучения решению обратных и некорректных задач, идеях решения нетипичных ОНЗ, а не о наборе конкретных формул и теорем, с помощью которых можно успешно решить ту или иную ОНЗ.

Развитие алгоритмического мышления при обучении решению обратных и некорректных задач. Алгоритмическое мышление является важной составляющей интеллектуальной деятельности человека. В современном мире представления, умения и навыки, связанные с овладением наиболее общими компонентами алгоритмизации, рассматриваются как естественное требование к части общей культуры каждого человека. Алгоритмическое мышление имеет самостоятельную ценность и применимо не только в информатике. Известно, что алгоритмический стиль мышления представляет собой специфический способ мышления, предполагающий умение создать алгоритм, для чего необходимо наличие мыслительных схем, которые способствуют видению проблемы в целом, ее решению крупными блоками с последующей детализацией и осознанным закреплением процесса получения конечного результата в языковых формах.

При решении учебных задач в процессе обучения решению обратных и некорректных задач студенты пользуются различными подходами к их решению. При решении задач они стремятся выбрать или разработать эффективный метод решения ОНЗ, что способствует развитию их алгоритмического мышления.

Рассмотрим обратную учебную задачу из содержания обучения решению обратных и некорректных задач.

Пример 1.2.4. Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с неизвестным коэффициентом

$$y'' + a(x)y = 0\,,\ \ y = y(x,\alpha)\,,\ \ y'' = \frac{d^2}{dx^2}y\,,\ \ a(x) \in C(-\infty, +\infty)\,;\ x,\alpha \in R\,, \qquad (1.2.21)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x,\alpha)\big|_{x=\alpha} = 1,\ \ y'(x,\alpha)\big|_{x=\alpha} = 0\,. \qquad (1.2.22)$$

и дополнительной информации о решении задачи (1.2.21), (1.2.22) при фиксированном значении переменной $x = x^*$

$$y(x^*,\alpha) = \varphi(\alpha)\,,\ \ x^* = \text{const},\ \alpha \in R\,. \qquad (1.2.23)$$

Здесь x – независимая переменная, α – числовой параметр.

Студентам предлагается построить конечно-разностный аналог дифференциальной обратной задачи (1.2.21)–(1.2.23) при помощи явной разностной схемы, сформулировать разностную обратную задачу и сконструировать вычислительный алгоритм ее решения.

Конечно-разностный аналог дифференциальной обратной задачи магистранты начинают конструировать по следующей схеме:

а) Непрерывная область изменения аргументов x, α заменяется дискретным множеством $D(h) = \left\{(k\,h,\ i\,h):\ \ k = -\overline{n,n},\ \ \ i = -\overline{n,n}\right\},\ \ h > 0$. В узлах (k,i), $k,i = -\overline{n,n}$ введенной области $D(h)$ определяются сеточные функции целочисленных аргументов $v(k,i) = v_k^i$, $a(k) = a_k$, $\varphi(i) = \varphi_i$. И значения функций $y(x_k, \alpha_i)$, $a(x_k)$, $\varphi(\alpha_i)$ в них заменяются соответствующими значениями сеточных функций v_k^i, a_k, φ_i.

б) Соотношения (1.2.21)–(1.2.23) заменяются разностным аналогом

$$\frac{v_{k+1}^i - 2v_k^i + v_{k-1}^i}{h^2} + a_k\, v_k^i = 0, \quad (i,k) \in D(h), \qquad (1.2.24)$$

$$v_i^i = 1, \qquad i = -\overline{n,n}, \qquad (1.2.25)$$

$$\frac{v_{i+1}^i - v_{i-1}^i}{2t} = 0, \quad i = -\overline{n+1,\, n-1}, \qquad (1.2.26)$$

$$v_0^i = \overline{\varphi_i},\ \ i = -\overline{n,n}, \qquad (1.2.27)$$

с) Формулировка разностной обратной задачи: из конечно-разностных соотношений (1.2.24) –(1.2.27) определить числовые последовательности $\{v_k^i\}$, $\{a_k\}$, $k,i = -\overline{n,\,n}$.

В дальнейшем, студенты конструируют вычислительный алгоритм решения разностной обратной задачи (1.2.24) –(1.2.27), что демонстрирует наличие у них алгоритмического мышления.

Развитие информационного мышления при обучении решению обратных и некорректных задач. В современных условиях информатизации общества способность личности эффективно использовать средства информатизации, новые информационные технологии для решения практических задач; умение использовать возможности информационного пространства в своей профессиональной деятельности наглядно демонстрируют наличие информационного мышления. Феномену информационного мышления с позиций теоретических, методологических, педагогических, психологических, мировоззренческих, философских подходов, выявлению ее исторической и социальной обусловленности, формированию ее теоретических основ и понятийного и терминологического аппарата посвящены исследования многих ученых.Среди них К.М. Войханская, М.Г. Вохрышева, И.Н. Гайдарева, Н.И. Гендина,Н.Н. Елистратова, А.П. Ершов, Т.С. Коваль, О.В. Краснова, Л.И. Куштанина, Ю.Л. Пигичка, Т.И. Полякова, Б.Я. Смирнова и другие ученые.

Авторы отмечают, что основными факторами развития информационного мышления у людей современного общества являются система образования, информационная инфраструктура, демократизация общества, развитие экономики страны. В структуру информационного мышления входят компоненты, среди которых: коммуникативный, лексический, интеллектуальный, информационно-технологический (успешность использования современных информационных технологий), мировоззренческой, нравственной и другие компоненты.

Большую роль в развитии информационного мышления у студентовпедагогических вузов играют компьютерные технологии, используя которых возможно обрабатывать различную информацию, реализовывать математическое и информационное моделирование для изучения различных объектов и явлений, проводить вычислительные эксперименты для проверки правильности построенных моделей.

Информационное мышление развивается у студентов и при обучении решению обратных и некорректных задач. В практике обучения решению обратных и некорректных задач реализация приближенных методов решения обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений осуществляется с помощью использования компьютерных средств, в частности, с помощью компьютерных математических пакетов (Maple, Mathematica,Mathcad, Matlab и др.), которые в настоящее время активно используются в вузовском образовании [26, 32, 33, 42, 44, 57, 58, 67, 79, 83, 87, 99, 100, 140-144].

В результате решения обратных задач с помощью использованиякомпьютерных средствстуденты приобретают опыт применения современных информационных технологий для решения ОНЗ, осознают роль и место информационных технологий при решении прикладных задач, что способствует развитию у них информационного мышления.

Реализация психологических аспектов обучения решению обратных и некорректных задач. Одной из фундаментальных проблем в психологии, философии, социологии, этике и других научных областей является проблема исследования личности. Существующие концепции в психологии ориентированы на изучение личности человека в его разнообразной деятельности.В связи с чем, исследованием этой проблемы занимаются специалисты различных предметных областей, такие как: А.Г. Асмолов, Г.Д. Бухарова, В.В. Давыдов, В.С. Леднев, Н.Г. Салмина, Л.М. Фридман и другие ученые [145, 146, 147, 148, 149, 150].

А.Г. Асмолов [145] считает, что развитие личности сопровождается переходом от формально-ролевого типа взаимоотношений с окружающими к личностно-смысловому типу взаимоотношений в контексте социально-исторического образа жизни. В.В. Давыдов [147], определяя содержание личности, опирается на философскую позицию, которая, по его мнению,содержит понимание личности как целостности, возникшей в условиях определенных общественных отношений и полагает, что проблема личности и проблема творчества взаимосвязаны, так как личностью обладает творчески и талантливо действующий человек, создающий новые формы общественной жизни. Согласно мнению В.С. Леднева [148], модель структуры личности содержит три группы компонентов: механизмы психики; опыт личности; типологические свойства личности и личность человека является интегральной целостностью биогенных, психогенных и социогенных элементов.

Л.М. Фридман [150], обсуждая использование моделирования как цель учебного познания, замечает, что установление модельного характера математических понятий меняет взгляд обучаемых на эти понятия и позволяет им осознать сущность математического подхода к изучению реальных явлений, четко представить мировоззренческий смысл изучаемых математических понятий. Н.Г. Салмина [149] основную роль моделирования в учебной деятельности связывает с реализацией познавательной функции обучения, а Г.Д. Бухарова [146] считает, что решение задач выполняет определенные функции в учебно-воспитательном процессе.

Стоит отметить, что вышеотмеченными авторами сущность современного образования трактуется как процесс целостного становления личности: усвоение опыта, развитие психических процессов, формирование на их основе мировоззрения, убеждений, идеалов и, в конечном счете, таких качеств, которые характерны для творческой личности.

Учебные задачи по ОНЗ выполняютв учебно-воспитательном процессе, следующие функции: мотивационную, познавательную, развивающую, воспитывающую, управляющую, иллюстративную, контрольно-оценочную.

В качестве примерарассмотрим учебную двумерную обратную задачу и приведем ее решение [151].

Пример 1.2.5. Рассмотрим в области $(x,t) \in R^2$ уравнение

$$U_{tt} - U_{xx} + a(x,t)U + \delta'(t)\delta(x - \lambda), \quad (x,t) \in R^2, \tag{1.2.28}$$

при начальных условиях

$$U\big|_{t<0} \equiv 0 \tag{1.2.29}$$

В (1.2.28) $U = U(x,t,\lambda)$, $\lambda \in R$ – числовой параметр, $\delta'(t)$ – производная дельта-функции Дирака.

Сформулируем обратную задачу. Из соотношений (1.2.28), (1.2.29) определить неизвестный коэффициент $a(x,t)$, если о решении прямой задачи (1.2.32), (1.2.33) известна дополнительная информация вида

$$U(0,t,\lambda) = f_1(t,\lambda),\ U_x(0,t,\lambda) = f_2(t,\lambda),\ (\lambda,t) \in G(T), \tag{1.2.30}$$

где $G(T) = \left\{(\lambda,t)\ \middle|\ - T < \lambda < T,\ |\lambda| < t \le T\right\}$, T – некоторое положительное число.

Исследование свойств решения прямой задачи . Будем полагать, что $a(x,t) \in C(R\times R)$ – известная функция. При помощи формулы Даламбера, учтя данные Коши (1.3.33), обратим гиперболический оператор $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$:

$$U(x,t,\lambda) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,t)} \{a(\xi,\tau)U(\xi,\tau) + \delta'(\tau)\delta(\xi - \lambda)\}d\xi\, d\tau\ , \tag{1.2.31}$$

где область интегрирования $\Delta(x,t)$ – треугольник на плоскости ξ,τ, ограниченный осью ξ и характеристиками уравнения (1.2.32), проведенными через точку (x,t):

$$\Delta(x,t) = \left\{(\xi,\tau)\ \middle|\ x - t \le \xi \le x + t,\ 0 \le \tau \le t - |x - \xi|\right\}.$$

Интегральное слагаемое в (1.3.35), содержащее дельта-функцию, с учетом ее свойств, можно свести к виду

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,t)} \delta'(\tau)\delta(\xi - \lambda)d\xi\, d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \delta(\xi - \lambda)d\xi \int\limits_{0}^{t-|x-\xi|} \delta'(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\delta(t + (x - \lambda)) + \frac{1}{2}\delta(t - (x - \lambda)) \tag{1.2.32}$$

Выражение (1.2.32) является сингулярной частью решения прямой задачи (1.2.8), (1.2.29).

Значит, функция $U(x,t,\lambda)$, как обобщенное решение задачи (1.2.28), (1.2.29) является решением интегрального уравнения

$$U(x,t,\lambda) = \frac{1}{2}\delta\big(t + (x - \lambda)\big) + \frac{1}{2}\delta\big(t - (x - \lambda)\big) + \\ + \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,t)} a(\xi,\tau)U(\xi,\tau,\lambda)d\xi\, d\tau \tag{1.2.33}$$

Из уравнения (1.2.37) следует, что

$$U(x,t,\lambda) \equiv 0 \text{при } t < |\, x - \lambda\, | \tag{1.2.34}$$

Действительно, рассмотрим область $\Delta(x_1,t_1)$ с произвольной фиксированной точкой $(x_1,t_1) \in R^2$, $t_1 < |x_1 - \lambda|$. Тогда для точек $(x,t) \in \Delta(x_1,t_1)$ из (1.2.37) вытекает однородное уравнение

$$U(x,t,\lambda) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,t)} a(\xi,\tau)U(\xi,\tau,\lambda)d\xi\, d\tau\,, \qquad (x,t) \in \Delta(x_1,t_1), \tag{1.2.35}$$

которое имеет только нулевое решение.

Из равенства (1.2.38) следует, что носитель функции $U(x,t,\lambda)$ сосредоточен внутри угла, образованного характеристиками, выходящими из точки $(0,\lambda)$.

Положим

$$V(x,t,\lambda) = U(x,t,\lambda) - \frac{1}{2}\delta\big(t + (x - \lambda)\big) - \frac{1}{2}\delta\big(t - (x - \lambda)\big)$$

Тогда для функции $V(x,t,\lambda)$, как регулярной части решения задачи (1.2.32), (1.2.33), при $t \geq |\, x - \lambda\, |$ получим уравнение

$$V(x,t,\lambda) = \frac{1}{4}\left[\int\limits_{(x-t+\lambda)/2}^{\lambda} a(\xi,\lambda - \xi)d\xi + \int\limits_{\lambda}^{(x+t+\lambda)/2} a(\xi,\xi - \lambda)d\xi\right] + \\ + \frac{1}{2}\iint\limits_{D(x,t,\lambda)} a(\xi,\tau)V(\xi,\tau,\lambda)d\xi\, d\tau\ , \tag{1.2.36}$$

где

$$D(x,t,\lambda) = \left\{ (\xi,\tau) \,\middle|\, x - t < \lambda < x + t,\ \frac{x - t + \lambda}{2} \le \xi \le \frac{x + t + \lambda}{2},\right.$$
$$\left. |\lambda - \xi| \le \tau \le t - |x - \xi| \right\} \text{ (рисунок 4).}$$

Продифференцируем уравнение (1.2.36) по t и x:

$$\begin{aligned} V_t(x,t,\lambda) = \frac{1}{8}\Bigg[a\left(\frac{x - t + \lambda}{2}, \frac{t - x + \lambda}{2}\right) + \\ + a\left(\frac{x + t + \lambda}{2}, \frac{x + t - \lambda}{2}\right)\Bigg] + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{(x-t+\lambda)/2}^{(x+t+\lambda)/2} a(\xi,\ t - |x - \xi|)\, V(\xi,\ t - |x - \xi|)\, d\xi\ , \end{aligned} \tag{1.2.37}$$

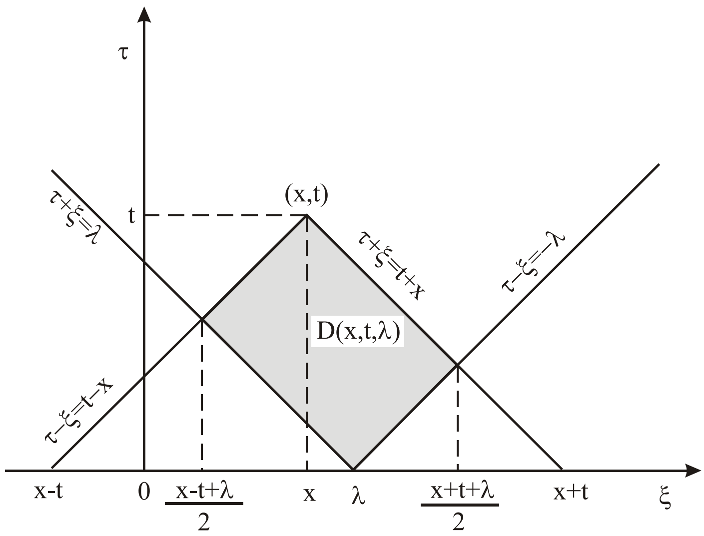

Рисунок 4 - Область интегрирования $D(x,t,\lambda)$

$$\begin{aligned} V_x(x,t,\lambda) = \frac{1}{8}\Bigg[-a\left(\frac{x - t + \lambda}{2}, \frac{t - x + \lambda}{2}\right) + \\ + a\left(\frac{x + t + \lambda}{2}, \frac{x + t - \lambda}{2}\right)\Bigg] - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_{(x-t+\lambda)/2}^{(x+t+\lambda)/2} a(\xi,\ t - |x - \xi|)\, V(\xi,\ t - |x - \xi|)\, \mathrm{sgn}(x - \xi)\, d\xi \end{aligned} \tag{1.2.38}$$

Интегральные слагаемые в (1.2.37), (1.2.38) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\int\limits_{(x-t+\lambda)/2}^{(x+t+\lambda)/2} a\big(\xi,\ t-|\,x-\xi\,|\,\big)\,V\big(\xi,\ t-|\,x-\xi\,|\,\big)d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{(x-t+\lambda)/2}^{x} a\big(\xi,\ t-x+\xi\big)\,V\big(\xi,\ t-x+\xi\big)d\xi + \tag{1.2.39}$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{(x+t+\lambda)/2} a\big(\xi,\ t+x-\xi\big)\,V\big(\xi,\ t+x-\xi\big)d\xi\ ,$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{(x-t+\lambda)/2}^{(x+t+\lambda)/2} a\big(\xi,\ t-|\,x-\xi\,|\,\big)\,V\big(\xi,\ t-|\,x-\xi\,|\,\big)\mathrm{sgn}\big(x-\xi\big)d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{(x-t+\lambda)/2}^{x} a\big(\xi,\ t-x+\xi\big)\,V\big(\xi, t-x+\xi\big)d\xi - \tag{1.2.40}$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{(x+t+\lambda)/2} a\big(\xi,\ t+x-\xi\big)\,V\big(\xi,\ t+x-\xi\big)d\xi$$

Нетрудно показать, что в области

$$D_1(T) = \left\{ \big(x,t,\lambda\big) \,\middle|\; -T < \lambda < T\,,\ \frac{\lambda - T}{2} < x < \frac{\lambda + T}{2}\,, \right.$$

$$\left. |\,\lambda - x\,| \le t \le T - |\,x\,| \right\}$$

функция $V(x,t,\lambda)$, как решение интегрального уравнения (1.2.40), а также функции $V_t(x,t,\lambda)$, $V_x(x,t,\lambda)$, удовлетворяющие соотношениям (1.2.37), (1.2.38) являются непрерывными и удовлетворяют неравенствам

$$\|\,V\,\| \le const\,,\ \|\,V_t\,\| \le const\,,\ \|\,V_x\,\| \le const\,,$$

где $const$ – конечная положительная постоянная, а $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{C(G(T))}$.

При этом полагаем, что $\|\,a\,\|_{C(G(T))} \le M$, M – фиксированное положительное число.

Исследование обратной задачи

При непрерывной функции $a(x,t)$, функции f_1, f_2 должны удовлетворять следующим условиям:

$$f_1(t,\lambda) \in C^1(G(T)), \quad f_2(t,\lambda) \in C(G(T)) \tag{1.2.41}$$

С учетом дополнительной информации (1.2.29) и (1.2.38), (1.2.39), из уравнений (1.2.36), (1.2.37) получим для искомого коэффициента $a(x,t)$ следующие интегральные уравнения

$$\begin{gathered} a(x,t) = 4\left[\, f_1'(x+t,\ x-t) + f_2(x+t,\ x-t)\right] - \\ - 4\int_0^x a(\xi,\ t+x-\xi)\, V(\xi,\ t+x-\xi, x-t)\, d\xi\ , \quad x \ge 0, \end{gathered} \tag{1.2.42}$$

$$\begin{gathered} a(x,t) = 4\left[\, f_1'(t-x,\ x+t) - f_2(t-x,\ x+t)\,\right] - \\ - 4\int_x^0 a(\xi,\ t-x+\xi)\, V(\xi,\ t-x+\xi,\ x+t)\, d\xi\ , \quad x \le 0, \end{gathered} \tag{1.2.43}$$

которые можно записать в виде одного интегрального уравнения

$$\begin{gathered} a(x,t) = F(x,t) - 4\operatorname{sgn}(x)\int_0^x a(\xi,\ t+|\,\xi-x\,|)\times \\ \times V\left(\xi,\ t+|\,\xi-x\,|,\ (|\,x\,|-t)\operatorname{sgn}(x)\right) d\xi\ , \end{gathered} \tag{1.2.44}$$

где

$$\begin{gathered} F(x,t) = 4\left[\, f_1'\left(t+|\,x\,|,\ (|\,x\,|-t)\operatorname{sgn}(x)\,\right) + \right. \\ \left. + f_2\left(t+|\,x\,|,\ (|\,x\,|-t\,)\operatorname{sgn}(x)\,\right)\operatorname{sgn}(x)\,\right], \\ (x,t) \in \Delta(T), \quad \Delta(T) = \left\{(x,t)\ \middle|\ -T < x < T,\ 0 \le t \le T - |\,x\,|\right\}. \end{gathered}$$

Из уравнений (1.2.42), (1.2.43), с учетом непрерывности $a(x,t)$, при $x = 0$ вытекает условие согласования данных обратной задачи (1.2.28)–(1.2.30):

$$f_1'(t,-t) + f_2(t,-t) = f_1'(t,t) - f_2(t,t), \quad 0 \le t \le T. \tag{1.2.45}$$

Уравнения (1.2.36), (1.2.44) определяют замкнутую систему нелинейных интегральных уравнений Вольтера второго рода относительно функций V, a. Используя полученную систему, нетрудно доказать следующие теоремы.

Теорема 1.2.2. Если функции f_1, f_2 удовлетворяют условиям (1.2.41), (1.2.45) и допускают непрерывное продолжение на границу области $G(T)$, то существует достаточно малое $T^* > 0$, что для $T \in \left(0, T^*\right)$ решение обратной задачи в области $G(T)$ существует, единственно и принадлежит классу $C(G(T))$.

Теорема 1.2.3. Пусть $a(x,t)$, $\bar{a}(x,t)$ – два решения обратной задачи (1.2.28)-(1.2.30) с данными f_1, f_2 и $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ соответственно. Пусть, кроме того, $a, \bar{a} \in Q(M,T) = \left\{a(x,t) \;\middle|\; \| a \|_{C(G(T))} \le M \right\}$. Тогда имеет место неравенство

$$\| a - \bar{a} \|_{C(G(T))} \le const \cdot \left(\| f_1' - \bar{f}_1' \|_{C(G(T))} + \| f_2 - \bar{f}_2 \|_{C(G(T))} \right),$$

причем постоянная $const$ зависит лишь от выбора класса $Q(M,T)$.

Проанализируем, теперь какие функции в учебно-воспитательном процессе выполняет решение обратных и некорректных задач.

1. Мотивационная функция. Решение обратных и некорректных задач позволяет формировать и развивать внутреннюю мотивацию учебной деятельности студентов, среди которых – познавательный интерес. Обратные и некорректные задачи представляют собой математические модели, описывающие конкретные физические процессы или явления. При решении рассмотренной обратной задачи (1.2.28)–(1.2.30) у студентов формируется познавательный интерес к волновым, электромагнитным процессам, происходящим в природе, так как данная обратная задача является математической моделью, которой описываются эти и другие физические процессы и явления.

2. Познавательная функция. В результате решения обратных и некорректных задач определяются неизвестные свойства объектов. Содержание обратной задачи (1.2.28)–(1.2.30) и полученное ее решение в виде теорем 1.2.2, 1.2.3 расширяют кругозор студентов в области волновых и электромагнитных процессов, способствуют реализации их профессиональной ориентации, являются условием установления межпредметных связей. В процессе ее решения у студентов формируются умения применять полученные знания в своей будущей профессиональной деятельности по таким математическим дисциплинам, как геометрия, математический и функциональный анализ, интегральные и дифференциальные уравнения.

3. Развивающая функция. Способствует формированию и развитию логического мышления, памяти, творческой активности, самостоятельности и сообразительности студентов. В процессе решения обратной задачи (1.2.28)–(1.2.30) студенты осмысливают ее постановку, физический смысл исследуемого процесса. Применяют формулу Даламбера для обращения гиперболического оператора $(\partial^2 / \partial t^2) - (\partial^2 / \partial x^2)$. С помощью метода последовательных приближений доказывают что уравнение (1.2.33) определяет единственное непрерывное решение. Само доказательство является трудоемким, требует от студентов знаний и умений вычисления повторных интегралов, норм функций, равномерной сходимости функциональных рядов и других. Дальнейшее исследование обратной задачи (1.2.28)–(1.2.30) предполагает построение замкнутой системы интегро-дифференциальных уравнений обратной задачи, умений сделать логические выводы, позволяющие выявить условия согласования данных обратной задачи, умений доказать теоремы 1.2.2, 1.2.3.

4. Воспитывающая функция. Раскрытие научно-образовательного потенциала обучения обратным и некорректным задачамспособствует формированию у студентов научного мировоззрения, любви к природе, нацеливает на бережное отношение к природным ресурсам. По результатам решения данной обратной задачи (1.2.28)–(1.2.30), определив неизвестный коэффициент $a(x)$, можно сделать логические выводы об экологическом состоянии окружающей среды и возможных последствиях его изменения и другие выводы, которые конкретизируются физической постановкой обратной задачи для дифференциального уравнения (1.2.28)–(1.2.30).

5. Управляющая функция. Решение обратных и некорректных задач, являясь целенаправленным процессом, создает определенные условия для достижения результатов обучения и воспитания. Управляющий характер решения обратных задач способствует реализации дидактических принципов направленности обучения, систематичности и последовательности. При решении обратной задачи (1.2.28)–(1.2.30) студенты целенаправленно применяют математический метод при ее решении, состоящее из строго определенной последовательности действий, определяемыми двумя этапами. На первом этапе студенты строят эквивалентное интегральное уравнение Вольтера второго рода относительно решения прямой задачи в предположении, что искомый коэффициент является известной непрерывной функцией. Применяя метод последовательных приближений, студентыдоказывают факт существования единственного решения этого интегрального уравнения. Исследуются свойства этого решения. На втором этапе студенты строят замкнутую систему интегро-дифференциальных уравнений Вольтера второго рода обратной задачи и применяя теорему С. Банаха доказывают локальную теорему существования и единственности решения рассматриваемой обратной задачи. После чего доказывают соответствующие теоремы 1.2.2, 1.2.3.

6. Иллюстративная функция. Обратные и некорректные задачи представляют собой математическую модель в виде различных уравнений, которые рассматриваются совместно с начальными и (или) граничными условиями, и дополнительной информацией, представляющей собой отклик исследуемого объекта (глубинные участки земной среды, дно мирового океана и т.д.), приобретаемый при помощи различных измерительных приборов. Построение данной математической модели основано, как правило, на формулировке законов, связывающих причины со следствиями. Деятельность студентовпо решению обратных и некорректных задач позволяет формировать и развивать специальные умения и навыки в познании окружающего мира. Решая обратную задачу (1.2.28)–(1.2.30), заключающуюся в определении свойств среды (коэффициент $a(x)$), где протекают волновые, электромагнитные и другие процессы, студентыосознают тот факт, что с помощью математического моделирования можно получить новую информацию о свойствах различных физических сред и объектов.

7. *Формирование и развитие межпредметных умений.* Содержание курса обратных и некорректных задач опирается на содержание учебных курсов математического анализа, функционального анализа, алгебры и геометрии, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, методов оптимизации, интегральных уравнений, численных методов и демонстрирует широкое применение математического аппарата для изучения физических процессов и явлений. Для успешного обучения решению обратных и некорректных задач нужны прочные знания по перечисленным выше математическим дисциплинам.

При решении обратной задачи (1.2.28)–(1.2.30) студентам необходимо успешно применять знания по математическому анализу (выполнение операций дифференцирования и интегрирования, вычисление определенных и кратных интегралов, норм функций, вычисление равномерной сходимости функциональных рядов и др.), функциональному анализу (знание и понимание нормированных пространств непрерывных функций, банаховых пространств непрерывных функций, метода последовательных приближений, теоремы С.Банаха и др.), дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка (понимание постановки обратной задачи для уравнения гиперболического типа – уравнения колебания неоднородной неограниченной струны, знание и понимание формулы Даламбера, характеристического треугольника гиперболического оператора второго порядка и др.), интегральным уравнениям (знание методов решения интегрального уравнения Вольтера второго рода, метода нахождения решения замкнутой, относительно искомых функций, системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтера второго рода и др.).

8.Формирование и развитие общеучебных умений и способностей. Обратные и некорректные задачи представляют собой причинно-следственные задачи – определяются неизвестные причины по известным следствиям. В ходе решения таких прикладных задач анализируется сам исследуемый физический процесс, явление или объект, что во многом может подсказать выбор математического метода решения или навести на мысль применить новый, более эффективный метод решения. Тем более что обратные и некорректные задачи являются, как правило, условно-корректными задачами. Постановка обратной задачи (1.2.28–(1.2.30) иллюстрирует тот факт, что исследуемые свойства физических объектов, где протекают волновые и электромагнитные процессы, на границе раздела среды не меняют своих качеств (коэффициент $a(x)$ не терпит конечных или бесконечных скачков). Это замечание позволяет применить метод Даламбера, с помощью которого можно выписать соответствующее интегральное уравнение и в дальнейшем продолжить исследование обратной задачи (1.2.28)–(1.2.30).

9. Контрольно-оценочная функция. Успешное решение обратных и некорректных задач является достоверным способом проверки знаний и умений студентов не только по обратным и некорректным задачам, но и по многим математическим дисциплинам, которые им преподавались ранее: математический анализ, функциональный анализ, алгебра и геометрия, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, методы оптимизации, интегральные уравнения, численные методы и др. По результатам решения студентами обратной задачи (1.2.28)–(1.2.30) можно сделать выводы о качестве их знаний, полученных ими впроцессе учебы по математическому и функциональному анализу, дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка, интегральным уравнения Вольтера второго рода.

Выявленные выше и подтвержденные примерами научно-методические аспекты обучения наглядно свидетельствуют о научно-образовательном потенциале, способствующем фундаментализации обучения ОНЗ студенты педагогических вузов. Доказано, что формирование научного мировоззрения, реализация прикладной направленности, реализация междисциплинарных связей, реализация психологических аспектов обучения, формирование логического мышления и алгоритмического мышления, развитие информационного мышления являются важными факторами фундаментализации обучения ОНЗ. Эти факторы должны быть учтены в целях и принципах обучения ОНЗ студентов педагогических вузов.

1.3 Дидактические принципы в обучении студентов решению обратных и некорректных задач в педагогическом вузе

Внедрение математических методов в различные сферы профессиональной деятельности многих специалистов требует создания и использования инструмента математического моделирования для решения разнообразных прикладных задач. Это связано, прежде всего, с тем, что математическое моделирование процессов и явлений в разных научных областях является одним из основных способов получения новых знаний и технологических решений. И для осуществления математического моделирования специалист в области прикладной математики для решения прикладных задач должен знать определенный набор методов математической физики и владеть способами компьютерной программной реализации вычислительных алгоритмов их решения.

Цели обучения являются системообразующим фактором любой методической системы. Именно цели позволяют осуществить отбор содержания обучения согласно учебным планам, типовым и рабочим программам конкретных учебных курсов. Вопросам постановки целей и их роли в методической системе обучения посвящены работы А.Е. Абылкасымовой, А.А. Аданникова Е.А. Алонцевой, С.И. Архангельского, М.А. Бектемесова, В.В.Беликова, В.П.Беспалько, Е.Ы.Бидайбекова, В.И.Загвязинского, А.К.Кагазбаевой, Г.Б. Камаловой, В.С. Корнилова, В.В. Краевского, В.С.Леднева, Е.У.Медеуова, В.М. Монахова, А.Г. Мордковича, И.П. Подласого, А.М. Пышкало, Е.Ж. Смагулова, Н.Л. Стефанова, Ж. Сулейменова, А.В.Хуторского и других авторов [8, 17, 18, 92, 121, 104,152-154, 156-158].

Цель обучения определяет конкретные задачи обучения и воспитания, содержание обучения, инициирует выбор средств, методов и форм обучения. При формировании целей обучения решению ОНЗ студентов необходимо учитывать дидактические принципы обучения, которые являются научно обоснованными рекомендациями и правилами, регулирующими процесс обучения.

Сформулируем систему целей обучения решению ОНЗ студентов педагогических вузов:

- реализовать научно-образовательный потенциал обучения обратным и некорректным задачам;

-обучить студентов современным методам исследования обратных и некорректных задач;

- развивать у студентов умения и навыки самостоятельно подбирать математические методы исследования обратных и некорректных задач и интерпретации результатов исследования;

- научить студентов умению самостоятельно работать со специальной математической литературой, добывать и осознанно применять полученные знания в своей будущей профессиональной деятельности.

При обучении решению ОНЗ студентов реализуются дидактические принципы обучения, такие, как принцип научности,принцип доступности, принцип наглядности, принцип системности, принцип связи теории с практикой, принцип профессиональной направленности, принцип междисциплинарных связей и другие дидактические принципы обучения.

Рассмотрим подробнее некоторые из них.

Реализация принципа научности в обучении решению ОНЗ студентов. Согласно исследованиям С.И. Архангельского, А.Г. Асмолова, Ю.К. Бабанского, В.П. Беспалько, В.В. Давыдова, Л.Я. Зориной**,** В.В.Краевского, И.П. Подласого, А.В. Хуторского и других ученых [152, 154, 156, 158], принцип научности обучения заключается в необходимости формирования у студентов системы фундаментальных научных знаний, которые способствуют развитию личности студента. Данный принцип предполагает соответствие содержания обучения современным достижениям науки и опыту, накопленному мировой цивилизацией и требует, чтобы такое содержание обучения было направлено на ознакомление студентов с основными теориями и концепциями конкретной научной области. И.П. Подласый[156] отмечает, что наука в жизни человека играет важную роль, поэтому образование направлено на вооружение системой знаний об объективной действительности.

Принцип научности в обучениирешению ОНЗ студентов требует от преподавателя знания научно обоснованной методики обучения решению ОНЗ студентов ; знания теории и практики ОНЗ; опыта и умений применении теории и практики ОНЗ в решении прикладных математических задач. Этот принцип опирается на закономерную связь между современными методами прикладной и вычислительной математикой и содержанием учебного процесса по обучению решению ОНЗ студентов некорректные задачи». Он требует, чтобы в процессе обучения студенты овладевали фундаментальными основами теории и методологии исследования ОНЗ. Принцип научности обучения решению ОНЗ студентов требует развития у них умений и навыков нахождения аналитического метода решения математических задач, выбора или разработки численного решения прикладных задач, интерпретации полученных решений математического, прикладного, вести научный спор, доказывать свою точку зрения.

Принцип научности обучения решению ОНЗ студентов обязывает преподавателя в процессе обучения обосновывать потребность в теории и практике ОНЗ при исследовании многих физических, биологических, химических и других процессов и явлений.

Рассмотрим учебную задачу – обратную задачу восстановления конечной якобиевой матрицы по некоторым функционалам от ее спектральных данных [47]. При изложении решения этой обратной задачи, студентам вначале демонстрируется исследование прямой задачи спектрального анализа для якобиевой матрицы, которая представляет собой задачу построения ее собственных чисел и соответствующих собственных векторов.

В комплексном гильбертовом пространстве $l_2(0, N-1)$ последовательностей $u = (u_0, u_1, ..., u_{N-1})$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \sum_{j=0}^{N-1} u_j \bar{v}_j , \qquad u, v \in \mathbb{C}^{N},$$

рассмотрим разностный оператор

$$(Au)_j = a_{j-1} u_{j-1} + a_j u_{j+1} + b_j u_j , \quad j = \overline{0, N-1} \tag{1.3.1}$$

в котором, по определению считаем, что

$$u_{-1} = 0,\ u_N = 0,\ a_{-1} = 0,\ a_j \neq 0,\ b_j \in R, \quad j = \overline{0, N-1} \tag{1.3.2}$$

В матричном виде оператор A записывается в виде трехдиагональной матрицы

$$Au = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ & & & \ldots\ldots\ldots & & \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 & a_{N-3} & b_{N-2} & a_{N-2} & \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 & & a_{N-2} & b_{N-1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix},$$

которая при $a_j \neq 0$ называется якобиевой матрицей.

Так как матрица A самосопряженная, у нее существует ровно N (с учетом кратности) вещественных собственных значений λ_k, $k = \overline{0, N}$ и N собственных векторов e^k, которые образуют ортонормированный базис в пространстве $l_2(0, N-1)$.

Из теории якобиевых матриц известно, что все собственные значения λ_k различны и, следовательно, не ограничивая общности можно считать, что $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N$.

Итак, пусть $u_j = p_j(\lambda)$ – решение разностной задачи Коши

$$Au = \lambda u, \; u_{-1} = 0, \; u_0 = 1, \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{1.3.3}$$

Прямая задача. По заданному оператору A построить его спектр $\{\lambda_k\}$ и базис из собственных ортонормированных функций $\{e^k\}$.

Из (1.3.1)–(1.3.3) последовательно находится

$$(Au)_0 = a_0 u_1 + b_0 u_0 = \lambda u_0, \; u_1 = \frac{\lambda - b_0}{a_0}.$$

Далее

$$(Au)_1 = a_0 u_0 + a_1 u_2 + b_1 u_1 = \lambda u_1,$$

$$u_2 = \frac{\lambda u_1 - b_1 u_1 - a_0 u_0}{a_1} = ((\lambda - b_1)(\lambda - b_0) a_0^{-1} - a_0)/a_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(Au)_{N-1} = a_{N-2} u_{N-2} + a_{N-1} u_N + b_{N-1} u_{N-1} = \lambda u_{N-1},$$

$$u_N = \frac{\lambda u_{N-1} - b_{N-1} u_{N-1} - a_{N-2} u_{N-2}}{a_{N-1}}.$$

Заметим, что $u_N = u_N(\lambda) = p_N(\lambda)$ – многочлен степени N. Так, как по условию (1.3.2) $u_N = 0$, приравнивая $p_N(\lambda)$ нулю можно найти корни полученного нелинейного уравнения (указать приближенные методы), то есть искомые собственные значения λ_k, $k = \overline{1, N}$ и соответствующие им собственные вектора оператора A:

$$p(\lambda_k) = (p_0(\lambda_k), p_1(\lambda_k), \ldots, p_{N-1}(\lambda_k)), \qquad k = \overline{1, N}$$

Полагая

$$e^k = \frac{p(\lambda_k)}{\| p(\lambda_k) \|}, \quad k = \overline{1,N}, \tag{1.3.4}$$

получаем полную ортогональную систему собственных векторов оператора A.

Таким образом, решена прямая задача спектрального анализа: по заданному оператору A построен его спектр $\{\lambda_k\}$ и базис из собственных ортонормированных функций $\{e^k\}$. А теперь рассмотрим обратную задачу.

Обратная задача 1.3.1. Восстановить неизвестный оператор A по известному спектру $\{\lambda_k\}$ и полному набору собственных векторов $\{e^k\}$.

Оператор A можно восстановить по известной формуле спектрального разложения самосопряженного оператора

$$A = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k Q_k, \tag{1.3.5}$$

где Q_k – оператор проектирования на вектор e^k:

$$Q_k u = (u, e^k) e^k.$$

Однако в нашем случае оператор A имеет специальную трехдиагональную структуру, и поэтому естественно ожидать, что его можно восстановить, пользуясь лишь частью спектральной информации $\{e^k, \lambda_k\}$.

Рассмотрим одну из постановок обратной задачи.

Обратная задача 1.3.2. Рассмотрим случай, когда в операторе A неизвестной является главная диагональ, т.е. числа b_j, а числа a_j заданы.

Простой пример двух операторов

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

с одинаковыми собственными числами: $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, показывает, что одного спектра $\{\lambda_k\}$ недостаточно для однозначного восстановления его главной диагонали. Необходимо иметь еще некоторую информацию о собственных векторах.

Формула разложения в ряд Фурье по собственным векторам

$$f = \sum_{k=1}^{N} (f, e^k) e^k, \qquad f \in l_2(0, N-1) \tag{1.3.6}$$

а также формула (1.3.5) подсказывают в качестве дополнительной информации следующий набор функционалов от $e^k = (e_0^k, e_1^k, \ldots, e_{N-1}^k)$:

$$\chi_k = (f, e^k)e_0^k = (Q_k f)_0, \quad k = \overline{1, N}, \tag{1.3.7}$$

где f – некоторый заданный вектор.

Ввиду ограниченности объема диссертации, для краткости записи, схему конструкции алгоритма восстановления $\operatorname{diag} A$ по спектральным данным S_f опустим, но сформулируем полученный результат в виде теоремы без доказательства, которая иллюстрирует единственность решения обратной задачи 1.3.2.

Теорема 1.3.1. Пусть $f \in l_2(0, N-1)$, $f_j \neq 0$ *для всех* $j = \overline{0, N-1}$. *Тогда спектральные данные* $S_f = \{\lambda_k, \chi_k\}$, $k = \overline{1, N}$, *однозначно определяют* $\operatorname{diag} A = \{b_0, b_1, \ldots, b_{N-1}\}$.

В данном случае магистрантам необходимо привести важное замечание.

Замечание 1.3.1. Поскольку число элементов в S_f равно $2N$, а число параметров, задающих матрицу A (т.е. чисел a_k, b_k), равно $2N-1$, возникает вопрос: нельзя ли по S_f восстановить весь оператор A?

Следующий пример показывает, что это не так.

Пример 1.3.1. Пусть $N = 2$. Тогда операторы

$$A_{\pm} = \frac{1}{6\left(2 \pm \sqrt{2}\right)} \begin{pmatrix} 11 \pm 6\sqrt{2} & 3 \pm \sqrt{2} \\ 3 \pm \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

имеют одни и те же спектральные данные

$$S_f = \{\lambda_1, \lambda_2, \chi_1, \chi_2\}, \quad f = (1,1),$$
$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1, \ \chi_1 = -\frac{1}{6}, \ \chi_2 = \frac{7}{6}.$$

Очевидно, эта неединственность связана с нелинейностью задачи.

Реализация принципа доступности в обучении решению ОНЗ студентов. Принцип доступности обучения, который был сформулирован Я.А. Коменским [110], на практике реализуется через следующие правила: от простого к сложному, от известного к неизвестному. По мнению И.П. Подласого[156, 157], в основе принципа доступности лежит закон тезауруса: доступным для человека является лишь то, что соответствует его тезаурусу. Согласно этому принципу, обучение студентов должно осуществляться на уровне реальных учебных возможностей, чтобы не возникало физических, моральных и интеллектуальных перегрузок, негативно отражающихся на их физическом и психологическом здоровье.

Принцип доступности в обучениирешению ОНЗ студентов реализует общенаучный принцип преемственности, последовательности и постепенности обучения и на практике реализуется через поэтапное овладение студентом основ теории и практики ОНЗ, предполагает наличие знаний по математическому, функциональному, векторному анализу, алгебре, геометрии, численным методам, обыкновенным дифференциальным уравнениям, дифференциальным уравнениям в частных производных, методам оптимизации и другим предметным областям. Вначале обучения рассматриваются простые постановки ОНЗ, при исследовании которых демонстрируются разнообразные методы и подходы, методология теории ОНЗ. В дальнейшем предлагаются более сложные ОНЗ для исследования. Для решения таких задач могут быть применены уже изученные студентами математические методы.

Одним из методов решения обратных задач для дифференциальных уравнений может быть использован метод характеристик.

Приведем пример обратной задачи.

Обратная задача 1.3.3. Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка с данными Коши [24]:

$$U_x - U_t = q(x)U, \qquad (x,t) \in R^2, \tag{1.3.8}$$

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad x \in R, \tag{1.3.9}$$

где коэффициент $q(x)$ неизвестен.

Требуется из соотношений (1.3.8), (1.3.9) вычислить коэффициент $q(x)$, если о решении прямой задачи (1.3.8), (1.3.9) известна дополнительная информация вида

$$U(0,t) = \psi(t), \quad t \in R. \tag{1.3.10}$$

При этом считается, что $\varphi(x) \neq 0$, $x \in R$.

Для решения этой обратной задачи применим метод характеристик. Для чего рассмотрев уравнение (1.3.8) вдоль прямой $t + x = t_0 + x_0$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$Z'(x) = q(x)\,Z(x), \tag{1.3.11}$$

где $Z(x) = U(x, -x + x_0 + t_0)$. Тогда имеем

$$Z(x) = Z(x_0)\,\exp\left(\int_{x_0}^{x} q(\xi)\,d\xi\right). \tag{1.3.12}$$

Или

$$U(x, -x + x_0 + t_0) = U(x_0, t_0)\ \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} q(\xi)\, d\xi \right)$$

При $x = x_0 + t_0$ имеем

$$U(x_0, t_0) = U(x_0 + t_0,\ 0)\ \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x_0 + t_0} q(\xi)\, d\xi \right).$$

Откуда несложно получить решение прямой задачи (1.3.8), (1.3.9) в виде формулы

$$U(x,t) = \varphi(x + t)\ \exp\left(\int\limits_{x+t}^{x} q(\xi)\, d\xi \right), \quad (x,t) \in R^2. \tag{1.3.13}$$

Откуда следует, что при

$$\varphi(x) \in C^1(R), \tag{1.3.14}$$

существует классическое решение $U(x,t) \in C^1\left(R^2\right)$ данной прямой задачи. После несложных выкладок, находится решение обратной задачи (1.3.8)–(1.3.10)

$$q(t) = -\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{\psi(t)}{\varphi(t)} \right) \right], \ t \in R. \tag{1.3.15}$$

Из (1.3.15) следует, что для существования единственного решения обратной задачи (1.3.8)–(1.3.10) необходимо и достаточно, чтобы функция $\psi(t)$, как дополнительная информация прямой задачи (1.3.8), (1.3.9) обладала свойствами:

$$\psi(t) \in C^1(R),\ \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} > 0,\ t \in R,\ \psi(0) = \varphi(0)$$

(условие согласования данных обратной задачи (1.3.8)–(1.3.10)).

До студентов, доводятся сведения о том, что метод характеристик может быть использован при решении более сложных обратных задач.

Приведем одну из постановок обратных задач для гиперболического уравнения, при решении которой используется метод характеристик.

Студентам предлагается исследовать обратную задачу определения неизвестного коэффициента $a^{+}(x)$ в области $(x,t) \in D^{-} \cup D^{+}$, $D^{-} = \{(x,t) | \, t > -x > 0\}$, $D^{+} = \{(x,t) | \, t > x > 0\}$ из дифференциального уравнения в частных производных гиперболического типа при начальных и граничных условиях

$$U_{tt} = U_{xx} - a^{+}(x) U_{t}, \quad (x,t) \in D^{-} \cup D^{+}, \tag{1.3.16}$$

$$U(x, |x|) = \lambda(x), \quad x \in R, \tag{1.3.17}$$

$$[U]_{x=0} = 0, \ [U_x]_{x=0} = 0, \tag{1.3.18}$$

$$U(+0, t) = f(t), \ t > 0. \tag{1.3.19}$$

Для исследования свойств решения прямой задачи (1.3.16)–(1.3.19) и, в дальнейшем, построения системы уравнений обратной задачи, студенты реализуют метод характеристик, с помощью которого дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка (1.3.16) может быть сведено к системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu_i \frac{\partial}{\partial x} \right) P_i = \Phi_i, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{1.3.20}$$

$$\left. \begin{aligned} & P_1(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) U(x,t), \\ & P_2(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) U(x,t), \ P_3(x,t) = U(x,t), \\ & \Phi_i(x,t) = - a(x) U_t(x,t), \quad i = 1, 2, \\ & \Phi_3(x,t) = \frac{1}{2} \big(P_1(x,t) + P_2(x,t) \big), \ \nu_1 = -1, \ \nu_2 = 1, \ \nu_3 = 0 \end{aligned} \right\} \tag{1.3.21}$$

а соотношения (1.3.18), (1.3.19) к виду

$$
\left.
\begin{aligned}
&P_1\Big|_{t=x} = \beta_1(x), \quad \beta_1(x) = -\frac{1}{2}\,a^+(x)\,\lambda^+(x), \; x > 0; \\
&P_2\Big|_{t=-x} = \beta_2(x), \quad \beta_2(x) = \frac{1}{2}\,a^-\,\lambda^-(x), \; x < 0; \\
&P_3\Big|_{t=|x|} = \lambda(x), \quad x \in R.
\end{aligned}
\right\} \qquad (1.3.22)
$$

После чего, применяя методы исследования подобных обратных задач, разработанные В.Г. Романовым [24, 69-75], студенты строят систему нелинейных интегральных уравнений Вольтера второго рода относительно функций $x^2 - 4x + 4 = 0$. Данная система уравнений имеет малый параметр. Это обстоятельство позволяет студентам применить в малой области принцип сжатых отображений и доказать корректность решения обратной задачи. Приведем эти результаты.

Лемма 1.3.1. Если $x^2 + 4x + 4 = 0$, то $x^2 + 10x + 25 = 0$, $t > 0,\ x = +0$ и $f(+0) = -\frac{1}{2}\alpha$.

Теорема 1.3.2. Пусть $f(t) \in C^1(0,T)$ и $f(+0) = -\frac{1}{2}\alpha$. Тогда при малом $T > 0$ и $x \in \left(0, \frac{T}{2}\right)$ решение обратной задачи (1.3.16)–(1.3.19) существует, единственно и принадлежит классу $C\left[0, \frac{T}{2}\right]$.

Пусть $Q^+(M,T) = \left\{ a^+(x) \;\middle|\; \| a^+ \|_{C\left[0,\frac{T}{2}\right]} \le M \right\}$.

Теорема 1.3.3. Пусть $a^+(x),\ \bar{a}^+(x) \in Q^+(M,T)$ и $f(t),\ \bar{f}(t) \in C^1(0,T)$ – дополнительная информация о решении прямой задачи (1.3.16)–(1.3.19) при $t > 0,\ x = +0$. Тогда

$$
\| a^+(x) - \bar{a}^+(x) \|_{C\left[0,\frac{T}{2}\right]} \le C \| f'(t) - \bar{f}'(t) \|_{C[0,T]},
$$

C– константа.

Реализация принципа наглядности в обучении решению ОНЗ студентов. Принцип наглядности – один из самых известных принципов обучения. Накопленный многолетний опыт обучения и специальные психолого-педагогические исследования показали, что эффективность обучения зависит от степени привлечения к восприятию всех органов чувств человека. Чем разнообразнее чувственные восприятия учебного материала, тем прочнее он усваивается. Эта закономерность давно нашла свое выражение в дидактическом принципе наглядности, в обоснование которого внесли существенный вклад

Г. Песталоцци [110, с.362], который показал необходимость сочетания наглядности со специальным мысленным формированием понятий; Я.Л. Коменский [110, с.71], который сформулировал «золотое правило дидактики», требующее привлекать к обучению все органы чувств.

Наглядность в обучении решению ОНЗ понимается какясность и доступность изложенного материала на лекционных занятиях; разъяснение наиболее сложных разделов теории и методологии ОНЗ; доказательство теорем существования, единственности и устойчивости ОНЗ, построение конструктивных вычислительных алгоритмов нахождения приближенных решений ОНЗ. Наглядность в обучении решению ОНЗ студентов представляет собой комплекс средств, методов, приемов, обеспечивающих четкое и ясное понимание студентами фундаментальных основ теории и практики ОНЗ, глубокое осмысление подходов к выбору или самостоятельной разработке новых эффективных методов решения ОНЗ.

Реализация принципа системности в обучении решению ОНЗ студентов. Известно, что при реализации принципа системности в обучении у обучающихся формируется не только общее представление об изучаемой учебной дисциплине, но и приобретаются качественные знания по данной дисциплине, формирующиеся в результате умений и навыков решения учебных задач, связанных с содержанием обучения. Системный подход в обучении предполагает реализацию принципа единства педагогической теории, эксперимента и практики.

Я.А. Коменский [110, с.324] отмечал, что как в природе все сцепляется одно с другим, так и в обучении нужно связывать одно с другим именно так, а не иначе. И.П. Подласый [155, 156] считает, что процесс обучения, состоящий из отдельных шагов, протекает тем успешнее и приносит тем большие результаты, чем меньше в нем перерывов, нарушений последовательности, неуправляемых моментов. Реализация принципа системности в обучении предполагает разделение содержания учебного материала на логически завершенные части; разработку структурно-логической схемы учебного материала, облегчающую процесс усвоения знаний обучающимися; повторения пройденного материала по завершении каждого логически законченного модуля обучения; обобщения и систематизации пройденного учебного материала и другое.

Принцип системности в обучении решению ОНЗ студентовтребует, чтобы знания в области теории и практики ОНЗ, умения и навыки применения методов решения ОНЗ формировались в определенном порядке. Каждый новый элемент учебного материала по ОНЗ должен быть логически связан с другими, последующее изложение материала должно опираться на предыдущее.

При соблюдении логических связей, разделения содержания обучения решению ОНЗ студентовна логически завершенные части, способствует более прочному усвоению студентами тории и методологии исследования ОНЗ.

Приведем два примера на корректность или некорректность постановки задачи в зависимости от типов функциональных пространств, в которых ищется решение и задаются исходные данные. Данное обстоятельство важно донести до понимания студентов.

Пример 1.3.2. Рассматривается задача дифференцирования функции $f(x)$, известной приближенно.

Пусть $y(x)$ – производная функции $f(x)$: $y(x) = f'(x)$. Искаженная функция, например, $\bar{f}(x) = f(x) + A\sin(\omega x)$ в метрике пространства непрерывных функций C отличается от $f(x)$ на конечную величину

$$\left\| \bar{f} - f \right\|_C = \max_{a \le x \le b} \left| \bar{f} - f \right| = \max_{a \le x \le b} \left| A\sin(\omega x) \right| = |A|$$

при любых значениях ω.

При этом, производная $\bar{y}(x) = \bar{f}'(x) = f'(x) + A\omega\cos(\omega x)$ отличается от $y(x) = f'(x)$ в метрике пространства непрерывных функций C на величину $|A\omega|$: $\left\| \bar{y} - y \right\|_C = \max\limits_{a \le x \le b} \left| \bar{f} - f \right| = \max\limits_{a \le x \le b} \left| A\omega\cos(\omega x) \right| = |A\omega|$, которая может оказаться большой при больших значениях $|\omega|$.

Таким образом, задача дифференцирования не обладает свойством устойчивости в пространстве непрерывных функций C, так как нарушается третий пункт корректности по Адамару.

Пример 1.3.3. Рассмотрим предыдущую задачу на другой паре пространств: уклонение $\bar{y}(x)$ от $y(x)$ будем рассматривать в пространстве непрерывных функций C, а уклонение $\bar{f}(x)$ от $f(x)$ в пространстве непрерывно дифференцируемых функций C^1.

Имеем

$$\left\| \bar{y} - y \right\|_C = \max_{a \le x \le b} \left| \bar{f}(x) - f(x) \right|,$$

$$\left\| \bar{f} - f \right\|_{C^1} = \max_{a \le x \le b} \left[\left| \bar{f}(x) - f(x) \right| + \left| \bar{f}'(x) - f'(x) \right| \right].$$

или

$$\left\| \bar{y} - y \right\|_C = |A\omega|$$

$$\left\| \bar{f} - f \right\|_{C^1} = \max_{a \le x \le b} \left[\left| A\sin(\omega x) \right| + \left| A\omega\cos(\omega x) \right| \right] = |A| = |A\omega|.$$

Теперь уже нельзя сказать, что при конечной норме $\left\| \bar{f} - f \right\|_{C^1}$ норма $\left\| \bar{y} - y \right\|_C$ может быть произвольно большой, а можно говорить, что при конечных $|A|$ и $|\omega|$ уклонение $\left\| \bar{y} - y \right\|_C$ также конечно.

Таким образом, задача дифференцирования в паре пространств (C, C^1) $y(x) \in C$ корректна.

Реализация принципа связи теории и практики в обучении решению ОНЗ. Принцип связи теории с практикой в обучении, как известно, связан с положением классической философии и современной гносеологии о том, что практика является критерием истины, источником познавательной деятельности и областью приложения результатов обучения. Принцип связи теории с практикой в обучении обязывает, чтобы процесс обучения стимулировал обучающихся использовать полученные знания в решении прикладных задач и реализуется при обучении многим учебным дисциплинам. Данный принцип опирается на педагогические, психологические, философские положения, играющие роль закономерных начал.

Проблеме реализации принципа связи теории с практикой при обучении, эффективности внедрения теории в педагогическую практику обучения и воспитания, методологической проблемы взаимосвязи педагогической теории и практики как целостного, системного процесса посвящены труды Ю.К. Бабанского, Л.С. Выготского, П.Я. Гальперина, Я.А. Коменского, В.В. Краевского, И.Г. Песталоцци, И.П. Подласого, К.Д. Ушинского, А.В. Хуторскогои других ученых [110, 154, 156-161]. По мнению П.Я. Гальперина [161] человек лучше запоминает те знания, которые использовал в каких-то собственных действиях, применил к решению каких-то реальных задач. Положениями, играющими роль закономерных начал принципов обучения, как отмечает И.П. Подласый[156], являются эффективность, и качество обучения проверяются и подтверждаются на практике; практика является критерием истины и источником познавательной деятельности; практика – это область приложения результатов обучения; чем больше приобретаемые обучающимися знания применяются в практике, тем выше их сознательность к обучению и другие положения.

Принцип связи теории с практикой в обучении решению ОНЗ проявляется в том, что сама теория ОНЗ представляет собой единство теории и эксперимента и имеет отношение ко всем трем методам человеческого познания: к теории, эксперименту и философии. Многие прикладные исследования, в которых решающее слово остается за экспериментом, сталкиваются с решением ОНЗ.

При определении содержания обучения решению ОНЗ большое внимание уделяется прикладным аспектам теории обратных задач. Акцентируется внимание студентов на то, что ОНЗ являются прикладными задачами многих областей знаний.

При определении теплофизических или фильтрационных параметров среды, а также плотности распределения тепловых источников естественным образом возникают обратные задачи для уравнений параболического типа. Рассмотрим одну из таких обратных задач.

Обратная задача 1.3.4. Пусть в области $y \geq 0$, пространства переменных x, y, t, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, $t \geq 0$, функция $U(x,y,t)$ удовлетворяет параболическому уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \varphi(t) \cdot f(x, y) \tag{1.3.23}$$

при начальных и граничных условиях

$$U(x,y,0)=0,\ \left(U_y+hU\right)\Big|_{y=0}=0, \tag{1.3.24}$$

где $\varphi(t)$ – заданная функция, h– известная константа, $f(x,y)$ – неизвестная функция.

Постановка обратной задачи. Из соотношений (1.3.23), (1.3.24) определить плотность тепловых источников $f(x,y)$, действующих в полупространстве $y \geq 0$, если о решении прямой задачи (1.3.23), (1.3.24) известна дополнительная информация вида:

$$U(x,0,t) = F(x,t). \tag{1.3.25}$$

Обратная задача (1.3.23)– (1.3.25) имеет конкретный физический смысл. Если функция $\varphi(t) = \exp(-\lambda_0 t)$, то она связана с задачей определения плотности радиоактивных источников тепла по тепловому излучению на поверхности Земли. При этом λ_0 – период полураспада радиоактивного элемента.

Реализация принципа междисциплинарных связей в обучении решению ОНЗ. В педагогике большое внимание уделяется проблеме междисциплинарных связей, выражающих всевозможные объективно существующие связи между содержанием различных учебных дисциплин. В свое время междисциплинарным связям уделяли внимание И.Ф. Гербарт, А. Дистервег, Я.А. Коменский, Д. Локк, В.Ф. Одоевский, И.Г. Песталоцци, К.Д. Ушинский и другие. Я.А. Коменский [110] замечает, что все, что находится во взаимной связи, должно преподаваться в такой же связи.

В настоящее время многие ученые и педагоги свои исследования посвящают проблеме реализации междисциплинарных связей [94, 104, 121, 122, 125, 127, 162]. Актуальность проблемы реализации междисциплинарных связей в процессе обучения в высших учебных учреждениях, обуславливается необходимостью высокой степени интеграции общественных, естественнонаучных и технических знаний для осуществления инновационных педагогических технологий.

Междисциплинарные связи в процессе обучения студентов реализуют комплексный подход к их воспитанию и обучению, устанавливают взаимосвязи между учебными предметами, раскрывают гносеологические проблемы.

Математическое моделирование является одним из основных путей реализации междисциплинарных связей при обучении решению ОНЗ. В процессе такого обучения междисциплинарные связи реализуются не только с общеобразовательными и специальными курсами – математического анализа, функционального анализа, векторного анализа, алгебры, геометрии, методов оптимизации, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, интегральных уравнений, численных методов,но и с учебными курсами физики, химии, биологии, экологии, информатики и другими учебными курсами.

В качестве примера, изложим более подробно реализацию междисциплинарных связей обучения ОНЗ с информатикой.

В настоящее время с развитием информатики как научной дисциплины, завоевывает новые позиции в различных областях человеческой деятельности информационно-математическое моделирование, как один из важных инструментов познания окружающего мира. Неудивительно, что сегодня проявляется большой интерес к развитию методических систем обучения информатике в вузе, в процессе которого студенты осваивают инновационные методы научного познания происходящих различных информационных процессов.

Очевидно, что многим специалистам различных специальностей, в том числе в области прикладной математики, необходимо не только владеть концепциями и методами информационно-математического моделирования, но и иметь представление об инструментарии, применяемом при моделировании.

Стремительное развитие теории и практики обратных задач для дифференциальных уравнений во многом обусловлено возможностью эффективного исследования свойств труднодоступных или недоступных человеку объектов и процессов различной природы, определения их местоположения, формы, структуры включений и т.д., выявления их причинно-следственных связей с использованием современных информационных и телекоммуникационных технологий. По мнению В.Г. Романова[56], высказанному им еще в 1971 году, теория обратных задач, является информационной и предполагает информационно-математическую обработку информации о решении исследуемой прикладной задачи. Поэтому знание основ теории и методологии обратных задач является важным фактором формирования и развития информационного мышления у студентов вузов физико-математических и естественнонаучных направлений подготовки.

Современная прикладная математика характеризуется такими чертами, как анализ математических моделей, распределение идей оптимальности, повышение роли общих математических структур, распространение идей оптимальности, алгоритмизация, усиление делового характера, гуманитаризация и другие черты [31]. В связи с чем, реализация междисциплинарных связей в процессе обучения ОНЗ обуславливается необходимостью интеграции как естественнонаучных, так и гуманитарных знаний, которая позволяет не только сформировать у студентов систему фундаментальных знаний в области теории и методологии исследований ОНЗ, осмыслить их познавательный и образовательный потенциал, осмыслить гносеологические процессы в прикладной математике, но и выявить базовые понятия информатики, как научной дисциплины. К таким базовым понятиям информатики относятся: информация, моделирование, формализация, алгоритмизация, вычислительный эксперимент, синтаксис, семантика, компьютерная графика, информационные технологии и другие базовые понятия информатики.

В процессе обучения ОНЗ студенты исследуют различные математические модели ОНЗ, использующие как обыкновенные дифференциальные уравнения, так и уравнения в частных производных.

В качестве примера, для простоты изложения, рассмотрим одномерную обратную задачу для гиперболического уравнения [59].

В области $x \geq 0$, $t > 0$ рассматривается уравнение в частных производных второго порядка гиперболического типа

$$U_{tt} = a(x)U_{xx}, \quad a(x) > 0, \quad x > 0, \quad t > 0 \tag{1.3.26}$$

с начальными и граничными условиями

$$U\big|_{t<0} \equiv 0, \quad U_x\big|_{x=0} = \alpha \cdot \delta(t)\,(t > 0). \tag{1.3.27}$$

В (1.3.26), (1.3.27) $U = U(x,t)$, $U_{tt} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}U$, $U_{xx} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}U$, $a(x)$– неизвестная функция, $\delta(t)$– дельта-функция Дирака, α– заданная константа.

От студентов требуется из соотношений (1.3.26), (1.3.27) определить неизвестную функцию $a(x)$ по дополнительной информации о решении прямой задачи (1.3.26), (1.3.27) вида

$$U(0,t) = f(t), \quad t > 0 \tag{1.3.28}$$

Необходимо отметить, что в процессе обучения студентов доводятся сведения о том, что математические модели обратных задач для дифференциальных уравнений, и в частности, математическая модель (1.3.26)–(1.3.28), являются универсальными и способны описывать процессы различной природы. И этот универсализм повышает познавательный потенциал таких математических моделей. Студентам объясняется, что математические модели обратных задач являются универсальными, когда они носят синтаксический характер, когда семантика, содержательные знания и смысл моделируемого процесса остаются вне этой математической модели. В этом случае затруднительно сделать вывод о том, какой конкретно процесс описывается этой моделью.

Действительно, если в (1.3.26) функция $U(x,t)$ – смещение струны от положения равновесия, x – длина струны, t– время, а коэффициент $a = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$, где T– натяжение струны, а ρ– плотность струны, то уравнение (1.3.26) может описывать малые поперечные колебания струны без воздействия внешних сил. Если же в (1.3.26) $U(x,t)$ – продольное смещение в момент времени t элемента стержня с координатой x от своего положения равновесия, $a = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$, где E–

модуль Юнга материала стержня, ρ – плотность стержня, то (1.3.26) будет описывать продольные колебания стержня постоянного поперечного сечения. Теперь пусть $U(x,t)$ – напряжение или силу тока в момент времени t на элементах проводов, имеющих координату x, $a = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$, где L и C – распределенные индуктивность и емкость проводов на единицу длины. Тогда (1.3.26) будет уже описывать распространение электрических возмущений в линии при отсутствии потерь.

И еще один пример. Пусть $U(x,t)$ – напряженность электрического или магнитного полей, $a = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, где c– скорость света в вакууме, ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно. В этом случае уравнение (1.3.26) описывает плоские электромагнитные волны в непроводящих средах.

Учитывая эти замечания, студенты осознают, что методы исследования математических моделей обратных задач, их познавательный потенциал могут быть использованы при исследовании разнообразных по природе прикладных задач.

Таким образом, реализация междисциплинарных связей при обучении ОНЗ позволяет студентам не только сформировать фундаментальные знания в области теории и методологии ОНЗ, приобрести умения и навыки использования математических методов исследования прикладных задач, развить научное мировоззрение и творческие способности, но и пополнить свои знания как в области математического анализа, функционального анализа, алгебры и геометрии, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, методов оптимизации, интегральных уравнений, численных методов, так и в области некоторых базовых понятий информатики, как научной дисциплины, осмыслить их ценность и роль в познании окружающего мира.

Выводы попервому разделу

В процессе обучения решению ОНЗ на развитие личности магистрантовоказывают влияние не только приобретенные фундаментальные знания по физико-математическим дисциплинам, в том числе и ОНЗ, но и знания истории создания и развития теории и практики ОНЗ, вклада этой научной теории в развитии человеческой цивилизации. Понимание взаимосвязи в развитии теории и практики ОНЗ позволяет студентамглубже осознать специфику обучения решению ОНЗи методов их исследования.

По отношению к процессу обучения решению ОНЗ, междисциплинарные связи выступают в качестве дидактического условия, способствующего повышению научности и доступности обучения, значительному усилению познавательной деятельности.

Обучение решению ОНЗ оказывает позитивное влияние на развитие творческого мышления у студентов, которое позволяет им производить выбор наиболее эффективного математического метода решения конкретной прикладной задачи. В процессе исследования ОНЗ студентыприобретают умения и навыки применения разнообразных математических методов, которые им преподавались в учебных курсах математического, функционального, векторного анализа, аналитической геометрии, алгебры, интегральных уравнений и других учебных курсах, осознают широту их использования в исследованиях прикладных математических задач.

Необходимость использовать при составлении конструктивных алгоритмов решения ОНЗ позволяет студентамправильно устанавливать причинно-следственные связи. Это способствует развитию у них логического и алгоритмического мышления.

При использовании компьютерных технологий для реализации конструктивных алгоритмов решения ОНЗ у студентовразвивается информационное мышление, так как студенты обрабатывают различную информацию, реализуют математическое и информационное моделирование для изучения различных объектов и явлений, проводят вычислительные эксперименты для проверки правильности построенных моделей.

Учебные задачи в процессе обучения выполняют мотивационную, развивающую, познавательную, воспитывающую, управляющую, реализующую междисциплинарных связей, контрольно-оценочную и другие функции. Успешное решение ОНЗ является достоверным способом проверки знаний и умений студентов по таким дисциплинам, как математический анализ, функциональный анализ, векторный анализ, аналитическая геометрия, алгебра, интегральные уравнения, обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных и другим учебным дисциплинам.

Реализация дидактических принципов в обучении решению ОНЗ способствует повышению качества математической подготовки студентов в педагогическом вузе.

2 МЕТОДИКА ОРГАНИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ РЕШЕНИЮ ОБРАТНЫХ И НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В ПЕДАГОГИЧЕСКОМ ВУЗЕ

2.1 Содержание, методы и формы организации обучения решению обратных и некорректных задач

Содержание обучения решению обратных и некорректных задач

Отбор содержания обучения решению ОНЗ осуществлялся в соответствии со следующими критериями, разработанными как отечественными, так и российскими учеными [7, 9, 10, 21, 22, 36, 93-101, 103, 104, 131, 146, 154, 156, 157, 162]: единство учебного материала и содержательных линий; базовых знаний, умений, навыков и методов; логической спирали; обобщенности; полноты; оптимальности и ряд других.

Разработанное содержание обучения ОНЗ включает следующие разделы:

Введение. Обратные и некорректные задачи как область прикладной математики. Корректность и некорректность математической постановки задачи. Математические модели обратных и некорректных задач в познании окружающего мира. Исторические аспекты развития теории и практики обратных и некорректных задач.

Некорректные задачи. Некорректные задачи линейной алгебры. Некорректные задачи в математике. Регуляризация некорректно поставленных задач. Исследование некорректных задач как фактор обеспечения надежных результатов в задании коэффициентов и параметров математической модели, по которой проводятся расчеты.

Интегральные уравнения. Интегральные уравнения Вольтерра. Интегральные уравнения Фредгольма. Корректность и регуляризация. Роль интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма в теории обратных задач для дифференциальных уравнений.

Обратные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Обратные задачи определения коэффициентов линейных дифференциальных уравнений. Обратные задачи определения коэффициентов нелинейных дифференциальных уравнений. Обратные задачи определения правой части дифференциальных уравнений. Обратные задачи теории рассеяния. Обратные задачи управления. Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Роль обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений в развитии математических методов решения дифференциальных уравнений.

Обратные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных. Обратные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. Обратные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Обратные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Приближенные методы решения одномерных обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных параболического, гиперболического, эллиптического типов. Роль теории обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных в развитии прикладной и вычислительной математики.

Отметим особенностей некоторых ОНЗ.

Некорректные задачи линейной алгебры. При рассмотрении таких задач большое внимание уделяется решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Это продиктовано тем обстоятельством, что в процессе построения вычислительных алгоритмов решения широкого класса обратных задач для дифференциальных уравнений приходится иметь дело с поиском решений СЛАУ. Нахождение решений СЛАУ часто оказывается некорректной задачей, например, когда ее матрица плохо обусловленная. Наличие таких проблемных ситуаций требует выбора эффективного метода решения СЛАУ. Продемонстрируем алгоритм поиска решения различных СЛАУ.

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n = f_1 \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n = f_2 \\ \ldots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n = f_m \end{cases}$$

Эта система может быть записана в матричном виде: $Aq = f$, где A — действительная $m \times n$-матрица коэффициентов системы, такая, что $A: R^n \to R^m$, $f = (f_1, f_2, \ldots f_m)^T \in R^m$ — вектор-столбец правых частей, $q = (q_1, q_2, \ldots q_n)^T \in R^n$ — вектор-столбец неизвестных.

Определение 2.1.1. Система уравнений

$$A^T A q = A^T f \qquad (2.1.1)$$

называется нормальной системой по отношению к системе $Aq = f$.

Определение 2.1.2. Вектор $q_p \in R^n$, реализующий минимум нормы невязки

$$J(q) = \|Aq - f\|^2 \to \min \qquad (2.1.2)$$

называется псевдорешением системы $Aq = f$, т.е. $q_p = \arg\min_{q \in R^n} \|Aq - f\|^2$.

Нетрудно убедиться в том, что множество решений нормальной системы (2.1.1) совпадает с множеством псевдорешений системы $Aq = f$. Обозначим это множество через Q_f^p.

Определение 2.1.3. Нормальное относительно нулевого вектора (наименьшее по норме) псевдорешение системы $Aq = f$ называется нормальным псевдорешением этой системы (или нормальным обобщенным решением) и обозначается $q_{пр}$: $q_{пр} = \arg \min_{q_n \in Q_f^p} \|q_П\|$.

Случай невырожденной матрицы (определитель матрицы отличен от нуля).

а) Случай когда m<n. В этом случае система имеет бесконечно много решений. В случае, когда система уравнений имеет много решений, среди решений выбирается минимальное по норме, которое называется нормальным решением и обозначается $q_н$ и находится по формуле $q_н := \arg \min_{q \in Q_f(A)} \|q\|$.

б) Случай когда m=n. Рассмотрим случай невырожденной квадратной матрицы A. Теоретически этот случай можно считать хорошим в смысле существования и единственности решения. Однако в теории вычислительных методов невырожденные матрицы подразделяют на две категории: «плохо обусловленные» и «хорошо обусловленные». Плохо обусловленными называют матрицы, для которых решение системы уравнений практически является неустойчивым. Иначе говоря, небольшие погрешности в правой части системы или погрешности, неизбежно возникающие при численной реализации, приводят к существенному отклонению полученного решения от точного. Одной из важных характеристик практической устойчивости решения системы линейных уравнений является число обусловленности. Задача нахождения точного решения системы будет некорректной, если число обусловленности очень велико и корректной в противном случае.

На рисунке 5 приведена схема разветвления в случае невырожденной матрицы. Здесь формы четырехугольников указывают на виды матрицы А (квадратная, прямоугольная) и соответствующих векторов *q, f*.

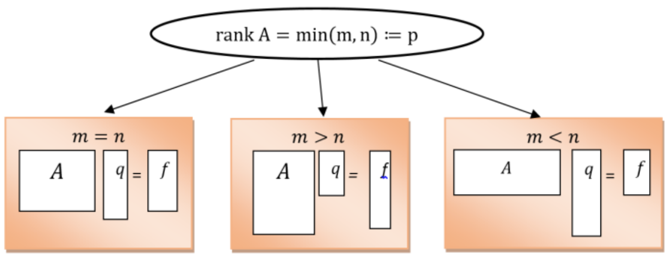

Рисунок5 - Случай невырожденной матрицы

в) Случай когда $m > n$. В этом случае если для системы существует точное решение, то оно единственное.

Случай вырожденной матрицы. Случай вырожденной матрицы. Вырожденная СЛАУ – это система, описываемая матрицей с нулевым определителем (сингулярной матрицей). Поскольку некоторые уравнения, входящие в такую систему, представляются линейной комбинацией других уравнений, то, фактически, сама система является недоопределенной.

Несложно сообразить, что, в зависимости от конкретного вида вектора правой части *f*, существует либо бесконечное множество решений, либо не существует ни одного. Если СЛАУ имеет бесконечно много решений, то также как в случае $m<n$, находится нормальное решение которое находится по формуле $q_n = \arg\min_{q\in Q_f(A)} \|q\|$. Если система не имеет ни одного решения, то существует для него псевдорешение $q_p = \arg\min_{q\in R^n} \|Aq - f\|^2$. Если псевдорешений более одного, то существует единственное нормальное псевдорешение, которое находится по формуле $q_{pn} = \arg\min_{q_p\in Q_f^p} \|q_{\Pi}\|$.

На рисунке 6 приведена схема разветвления в случае вырожденной матрицы.

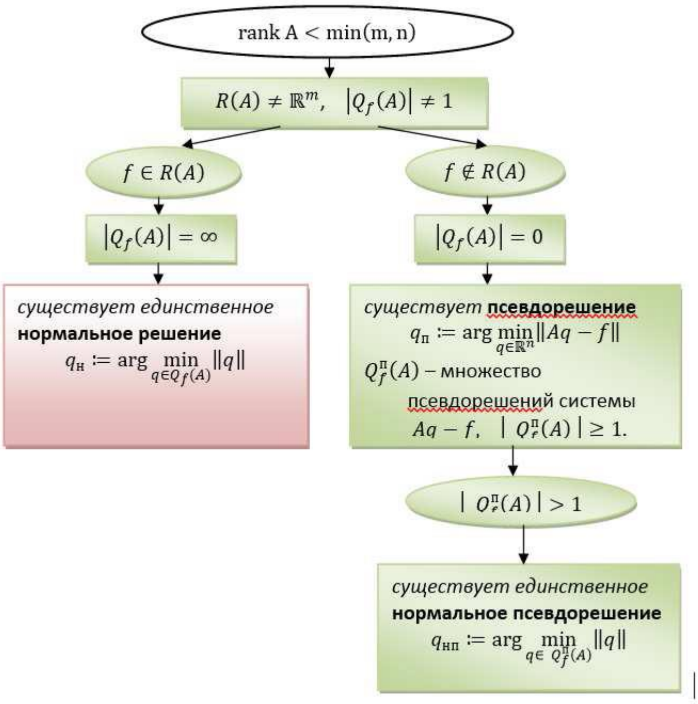

Рисунок 6 - Случай вырожденной матрицы

Очевидно, что знание особенностей поиска некорректных решений СЛАУ имеет исключительно важное значение для изучения и понимания численных методов решения линейных обратных и некорректных задач, поскольку все они так или иначе сводятся к системам линейных алгебраических уравнений и в дальнейшем как в зеркале, отображаются основные понятия теории некорректных задач, такие как регуляризация, квазирешение, нормальное решение и т. д.

Исследование некорректных задач линейной алгебры является не только необходимым этапом численного решения линейных некорректных задач. Математики решали практические задачи с переопределенными или недоопределенными системами уравнений задолго до появления термина «некорректная (или обратная) задача». Именно в линейной алгебре начали изучать нормальное решение (позволяющее выбрать единственное среди множества возможных решений), псевдорешение (обобщенное решение, совпадающее с обычным, если решение существует), плохо обусловленные системы, сингулярное разложение, которое, подобно рентгеновскому снимку, высвечивает степень некорректности задачи и подсказывает пути численного решения.

Ниже на рисунке 7 приводится схема алгоритма поиска решения СЛАУ.

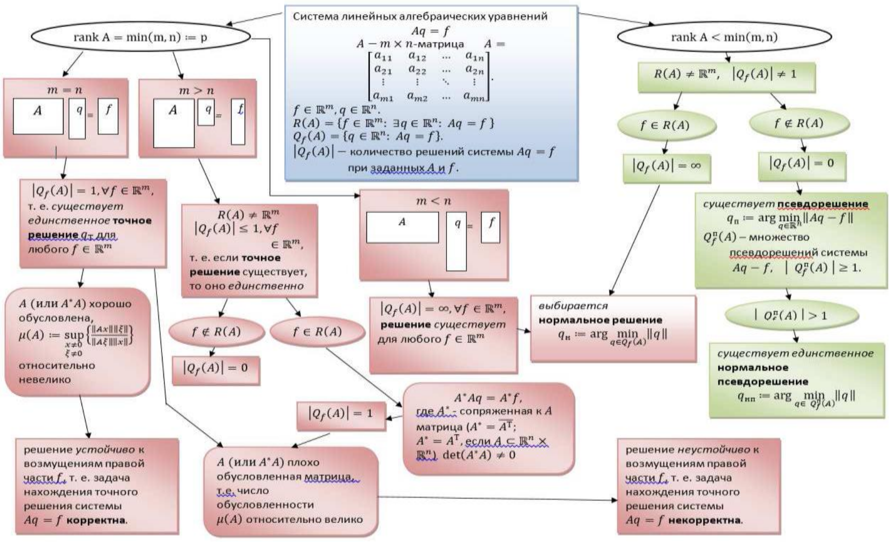

Рисунок 7 - Алгоритм поиска решений СЛАУ

Приведем конкретный пример анализа СЛАУ.

Перед студентами ставится задача: выяснить, является ли решение СЛАУ вида

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -1.33x + 2y = -1.99 \end{cases} \quad (2.1.3)$$

устойчивым?

Для решения поставленной задачи студенты, прежде всего, выясняют существование и единственность ее решения. Для СЛАУ (2.1.3) $\rho = r = n = 2$. Кроме того, $m = n = 2$. Поэтому эта СЛАУ является определенной и ее решение существует и единственно: $x = 3$ и $y = 1$.

Вместе с тем, если правые части несколько изменить и рассмотреть СЛАУ

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3{,}01 \\ -1.33x + 2y = -2 \end{cases} \quad (2.1.4)$$

То есть в правые части СЛАУ (2.1.4) внесены относительные погрешности $\frac{\|\delta f\|}{f} < 0.5$ %.

При этом, как замечают студенты, получается новое решение, отличающееся от предыдущего решения: $x = 2$, относительная погрешность которого $\frac{\|\delta x\|}{x} \approx 33\%$, $y = 0{,}33$, относительная погрешность которого $\frac{\|\delta y\|}{y} \approx 67\%$. То есть относительная погрешность решения СЛАУ (2.1.4) на два порядка превосходит относительную погрешность правой части.

Студенты делают вывод о том, что решение СЛАУ (2.1.3) является *неустойчивым*.

При рассмотрении интегральных уравнений, большое внимание уделяется анализу решений интегральных уравнений с различными ядрами.

В качестве примеровприведем решение интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода с гладким ядром $K(x,s)$ [31].

Пример 2.1.1. Пусть $K(x,s) = \sin(x+s)$). Имеем

$$Au = \int_a^b \sin(x+s)u(s)ds = c_1 \sin x + c_2 \cos x,$$

$$c_1 = \int_a^b \cos(s)u(s)ds, \quad c_2 = \int_a^b \sin(s)u(s)ds.$$

Обратный оператор A^{-1} существует, если правая часть $f(x)$имеет тот же вид, что и левая: $f(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$.

Если же $f(x)$ возмутить, полагая например,

$$f(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \delta \cos 2x,$$

то при любом самом малом δ A^{-1} не существует.

Пример 2.1.2. Пусть $K(x,s) = e^{x-s}$. Нетрудно видеть, что для оператора с таким ядром решение неединственно. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение и будем искать его решение в виде $u(s) = c_1 + c_2 s \neq 0$.

Тогда $c_1 \int_a^b e^{-s}ds + c_2 \int_a^b se^{-s}ds = 0$ и можно положить $c_1 = -\int_a^b se^{-s}ds,\ c_2 = \int_a^b e^{-s}ds$. В этом случае решение – неединственно.

Пример 2.1.3. Пусть $K(x,s) = e^{xs}$. Покажем, что соответствующее однородное уравнение имеет только нулевое решение

$$\int_a^b e^{xs}u(s)ds = 0, \quad x \in [c,d], \quad 0 \in [c,d]. \tag{2.1.5}$$

Полагая в (2.1.3) $x = 0$, получим $\int_a^b u(s)ds = 0$.

Дифференцируя уравнение (2.1.5) и полагая $x = 0$, получим последовательно: $\int_a^b s^n u(s)d(s) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$

В силу того что система функций $1, s, \dots s^n, \dots$ линейно независима и полна в $L_2[a,b]$, а $u(s)$ ортогональна этой системе, то $u(s) \equiv 0$, и, следовательно, единственность решения имеет место.

Теперь рассмотрим два примера обратных задач для дифференциальных уравнений.

Обратная задача для дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа [24]. От студентов требуется найти начальное состояние ограниченного нагретого стержня, если решение краевой задачи

$$U_t = U_{xx}, \ 0 < x < \pi, \ t > 0, U = U(x,t), \tag{2.1.6}$$

$$U(0,t) = U(\pi,t) = 0, t > 0, \ U(x,0) = \varphi(x), 0 \le x \le \pi, \tag{2.1.7}$$

известно в фиксированный момент времени $t = T$:

$$U(x,T) = \psi(x), 0 \le x \le \pi. \tag{2.1.8}$$

Решение задачи (2.1.6)–(2.1.8) при общих предположениях о функции $\varphi(x)$ выписывается с помощью метода Фурье

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 t)\, \varphi_n \sin(nx). \tag{2.1.9}$$

В (2.1.9) φ_n – коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ по системе функций $\sin(nx)$, $n = 1,2,\dots$ Полагая в формуле (2.1.9) $t=T$,студенты получают выражение

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 T)\, \varphi_n \sin(nx), \ 0 \le x \le \pi \tag{2.1.10}$$

Откуда следует, что $\varphi_n = \exp(n^2 T)\psi_n, n = 1,2,\dots$, где ψ_n – коэффициенты

Фурье функции $\psi(x)$. Так как коэффициенты $\varphi_n, n=1,2,...,$ однозначно определяют любую функцию $\varphi(x) \in L^2[0,\pi]$, то решение обратной задачи единственно в классе функций $L^2[0,\pi]$.

При решении обратной задачи студенты делают два важных замечания, демонстрируя тем самым фундаментальные знания по математическому и функциональному анализу:

а) предельное условие (2.1.7) выполняется только в следующем смысле:

$$\lim_{t \to +0} \int_0^{\pi} [U(x,t) - \varphi(x)]^2 dx = 0.$$

б) для существования решения обратной задачи необходимо и достаточно выполнения условия: $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2 \exp(2n^2T) < \infty$.

Обратная задача для дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа [84]. Студентам предлагается вычислить неизвестный коэффициент $a(x)$ из следующих соотношений:

$$U_{tt} - U_{xx} = a(x)U_t + \delta(x,t), \quad x \geq 0, \quad t \in R, \tag{2.1.11}$$

$$U\big|_{t<0} \equiv 0, \quad U_x\big|_{x=0} = 0\,(t > 0), \tag{2.1.12}$$

$$U(0,t) = f(t), \quad t > 0, \tag{2.1.13}$$

где $\delta(x,t)$ – дельта-функция Дирака, а (2.1.13) – дополнительная информация о решении прямой задачи (2.1.11), (2.1.12).

При этом в процессе исследования обратной задачи (2.1.11)–(2.1.13) нужно будет применить метод свертки, при помощи которого решение прямой задачи (2.1.11), (2.1.12) может быть выписано через фундаментальное решение $G_1(x,t) = \theta(t - |x|)/2$ задачи Коши

$$(G_1)_{tt} - (G_1)_{xx} = \delta(x,t),\ (x,t) \in R^2,\ G_1\big|_{t<0} \equiv 0.$$

Это решение имеет вид

$$U(x,t) = G_1(x,t) * (a(x)U_t(x,t) + 2\delta(x,t)) =$$
$$= (1/2)\int_{R^2} \theta(t - \tau - |x - \xi|)\big(2\delta(\xi,\tau) + a(\xi)U_\tau(\xi,\tau)\big)d\xi\, d\tau.$$

Откуда

$$U(x,t) = \theta(t - |x|) + (1/2)\int\limits_{x-t}^{x+t} a(\xi)\,d\xi \int\limits_{0}^{t-|x-\xi|} U_\tau(\xi,\tau)\,d\tau \qquad (2.1.14)$$

Равенство (2.1.14) при $t \geq |x|$ принимает вид

$$U(x,t) = 1 + (1/2)\int\limits_{(x-t)/2}^{(x+t)/2} a(\xi)U(\xi, t - |x-\xi|)\,d\xi\,. \qquad (2.1.15)$$

Из (2.1.15), после несложных преобразований, студенты получают интегральное уравнение Вольтера второго рода относительно искомого коэффициента $a(x)$

$$a(t/2) = 2f'(t) + (1/4)\,a(t/2)\int\limits_0^t a(\xi/2)\varphi(\xi/2)\,d\xi + \\ + 2\int\limits_0^{t/2} a(\xi)V(\xi, t-\xi)\,d\xi, \qquad (2.1.16)$$

где $V(x,t) = U_t(x,t)$.

В дальнейшем, применяя принцип сжатых отображений, метод последовательных приближений, студенты доказывают существование и единственность решения обратной задачи в области $D(T) = \{(x,t)\ |\ |x| \leq t \leq T - |x|\}$.

Для краткости записи, сформулируем лишь теорему условной устойчивости решения обратной задачи (2.1.11)–(2.1.13).

Лемма 2.1.1. Если $a \in C\left[0, \dfrac{T}{2}\right]$, то $f(t) \in C^1[0,T]$, $t > 0$, $x = 0$ и $f(0) = -1$.

Пусть $Q(M,T) = \left\{ a(x) \ \middle|\ \|a\|_{C\left[0,\frac{T}{2}\right]} \leq M \right\}$.

Теорема 2.1.1. Пусть $a(x)$, $\overline{a}(x) \in Q(M,T)$, $f(t), \overline{f}(t) \in C^1(0,T)$ – дополнительная информация о решении прямой задачи (2.1.11), (2.1.12) на полуоси $t > 0$, $x = 0$. Тогда имеет место неравенство

$$\|a(x) - \overline{a}(x)\|_{C\left[0,\frac{T}{2}\right]} \leq C\|f'(t) - \overline{f}'(t)\|_{C[0,T]}\,.$$

В процессе обучения ОНЗ, решая различные математические задачи, студенты приобретают умения и навыки применения разнообразных методов математической физики и вычислительной математики, которые им преподавались в учебных курсах математического, функционального, векторного анализа, аналитической геометрии, алгебры, интегральных уравнений и других учебных курсах, осознают широту их использования в исследованиях прикладных математических задач. Доказывая сложные теоремы существования, единственности и условной устойчивости решения ОНЗ, они демонстрируют фундаментальные знания не только в области теории и методологии ОНЗ, но и в области прикладной и вычислительной математики.

Методы и формы организации обучения решению обратных и некорректных задач

В предыдущих подразделах диссертации были описаны научно-методические аспекты, цели, принципы и содержание обучения студентов решению обратных и некорректных задач, которые отражают специфику современного этапа развития образования, обусловленного фундаментализацией. Очевидно, что для эффективного обучения по такой методике необходима разработка соответствующих методов и средств обучения, что в свою очередь делает необходимым отбор наиболее эффективных подходов подготовки студентов.

Методы обучения являются существенной составляющей педагогических технологий и представляют собой способы упорядоченной взаимосвязанной деятельности преподавателя и студента. Обучение в вузе представляет собой не только соединение способов и приемов преподавания, сколько систему направленного познания в учебной и научной деятельности студентов, включая их самостоятельную работу. Для этого преподавателю необходимо использовать разнообразные методы обучения — систему последовательных действий преподавателя, организующих и определяющих познавательную и практическую деятельность студентов, которой обеспечивается усвоение всех элементов содержания. Применение того или иного метода в большей степени зависит от того, какие цели и задачи лежат в основе изучения конкретной учебной дисциплины, какие требования в рамках дисциплины предъявляются к студенту, к его знаниям и умениям. Очевидно, что из всего многообразия методов следует выбирать те из них, которые позволяют оптимально решить конкретные учебные задачи.

Существенный вклад в разработку методов обучения – весомой составляющей педагогических технологий внесли работы многих ученых [8, 13, 18, 30, 31, 104, 109, 110, 131, 152, 154-160, 163].

Одно из наиболее существенных различий между чистой и прикладной математикой, как отмечается авторами в [31, с.86], связано с характером применяемой логики рассуждений при решении математических задач. Логика прикладной математики обладает характерными чертами, связанными со способами доказательств, выбором критериев достоверности и т.д. Стиль рассуждений, составляющий логическую основу прикладной математики, состоит из дедуктивных и рациональных рассуждений, которые иногда неприемлемы с точки зрения чистой математики, но способные при разумном их применении приводить к правильным результатам.

Подобные рациональные рассуждения могут быть применены в обучении решению обратных и некорректных задачстудентов педагогических вузов.

Выдвижение гипотез при аналитическом или численном решении ОНЗ. Анализируются ожидаемые свойства задачи и выдвигаемые в процессе ее решения гипотезы. Такие гипотезы могут относиться, например, к выбору аналитического метода решения обратной задачи в обобщенной постановке, позволяющего выделить сингулярную часть обобщенного решения обратной задачи; выбору конструктивного вычислительного алгоритма решения некорректной задачи, выбору промежутка, на котором может располагаться искомое значение, условии остановки работы алгоритма и др.

Если гипотезы опираются на реальную интерпретацию математической модели ОНЗ и делаются с соблюдением требований здравого смысла, то могут оказать важную помощь для успешного исследования ОНЗ.

Уточнения в ходе решения ОНЗ. При исследовании ОНЗ реальный смысл математического объекта далеко не всегда полностью вытекает из формального определения. Математическая модель ОНЗ определяется реальным объектом неоднозначно. Даже при сохранении принципиальной схемы модели реальный объект может описываться с различной степенью точности и детализации, что дает возможность изменять и соответствующую математическую обратную задачу по мере ее исследования. В соответствии с ролью реальных факторов, в частности с учетом реальных диапазонов значений параметров, в математической модели ОНЗ могут делаться различные упрощения и видоизменения в случаях, представляющих наибольший практический интерес.

По ходу исследования, с учетом целей и реальной интерпретации изучаемой математической модели ОНЗ, может вводиться дополнительное предположение (например, о четности искомого коэффициента), упрощающее математическое исследование или позволяющее провести это исследование масштабнее.

Контроль сходимости и погрешности конструктивного вычислительного алгоритма решения ОНЗ. Приближенное решение прикладной задачи находится при помощи различных численных методов. Погрешность приближенного решения зависит от многих факторов: погрешности исходных данных, погрешности арифметических операций, погрешности самих численных методов, погрешности округления компьютером и др. В связи с этим необходимо добиваться построения устойчивых и сходящихся вычислительных алгоритмов.

Разумные аналогии при решении ОНЗ. При исследовании ОНЗ утверждения часто имеют не столь однозначный характер, а достаточно высокая степень достоверности может быть равносильна полной достоверности. Разумная аналогия, подкрепленная другими рациональными соображениями, может служить доказательством. Таким путем часто удается распространять утверждения, справедливые для простых постановок для ОНЗ на более сложные постановки для ОНЗ. При проведении таких аналогий, важно отчетливо представлять себе особенности, отличающие рассматриваемый случай от известных аналогий; эта специфика может быть понятна на основе анализа модельных ОНЗ.

Рассмотрение частных случаев при решении ОНЗ. Этот способ рассуждений носит название индукции и широко применяется не только в математике. Причины, по которым пользуются подобными обоснованиями, могут быть различными. Например, дедуктивное доказательство может быть недоступным из-за своей трудности. Часто бывает, что доказываемое утверждение формулируется в размытых терминах и потому может не допустить дедуктивного доказательства; такая ситуация особенно типична за пределами математики. Но даже если утверждение формулируется в дедуктивных терминах, то в исследованиях ОНЗ часто идут не по пути отыскания дедуктивного доказательства, а пользуются индукцией, которая может оказаться менее трудоемкой и, в то же время, не менее убедительной для специалиста в области математики.

Осмысление физических свойств исследуемого объекта в процессе решения ОНЗ. В прикладном исследовании математическая модель ОНЗ представляет собой модель реального объекта. В свою очередь, при численном решении она будет заменена на некоторую ее аппроксимацию. Поэтому чрезмерное детальное исследование точной математической задачи дает сравнительно малую информацию о реальной картине и, если оно требует затраты значительных усилий, в прикладном исследовании становиться мало оправданным.

С помощью вышеперечисленных рассуждений мы можем приходить к практически достоверным выводам. Однако, логическая структура рациональных рассуждений, синтезирующих формальную логику с интуицией и здравым смыслом, сложнее дедуктивных, и они могут приводить к ошибкам, которых не следует бояться. Здравый смысл и реальное истолкование результатов, разумный контроль позволяет избежать ошибочных последствий, а анализ ошибок окажется чрезвычайно поучительным для накопления интуиции в исследованиях обратных задач для дифференциальных уравнений. Необходимо отчетливо представлять себе возможные причины таких ошибок с тем, чтобы при необходимости повышать степень достоверности полученных рациональных рассуждений. Необходимо формулировать корректную постановку обратной задачи для дифференциальных уравнений, отчетливо различать гипотезы и доказательства, размытые и четкие понятия и т.д.

Ослабление требований к строгой «дедуктивности» формулировок, рассуждений и доказательств позволяет в теории ОНЗ получать результаты, недостижимые средствами чистой математики и, опираясь на рациональные рассуждения, дает возможность добывать полезную информацию о неизвестных свойствах объектов различной природы.

Важной компонентой любой методической системы обучения студентов являются формы обучения. Исследованием форм обучения, особенностей организации и проведения учебных занятий и самостоятельной работы студентоввысших учебных заведений посвящены немало работ [8-10, 13, 21, 12, 92-101, 104, 109, 126, 127, 146, 155-157, 159].

Основными формами организации учебных занятий по ОНЗ являются: лекционное занятие, практическое занятие, лабораторное занятие, самостоятельная работа студента с преподавателем, самостоятельная работа студентов.

Лекционное занятие по ОНЗ. Лекционное занятие является основной формой организации учебных занятий по обратным и некорректным задачам, где преподавателем в устной форме (слово преподавателя является основным средством обучения) с использованием доски и мела, а в некоторых случаях – мультимедийных технологий, излагается учебный материал. Лекционное занятие по ОНЗ преследует поставленные цели обучения; выполняет определенные функции обучения. Сформулируем их.

Цель лекционных занятий – познакомить студентов с фундаментальными основами теории и методологии ОНЗ, обучить студентов современным математическим методам решения ОНЗ, обосновать студентам роль ОНЗ в прикладных исследованиях, сформулировать представление о научно-образовательном потенциале обучения ОНЗ, развивать у студентов умения и навыки самостоятельно исследовать ОНЗ и формулировать логические выводы прикладного характера по результатам проведенных исследований ОНЗ, и др.

Функции лекционных занятий по ОНЗ:

- информационная (предоставление студентам системы фундаментальных знаний по ОНЗ);
- мотивационная (формирование у студентов познавательного интереса к содержанию обучения ОНЗ);
- ориентировочная (обеспечение основ знаний для обеспечения понимания основных направлений исследований и приложений по ОНЗ);
- воспитательная (формирование сознательного отношения студентов к процессу обучения ОНЗ).

Структура лекционного занятия по ОНЗ включает вводную, основную и заключительную части. Во вводной части напоминается тема предыдущего лекционного занятия; формулируется тема нового лекционного занятия, постановка задачи, цель лекционного занятия; предлагается перечень рекомендуемой литературы, необходимой для организации самостоятельной работы студентов. В основной части лекционного занятия, прежде всего, анализируются поставленная обратная или некорректная задача, излагаются исторические аспекты, демонстрирующие ее появления, приводятся необходимые для ее решения сведения из предметных областей, предлагается перечень рекомендуемой литературы, необходимой для организации самостоятельной работы студентов.

В основной части лекционного занятия, анализируются прикладные аспекты рассматриваемой задачи. После чего, демонстрируется сам метод исследования задачи. Исследование многих ОНЗ предполагает, как правило, громоздкие математические выкладки, преобразования, что требует много времени. В связи с чем, на лекционных занятиях целесообразно обращать внимание на методологические аспекты исследования излагаемых ОНЗ, на приемы и подходы, которые позволяют свести ОНЗ к таким ОНЗ, которые ранее уже рассматривались на предыдущих учебных занятиях. И в таких случаях достаточно сформулировать соответствующие теоремы существования, единственности или устойчивости. Промежуточные несложные «рутинные» преобразования студенты могут выполнить во время самостоятельной работы.

В заключительной части лекционного занятия по результатам исследований математической задачи делаются выводы математического, прикладного характера. Подводится итог всего лекционного занятия. В процессе изложения лекционного материала, студентымогут задавать вопросы на любом этапе изложения материала, на которые преподаватель сразу же должен дать исчерпывающие ответы. В противном случае дальнейшее изложение материала может быть непонятным студенту, что может привести к потере интереса к ОНЗ.

Для повышения эффективности лекционного занятия целесообразно структурировать содержание лекционного материала, излагать его доступным языком. При необходимости на лекционном занятии целесообразно использовать мультимедийные технологии обучения для демонстрации иллюстраций, графиков, таблиц, рисунков и др. материалов. При этом преподаватель должен проанализировать эффективность использования лекционного времени при соответствующей демонстрации, объем которой зависит от сложности рассматриваемого метода и от продолжительности лекционного времени, отводимого учебной программой на данную тему. Такая демонстрация призвана повысить наглядность и доходчивость исследуемой прикладной задачи, физического смысла исследуемых свойств объектов, высвободить время для изложения преподавателем, при помощи мела и доски, учебного материала по ОНЗ.

Успех и качество лекционных занятий по ОНЗ во многом зависят от успешно выстроенной логической структуры излагаемого учебного материала, от умения преподавателя обратить внимание студентовна важные теоретические и прикладные вопросы, которые возникают в процессе изложения ОНЗ.

Рассмотрим методику организации занятий в педагогическом вузе, используя *метод опорных конспектов*. Метод опорных конспектов был предложен В.Ф.Шаталовым. Опорный сигнал по Шаталову — это «ассоциативный символ, который заменяет некое смысловое значение; он способен мгновенно восстановить в памяти известную и ранее понятую информацию». Под опорным конспектом понимается «системный набор опорных сигналов, структурно связанных между собой и представляющих собой наглядную конструкцию, замещающую систему значений, понятий, идей как взаимосвязанных элементов» [164].

Опорный конспект может быть представлен в виде наглядной схемы, отражающей элементы информации, которые подлежат усвоению, где устанавливаются различные связи между ними, а также вводятся знаки, которые выступают в качестве сигналов, вызывающих в памяти основные явления, понятия или процессы.

С.А.Глазунов [165] определяет опорный конспект как любую конструкцию, которая состоит из элементов в виде схем, таблиц, знаков, символов, обозначений и т.д., расположенных определенным образом, и несущих определенную информацию.

По В.Ф.Шаталову [164] целесообразны следующие этапы построения опорного конспекта:

а) Внимательно изучить учебный материал основные взаимосвязи и взаимозависимости смысловых частей текста.

б) Выделить главные мысли и расположить их в том порядке, в каком они представлены в тексте.

в) Выполнить черновой набросок сокращенных записей на листе бумаги.

г) Преобразовать эти записи в опорные сигналы в виде отдельных слов, определенных знаков, рисунков, графиков.

д) Объедините сигналы в блоки.

е) Особым образом выделить блоки контурами и графически отобразить связи между ними.

ж) Продумать способ кодирования (использование различного шрифта, цвета и т. д.).

Предлагаем разработку лекции с использованием метода опорных конспектов. Рассмотрим тему посвященную примерам обратных и некорректных задач и различных прикладных задач. На изучение темы «Обратные и некорректные задачи как область прикладной математики» выделяется 1 час лекции, 2 часа практических занятий, 3 часа СРСП и 3 часа СРС.

Тема: ОБРАТНЫЕ И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ КАК ОБЛАСТЬ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

План лекции:

1. Определение обратных и некорректных задач
2. Классификация обратных и некорректных задач
3. Обратные и некорректные задачи в математике

На рисунках 8-10 и в таблице 4 приведены опорные конспекты, использованные на лекции.

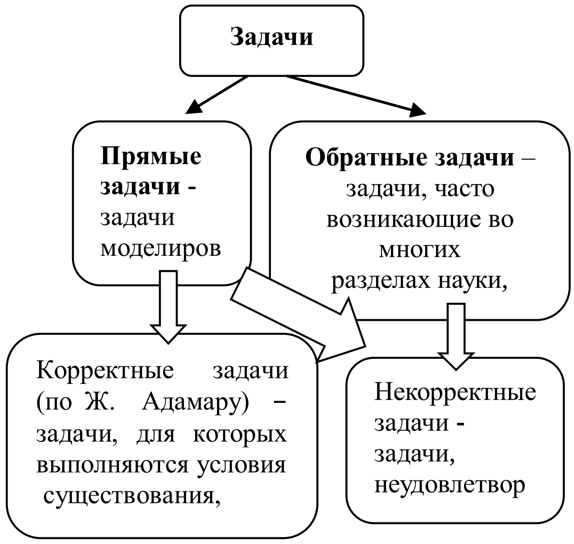

Рисунок 8 - Определение обратных и некорректных задач

Рисунок 9 – Прямые и обратные задачи

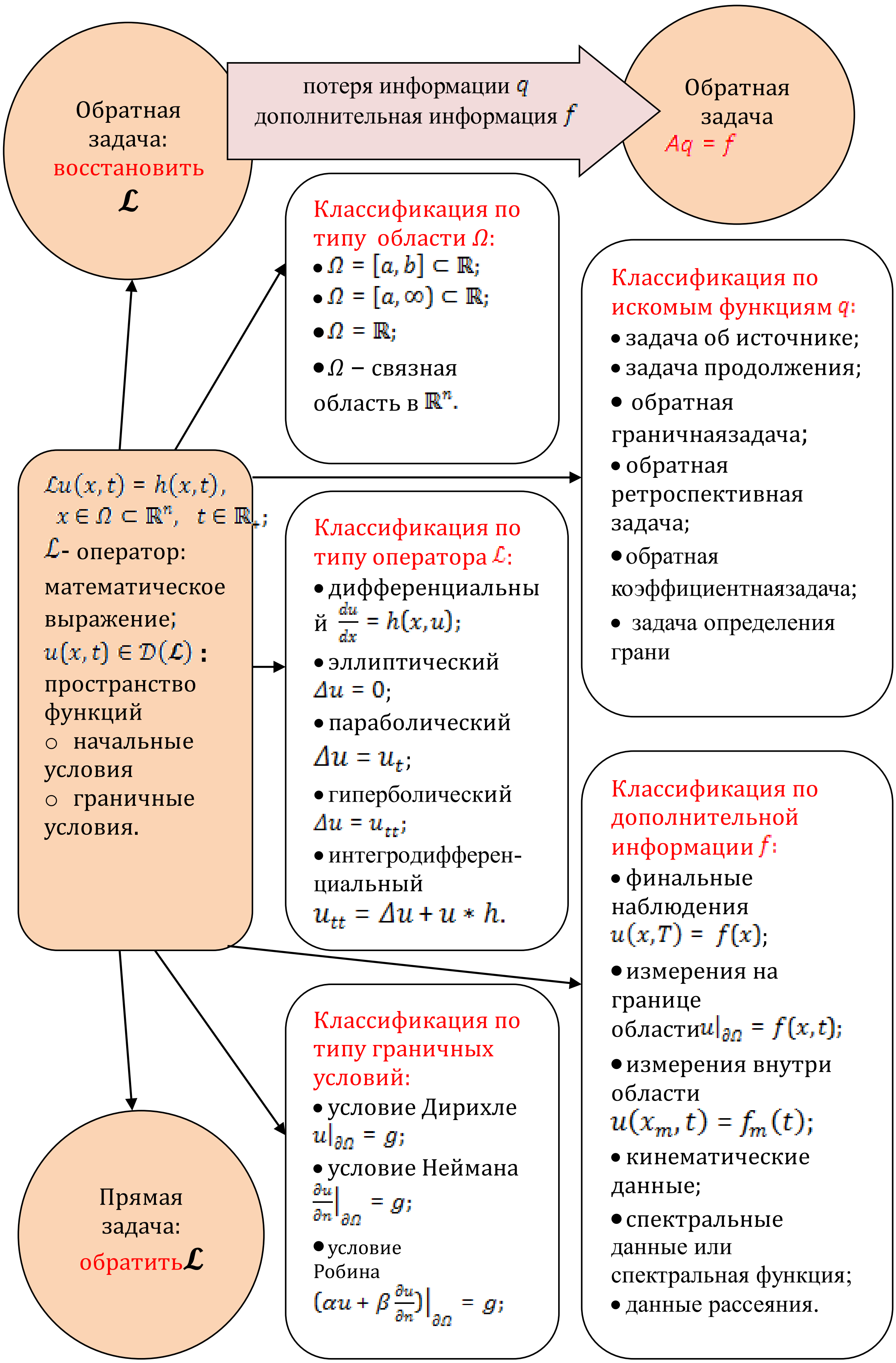

Рисунок 10 - Классификация обратных и некорректных задач

Таблица 4 - Обратные и некорректные задачи в математике

Разделы математики	Корректные задачи	Некорректные задачи
1	2	3
Арифметика	Умножение на малое число A: $Aq = f$	Деление на малое число A $q = A^{-1} f$ $(A < 1)$
Алгебра	Умножение на матрицу $Aq = f$	Решение системы $Aq = f$ в случаях, если A плохо обусловлена, вырождена или прямоугольна
Анализ	Интегрирование $f(x) = f(0) + \int_0^x q(\xi)d\xi$	Дифференцирование $q(x) = f'(x)$
Дифференциальные уравнения	Задача Штурма — Лиувилля $u''(x) - q(x)u(x) = \lambda u(x),$ $u(0) - hu'(0) = 0$ $u(1) - Hu'(1) = 0$	Обратная задача Штурма — Лиувилля $\{\lambda_n, \|u_n\|^2\} \to q(x)$ Определение $q(x)$ по спектральным данным $\{\lambda_n, \|u_n\|\}$
Интегральная геометрия	Определение интеграла от функции $q(x, y)$ вдоль кривой $\Gamma(\xi, \eta)$	Определение $q(x, y)$ по семейству интегралов $\int_{\Gamma(\xi,\eta)} q(x, y)ds = f(\xi, \eta)$
Интегральные уравнения	Уравнения Вольтерра и Фредгольма второго рода $q(x) + \int_0^x K(x,\xi)q(\xi)d\xi = f(x)$ $q(x) + \int_a^b K(x,\xi)q(\xi)d\xi = f(x)$	Уравнения Вольтерра и Фредгольма первого рода $\int_0^x K(x,\xi)q(\xi)d\xi = f(x)$ $\int_a^b K(x,\xi)q(\xi)d\xi = f(x)$
Операторные уравнения $Aq = f$	$\exists m > 0 : \forall q \in Q$ $m(q,q) \le \langle Aq, q \rangle$	$A : D(A) \subset Q \to R(A) \subset F$ A - компактный линейный оператор
Гиперболические уравнения	Задача Коши $u_{tt} = \Delta u,\ t > 0$ $u\big\|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big\|_{t=0} = \psi(x)$ Начально-краевая задача $u\big\|_{\Gamma} = g$	Задачи Дирихле и Неймана Задача Коши с данными на времени подобной поверхности $u_{tt} = \Delta u, \quad x \in \Omega$ $u\big\|_{\Gamma_1} = f_1, \frac{\partial u}{\partial n}\Big\|_{\Gamma_1} = f_2$

Продолжение таблицы 4

1	2	3
Параболические уравнения	$u_t = \Delta u, \quad t > 0, x \in \Omega$ Задача Коши $u\big\|_{t=0} = f(x)$ Начально-краевая задача $u\big\|_{t=0} = 0$ $u\big\|_{\Gamma} = g(x,t)$	Задача Коши с обратным временем A Начально-краевая задача с данными на части границы $\Gamma_1 \subset \Gamma$ $u_t = \Delta u, \quad x \in \Omega$ $u\big\|_{\Gamma_1} = f_1, \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big\|_{\Gamma_1} = f_2$
Эллиптические уравнения	$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega$ $u\big\|_{\Gamma} = g \quad или \quad \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big\|_{\Gamma} = f,$ $или \quad \left(\alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big\|_{\Gamma} = h$ Задачи Дирихле, Неймана, Робина (смешанная)	$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega \subset R^n$ Задача Коши Начально-краевая задача с данными на части границы $\Gamma_1 \subset \Gamma = \partial\Omega$

Практическое занятие по ОНЗ. Практическое занятие по ОНЗ является активной формой обучения, дополняющей лекционные занятия и призванной обучить студентов современным подходам и методам решения ОНЗ; сформировать у студентов умения самостоятельно подбирать или разрабатывать эффективные аналитические или приближенные методы решения ОНЗ; развить навыки компьютерной реализации вычислительных алгоритмов решения ОНЗ и умений интерпретировать полученные результаты и оценки точности полученного решения ОНЗ и др.

На практических занятиях по ОНЗ реализуется:

- углубленное усвоение студентами математических методов решения ОНЗ;
- осмысление студентами теории и методологии ОНЗ;
- приобретение студентами умений и навыков самостоятельно исследовать ОНЗ, формулировать аналогичные постановки ОНЗ. Ниже приведен пример практического занятия на тему «Использование Mathcad при решении корректных и некорректных задач».

Практическое занятие №3. Использование Mathcad при решении корректных и некорректных задач

Цель: научиться использовать Mathcad при решении корректных и некорректных задач.

С точки зрения соотношения причина-следствие, все задачи математического моделирования условно делятся на два больших класса:

прямые задачи и *обратные*. В первом случае при известных причинах требуется определить следствия, во втором случае, естественно, наоборот: найти причины, приведшие к тем или иным следствиям.

Задача называется *поставленной корректной* (по Ж. Адамару), если выполняются следующие условия:

а) решение задачи существует;

б) решение задачи единственно;

в) решение задачи непрерывно зависит от данных.

Задачи, не удовлетворяющие перечисленным требованиям, называются *некорректно поставленными*.

1. Задача вычисления вещественных кратных корней. К некорректным задачам относятся задачи на вычисление корней полиномов, если эти корни кратные, а физический смысл имеют, лишь вещественные значения.

Пусть дан полином второй степени

$$x^2+2x+1$$

Этот полином имеет двукратный корень

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}=-1$$

Однако если коэффициент при последнем члене равен не точно единице, а $1+\varepsilon$, что всегда возможно, поскольку все коэффициенты известны лишь с ограниченной точностью, то вещественное решение при сколь угодно малых $\varepsilon>0$ сразу исчезает, в этом случае

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4(1+\varepsilon)}}{2}=-1\pm\sqrt{-\varepsilon}$$

Если нас интересуют только вещественные решения, то уже при сколь угодно малых $\varepsilon>0$ решение исчезает.

Задание 1. Требуется показать некорректность данной задачи с использованием Mathcad.

Существует несколько способов вычисления корней полиномов с помощью Mathcad. Наиболее простой из них следующий:

1. Необходимо ввести в поле уравнение, учитывая что " = " необходимо ввести, используя сочетания клавиш Ctrl+ " = " или использовать меню Boolean.
2. Выделить в уравнении переменную.
3. В меню Symbolics выбрать Variable и далее Solve.

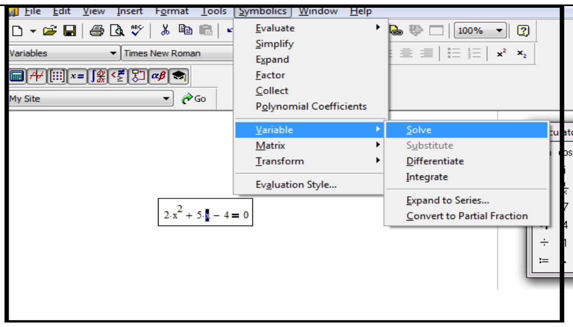

Рисунок 11 – Вычисление корней полиномов

4. Под уравнением появится его решение.

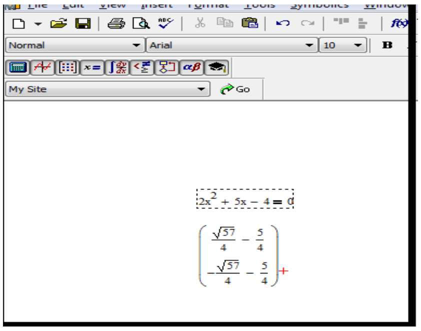

Рисунок 12 – Решение уравнения

Для того, чтобы показать некорректность данной задачи нужно

1. Найти корни заданного полинома $x^2 + 2x + 1$
2. Изменить свободный член на $\varepsilon = 0{,}0005$ и получить результаты
3. Результаты записать и сравнить.

Таблица 12 - Индивидуальные задания

№	Задания		Задания
1	$4 \cdot x^2 + 12x + 9 = 0$	6	$x^2 - 2x + 1 = 0$
2	$4 \cdot x^2 - 12x + 9 = 0$	7	$x^2 - 4x + 4 = 0$
3	$4 \cdot x^2 + 4x + 1 = 0$	8	$x^2 + 4x + 4 = 0$
4	$4 \cdot x^2 - 4x + 1 = 0$	9	$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$
5	$x^2 + 10x + 25 = 0$	10	$x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$

2. Пример Уилкинсона (пример неустойчивой задачи). Дан многочлен:

$$P(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-20) = x^{20} - 210x^{19} + \ldots . \qquad (1)$$

Корни многочлена (1):

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \ldots, x_{20} = 20.$$

Предположим, что один из коэффициентов многочлена вычислен с некоторой малой погрешностью. Например, коэффициент -210 при x^{19} увеличим на 2^{-23} (около 10^{-7}). В результате вычислений, даже с точностью до 11 значащих цифр, получим существенно другие значения корней.

Задание 2. Требуется показать некорректность примера Уилкинсона с использованием функций Mathcad.

Многочлен (1) определяем как функцию $P(x)=\prod_{i=1}^{20}(x-i)$.

Для вычисления корней полиномов можно использовать встроенную функцию

polyroots(v),

где *v* — вектор, составленный из коэффициентов полинома.

Чтобы вычислить коэффициенты полинома с помощью оператора символьного вывода:

1. Введите выражение.
2. Нажмите кнопку *coeffs* на панели *Symbolic* (Символика) (рис.).
3. Введите в местозаполнитель после вставленного ключевого слова *coeffs* аргумент полинома.
4. Введите оператор символьного вывода —>.
5. Нажмите клавишу <Enter> (рис.13).

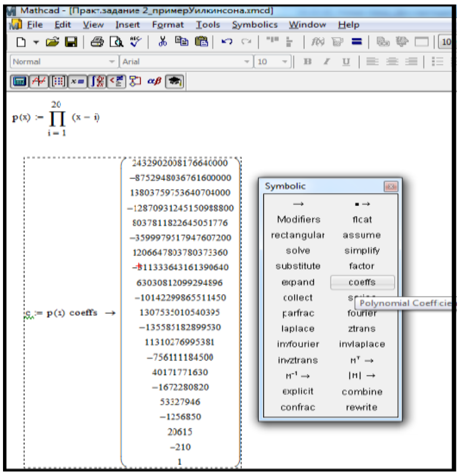

Рисунок 13 – Вычисление коэффициентов с помощью оператора символьного ввода

Поскольку полином n-й степени имеет ровно n корней (некоторые из них могут быть кратными), вектор *v* должен состоять из n+1 элемента. В основе встроенной функции polyroots лежат специфические численные алгоритмы, а результатом ее действия является вектор, составленный из n корней рассматриваемого полинома. При этом нет надобности вводить какое-либо начальное приближение, как для функции root.

Для функции polyroots можно выбрать один из двух численных методов — метод полиномов Лаггера (он установлен по умолчанию) или метод парной матрицы.

Для смены метода:

1. Вызовите контекстное меню, щелкнув правой кнопкой мыши на слове polyroots.

2. В верхней части контекстного меню выберите либо пункт LaGuerre (Лаггера), либоCompanionMatrix (Парная матрица).

3. Щелкните правой кнопкой мыши вне действия функции polyroots — если включен режим автоматических вычислений, будет произведен пересчет корней полинома в соответствии с вновь выбранным методом (рис.14, 15).

Для того чтобы оставить за Mathcad выбор метода решения, установите флажок AutoSelect (Автоматический выбор), выбрав одноименный пункт в том же самом контекстном меню.

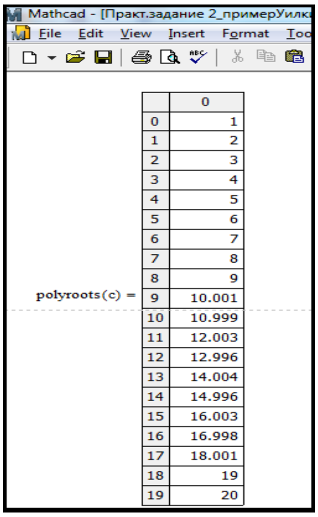

Рисунок 14 – Вычисление корня полинома

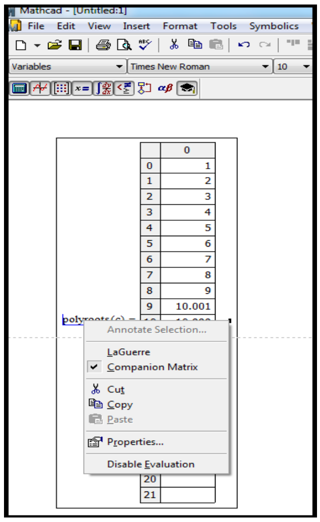

Рисунок 15 – Смена численного метода

Для того, чтобы показать некорректность данной задачи нужно:

1. Вычислить корни многочлена

2. Изменить коэффициент при x^{19} на величину $\varepsilon = 10^{-7}$

3. Сравнить результаты.

3. Некорректные СЛАУ. В процессе построения вычислительных алгоритмов решения широкого класса обратных задач для дифференциальных уравнений приходится иметь дело с поиском решений СЛАУ. Нахождение решений СЛАУ часто оказывается некорректной задачей, например, когда ее матрица плохо обусловленная. Это требует выбора эффективного метода решения СЛАУ.

Задание 3. Используя возможности Mathcad, требуется выяснить, является ли решение СЛАУ вида

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -1.33x + 2y = -1.99 \end{cases} \qquad (2)$$

устойчивым.

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (3)$$

В соответствии с правилом умножения матриц система линейных уравнений может быть записана в матричном виде

$$Ax = b, \qquad (4)$$

где:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Матрица *A*, столбцами которой являются коэффициенты при соответствующих неизвестных, а строками - коэффициенты при неизвестных в соответствующем уравнении, называется *матрицей* системы; матрица-столбец b, элементами которой являются правые части уравнений системы, называется *матрицей правой части* или просто *правой частью* системы. Матрица-столбец *x*, элементы которой - искомые неизвестные, называется *решением* системы.

Если матрица *A* - неособенная, то есть det *A* не равен 0 то система (3), или эквивалентное ей матричное уравнение (4), имеет единственное решение.

В самом деле, при условии det *A* не равно 0 существует обратная матрица A^{-1}. Умножая обе части уравнения (4) на матрицу A^{-1} получим:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b, \qquad x = A^{-1}b \qquad (6)$$

Формула (6) дает решение уравнения (4) и оно единственно.

Системы линейных уравнений удобно решать с помощью функции lsolve: *lsolve(A, b)*- возвращается вектор решения *x* такой, что $Ax = b$.

Аргументы:

A - квадратная, не сингулярная матрица.

b - вектор, имеющий столько же рядов, сколько рядов в матрице *A*.

Для решения СЛАУ с использованием Mathcad необходимо:

1. Ввести матрицу *A*. Для этого на панели инструментов Matrix нажмите кнопку MatrixorVector, а в появившемся окне задайте количество столбцов и строк в матрице.
2. Вести матрицу-столбец b.
3. Переменной x присвоить значение функции *lsolve(A,b).*

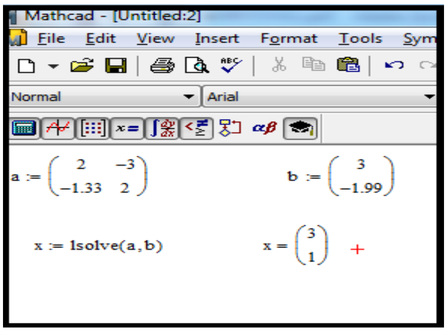

Рисунок 16 – Решение СЛАУ с помощью функции lsolve.

Таблица 13 – Индивидульные задания для решения некорректных СЛАУ

№ варианта	Задания	№ варианта	Задания
1	$\begin{cases} 1{,}1x + y = 1{,}1 \\ x + y = 1 \end{cases}$	6	$\begin{cases} x + 2{,}01y = -265 \\ 3x + 6y = 133{,}333 \end{cases}$
2	$\begin{cases} u + 10v = 11 \\ 100u + 1001v = 1101 \end{cases}$	7	$\begin{cases} 0{,}022x + 0{,}02y = 3100 \\ 0{,}04x + 0{,}02y = 4000 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 3001x + y = 3001 \\ x + y = 1 \end{cases}$	8	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$	9	$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 45 \\ \frac{8}{3}x + 3y = 330 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 803 \\ 3x_1 + 6{,}01x_2 = -400 \end{cases}$	10	$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 45 \\ \frac{1}{3}x + y = 80 \end{cases}$

Самостоятельная работа студентов по ОНЗ. Цель самостоятельной работы студентов в процессе обучения решению обратных и некорректных задачи – освоение фундаментальных основ теории и практики ОНЗ. В качестве учебных заданий для самостоятельной работы, студентам может быть предложены следующие действия: выполнить математические выкладки при построении аналитического решения ОНЗ, которые не требуют новых знаний по ОНЗ, которые были опущены на лекционном занятии; найти решение ОНЗ в обобщенной постановке, приближенное решение такой математической задачи, входящей в содержание обучения ОНЗ, логически связанной с излагаемыми разделами ОНЗ; изучить содержание научной статьи и сделать краткое изложение и др.

В качестве примера приведем два из таких учебных заданий.

Учебное задание 2.1.1. В подразделе 1.3 раздела 1 диссертации рассматривалась обратная задача 1.3.2 – одна из постановок обратной задачи 1.3.1, а именно случай, когда в операторе A неизвестной является главная диагональ, т.е. числа b_j, а числа a_j заданы.

В качестве учебного задания для исследования может быть предложена другая постановка обратной задачи 1.3.1 – случай, когда оператор A неизвестен, т.е. неизвестны числа a_j и b_j.

Сформулируем теорему без доказательства, которая показывает что задание двух спектральных данных S_f и S_g, где векторы f и g в некотором смысле независимы, позволяет однозначно определить весь оператор A.

Теорема 2.1.2. *Пусть* $f,\ g \in l_2(0, N-1)$ *и для всех* $j = \overline{0, N-2}$

$$\begin{vmatrix} f_{j+1} & f_j \\ g_{j+1} & g_j \end{vmatrix} \neq 0, \qquad |f_{N-1}| + |g_{N-1}| \neq 0. \tag{2.1.17}$$

Тогда спектральные данные $S(f,g) = \{\lambda_k, (f, e^k)e^k, (g, e^k)e_0^k\}, k = \overline{1, N}$ *однозначно определяют оператор* A.

После доказательства теоремы 2.2.1 и анализа ее результатов, студентам полезно привести следующее замечание.

Замечание 2.1.1. Теорема 2.2.1 имеет обобщение на случай $N = \infty$, т.е. на случай бесконечной якобиевой матрицы [31].

Учебное задание 2.1.2. После завершения исследования обратной задачи (1), (2) рассмотренной в приложении D диссертации (задача 1) в разделе содержания обучения решению обратных и некорректных задач «Обратные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений» естественным ее обобщением, которое рассмотрено А.М. Денисовым в [55, с. 6], является следующая постановка обратной задачи.

Идет процесс радиоактивного распада нескольких веществ:

$$\frac{d\,N_i(t)}{d\,t} = -\gamma_i\, N_i(t),\ \ t \geq t_0, \tag{2.1.17}$$

$$N_i(t_0) = N_i^0, \qquad i = \overline{1, k} \tag{2.1.18}$$

Здесь $M_i(t)$ – количество радиоактивного вещества определенного типа в данный момент времени, M_i^0 – его количество в начальный момент времени, γ_i – коэффициент распада i-го радиоактивного вещества. Предположим, что величины γ_i и M_i^0, $i = \overline{1,k}$, неизвестны, но из эксперимента может быть найдена функция

$$\overline{M}(t) = \sum_{i=1}^{k} M_i(t), \quad t \in [t_1, t_2] \tag{2.1.19}$$

где $M_i(t)$ – решения прямой задачи (2.1.17), (2.1.18).

Студентам может быть предложена следующая обратная задача: для $t \in [t_1, t_2]$ задана функция $\overline{M}(t)$ и требуется определить константы γ_i, M_i^0, $i = \overline{1,k}$.

А.М. Денисовым [55] отмечаются две постановки этой обратной задачи. В первой из них число различных радиоактивных веществ k известно, а во второй – k неизвестно. Во второй обратной задаче требуется определить количество радиоактивных веществ k, их коэффициенты распада γ_i и первоначальные массы $M_i(t)$, если известна суммарная масса радиоактивных веществ (2.1.19).

2.2 Применение информационных технологий в процессе обучения решению обратных и некорректных задач

Совершенствование и использование информационных технологий в научных исследованиях, образовательной сфере, промышленности и в другой человеческой деятельности наглядно демонстрирует информатизацию общества, и, в частности информатизацию образования. В настоящее время многие преподаватели учебных заведений используют современные информационные технологии не только при проведении учебных занятий, в организационной и внеучебной деятельности. В большинстве случаев использование средств информатизации оказывает положительное влияние на интенсификацию труда преподавателей, а также на эффективность обучающихся.

В настоящее время в высших учебных заведениях одной из форм обучения дисциплинам различных специальностей являются лабораторные занятия с использованием современных информационных технологий – компьютерных математических пакетов Maple, Mathematica, Matlab, MathCad и др. [64, 96, 97, 101, 103, 127, 131-134, 154, 156]. В обучении ОНЗ с их высоким математическим уровнем, сложным понятийным аппаратом, математическими методами исследования и трудоемкостью исследований, целесообразно использовать такую форму обучения, как лабораторная работа с использованием современных компьютерных технологий, среди которых – компьютерные математические пакеты (Maple, Mathematica, Mathcad, Matlab и др.), которые в настоящее время активно используются в вузовском образовании и позволяют реализовать дидактические принципы обучения. Подобные лабораторные занятия по ОНЗ интегрируют теоретико-методологические знания, практические умения и навыки студентов в едином процессе деятельности учебно-исследовательского характера. При правильной организации лабораторной работы студенты выступают в роли исследователей ОНЗ.

Разработка вычислительных алгоритмов нахождения приближенных решений обратных задач математической физики, и, в частности – обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, является важнейшим аспектом развития теории и практики обратных задач для дифференциальных уравнений, ввиду ряда математических особенностей. Одна из таких особенностей – нелинейность, которая, как правило, не позволяет получить точное решение обратной задачи в виде формулы. Методика исследования обратных задач предполагает поэтапное исследование свойств решения соответствующей прямой задачи, а затем – обратной. Как правило, строиться замкнутая система уравнений обратной задачи в виде интегро-дифференциальных уравнений, которая может быть решена при помощи итерационных процессов, включающим в себя многократное решение соответствующих прямых задач. В связи с чем, в этой ситуации численные методы выступают в качестве высокоэффективных методов исследования обратных задач.

Численные методы решения обратных задач для дифференциальных уравнений рассмотрены во многих работах [12, 31, 32, 42, 43, 60, 73].

Рассмотрим две постановки обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с их последующими решениями, которые предлагаются студентам исследовать в процессе их обучения ОНЗ. От них требуется доказать соответствующие теоремы существования, единственности и устойчивости решения обратной задачи или найти приближенное решение соответствующей обратной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с применением системы компьютерной математики Mathcad.

Обратная задача 2.2.1. На отрезке $[0;\ 0{,}5]$ задана краевая задача

$$\frac{d^2z}{dt^2} - a^2 \cdot z = 0\ ,\ \ t \in [0;\,0{,}5] \qquad (2.2.1)$$

$$z(0) = z_0,\ z(0{,}5) = z_1. \qquad (2.2.2)$$

Студенты, осуществляя эквивалентные преобразования, сводят ее к обратной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{du}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot u + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \lambda, \quad u(0) = 0,\ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad (2.2.3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot u(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot u(0{,}5) = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \qquad (2.2.4)$$

Возьмем $a = 1$, $z_0 = 0$, $z_1 = 1$. В этом случае $\alpha(t) = 1$ (см. решение обратной задачи 1.3.5 в подразделе 1.3 раздела 1 диссертации). Непосредственные вычисления показывают, что матрица M обратима, но второе условие теоремы не выполняется $(q < 1)$. Несмотря на это итерационная последовательность сходится. Результаты расчетов представлены на рисунках 8, 9.

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.919 \end{pmatrix}$$

$$u(0.0001) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.1922 & 9.6031 \times 10^{-3} \\ 0.3864 & 0.0385 \\ 0.5844 & 0.087 \\ 0.7882 & 0.1556 \\ 1 & 0.2449 \end{pmatrix}$$

Рисунок 8 - Численное решение обратной задачи (2.2.3), (2.2.4)

Здесь для сравнения приближенного решения $y(t)$ задачи (2.2.3), (2.2.4), полученного рассмотренным выше методом, представлено точное решение $Yt(t)$ исходной задачи, а также ее решение $Yp(t)$, полученное конечно-разностным методом.

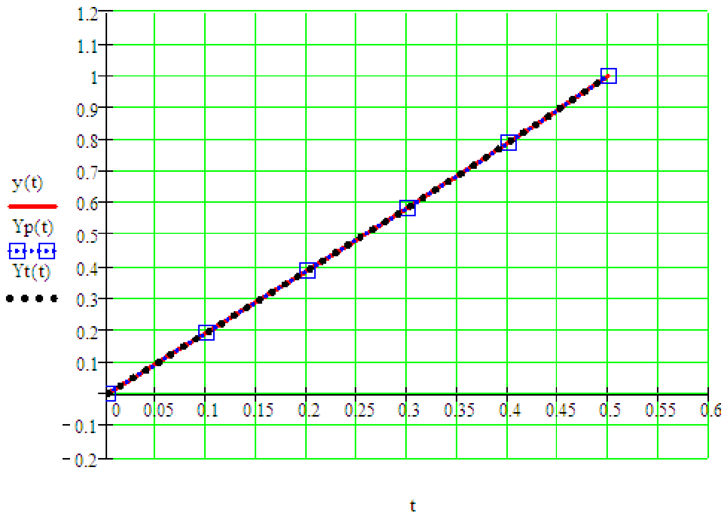

Рисунок 9 - Графическая интерпретация решения задачи (2.2.1), (2.2.2)

Как видно из сравнительного анализа решений, предлагаемый алгоритм, дает достаточно хорошее приближение к решению обратных задач для системы дифференциальных уравнений с параметром вида (2.2.3), (2.2.4) и эквивалентной ей системы краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений вида (2.2.1), (2.2.2) и может с успехом применяться на практике. Использование для реализации вычислительного алгоритма системы компьютерной математики Mathcad позволяет студентам наглядно представить вычислительный алгоритм, понять и проанализировать его, быстро увидеть изменение результатов при изменении данных и наглядно отобразить их графически, что, безусловно, привлекательно.

Обратная задача 2.2.2. Изложим конечно-разностный алгоритм решения еще одной постановки обратной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, которая рассматривается в процессе обучения ОНЗ.

Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с неизвестным коэффициентом

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x,\alpha)+a(x)y(x,\alpha)=0, \quad a(x)\in C(-\infty,+\infty); \; x,\alpha\in R, \qquad (2.2.5)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x,\alpha)\big|_{x=\alpha}=1. \qquad (2.2.6)$$

Здесь x – независимая переменная, α – числовой параметр.

По заданной дополнительной информации о решении задачи (2.2.5), (2.2.6) при фиксированном значении переменной $x=x^*$

$$y(x^*,\alpha)=\varphi(\alpha), \quad x^* - \mathrm{const}, \; \alpha\in R \qquad (2.2.7)$$

студентам предлагается вычислить неизвестный коэффициент $a(x)$ и найти решение $y=y(x,\alpha)$.

При рассмотрении данной обратной задачи, студентам доводятся сведения о том, что уравнение (2.2.5), которое в литературе встречается под названием уравнения Хилла, используется в геофизике, электродинамике, в волновых процессах, гармонических колебаниях и др. Вопросами корректности решения прямой задачи для этого уравнения занимались А.М. Ляпунов, Н.Е. Жуковский, М.Г. Крейн, Ж. Борг, В.М. Старжимский, В.А. Якубович и другие ученые. Единственность и существование решения обратной задачи (2.2.5)–(2.2.7) исследованы в работе [123].

Конечно-разностный алгоритм нахождения приближенного решения обратной задачи студенты реализуют по нижеприведенной схеме.

1. Непрерывная область изменения аргументов x,α заменяется дискретным множеством $D(h)=\{(k\,h,\; i\,h):\; k=\overline{-n,n},\; i=\overline{-n,n}\},\; h>0$. В узлах

(k,i), $k,i = \overline{-n,n}$ введенной области $D(h)$ определяются сеточные функции целочисленных аргументов $v(k,i) = v_k^i$, $a(k) = a_k$, $\varphi(i) = \varphi_i$. И значения функций $y(x_k, \alpha_i)$, $a(x_k)$, $\varphi(\alpha_i)$ в них заменяются соответствующими значениями сеточных функций v_k^i, a_k, φ_i.

2. Соотношения (2.2.5)–(2.2.7) заменяются разностным аналогом

$$\frac{v_{k+1}^i - 2v_k^i + v_{k-1}^i}{h^2} + a_k v_k^i = 0, \quad (i,k) \in D(h), \tag{2.2.8}$$

$$v_i^i = 1, \qquad i = \overline{-n,n}, \tag{2.2.9}$$

$$\frac{v_{i+1}^i - v_{i-1}^i}{2t} = 0, \quad i = \overline{-n+1,\, n-1}, \tag{2.2.10}$$

$$v_0^i = \overline{\varphi_i}, \; i = \overline{-n,n}, \tag{2.2.11}$$

из которых нужно определить входящие в него неизвестные сеточные функции $\{v_k^i\}$, $\{a_k\}$, $k,i = \overline{-n,\, n}$.

Ниже представлен вычислительный алгоритм их нахождения.

Введем обозначение: $2 - a_k h^2 = c_k$. Положив в (2.2.8) $i = k$, и, учитывая (2.2.9), (2.2.10), определим выражения для c_k при

$$k < 0: \quad c_k = 2v_{k+1}^k, \tag{2.2.12}$$

и

$$k > 0: \quad c_k = 2v_{k-1}^k. \tag{2.2.13}$$

Рассмотрим случай $k > 0$. Полагая в (2.2.13) $i = k = 1$, найдем $c_1 = 2\varphi_1$. При $i = k = 2$ имеем $c_2 = 2v_1^2$, где v_1^2 определяется из соотношений (2.2.8), (2.2.9) при $i = 2$, $k = 1$

$$\begin{cases} v_0^2 - c_1 v_1^2 + v_2^2 = 0, \\ v_0^2 = \overline{\varphi}_2, \quad v_2^2 = 1 \end{cases}$$

Для определения каждого из следующих значений c_k, $k = \overline{3,n}$, необходимо предварительно найти v_k^i, $i = \overline{3,n}$, $k = \overline{1,i-1}$. Для этого имеем трехточечные задачи с краевыми условиями, которые могут быть решены методом прогонки:

$$\begin{cases} v_{k+1}^i - c_k\, v_k^i + v_{k-1}^i = 0, \\ v_0^i = \varphi_i, \quad v_i^i = 1, \\ i = \overline{3,\, n},\ k = \overline{1,\, i-1} \end{cases}$$

Аналогично могут быть найдены и значения c_k при $k < 0$. Это потребует предварительного определения v_k^i, $i = -\overline{1,\, -n}$, $k = -\overline{1,\ i-1}$.

Для нахождения c_0 может быть использовано соотношение $a_0 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varphi'(x)}{x}$, представленное в терминах сеточной функции φ_i: $a_0 = \dfrac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2}$ или же, интерполяционный многочлен Ньютона для равноотстоящих узлов.

Чтобы определить значения функции v_k^i в оставшейся области следует воспользоваться выражением (2.2.8), предварительно преобразовав к виду:

$$v_{k+1}^i = c_k\, v_k^i - v_{k-1}^i\ ,\ k = \overline{0,\, n-1}, \quad i = -\overline{n,\, k-1},$$

$$v_{k-1}^i = c_k\, v_k^i - v_{k+1}^i\ ,\ k = -\overline{n+1, 0}, \quad i = \overline{k+1, n}.$$

Построенный алгоритм дает удовлетворительное приближение $\{a_k\}$ к истинному значению коэффициента $a(x)$, а сеточная функция $\{v_k^i\}$, $k, i = -\overline{n,\, n}$ достаточно хорошо аппроксимирует непрерывную функцию $y(x,\, \alpha)$.

Результаты расчетов при $a(x) = -4$, $h = 0.2$, $n = 5$ представлены на рисунках 10, 11.

u =

	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5	1	1.081	1.337	1.811	2.577	3.762	5.557	8.253	12.287	18.313	27.308
-4	1.081	1	1.081	1.337	1.811	2.577	3.762	5.557	8.253	12.287	18.313
-3	1.337	1.081	1	1.081	1.337	1.811	2.577	3.762	5.557	8.253	12.287
-2	1.811	1.337	1.081	1	1.081	1.337	1.811	2.577	3.762	5.557	8.253
-1	2.577	1.811	1.337	1.081	1	1.081	1.337	1.811	2.577	3.762	5.557
0	3.762	2.577	1.811	1.337	1.081	1	1.081	1.337	1.811	2.577	3.762
1	5.557	3.762	2.577	1.811	1.337	1.081	1	1.081	1.337	1.811	2.577
2	8.253	5.557	3.762	2.577	1.811	1.337	1.081	1	1.081	1.337	1.811
3	12.287	8.253	5.557	3.762	2.577	1.811	1.337	1.081	1	1.081	1.337
4	18.313	12.287	8.253	5.557	3.762	2.577	1.811	1.337	1.081	1	1.081
5	27.308	18.313	12.287	8.253	5.557	3.762	2.577	1.811	1.337	1.081	1

λ =

	-5
-5	-4.054
-4	-4.054
-3	-4.054
-2	-4.054
-1	-4.054
0	-4.054
1	-4.054
2	-4.054
3	-4.054
4	-4.054
5	-4.054

Рисунок 10 - Результаты численного решения задачи (2.2.5)–(2.2.7)

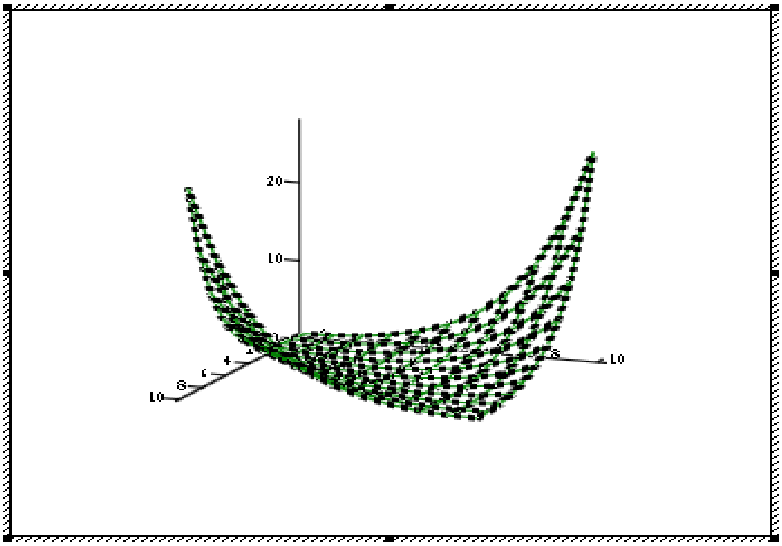

Рисунок 11 - Графическая интерпретация численного решения задачи (2.2.5)–(2.2.7)

Приближенное решение на рисунке 11 представлено пунктирной линией (черного цвета), точное решение – сплошной (зеленой) линией. Точность при необходимости можно повысить путем уменьшения шага h.

В процессе обучения обратным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений студенты овладевают математическими методами решения различных задач определения коэффициентов дифференциальных уравнений, правой части, начальных условий по некоторым известным функционалам его решения, осмысливают методологию исследования неизвестных свойств объектов и явлений, опирающуюся на принципы организации теоретических и практических исследований.

Такой подход к обучению решению ОНЗ способствует расширению мировоззрения студентов, которые осознают взаимопроникновение и взаимообогащение научных методов, подходов и приемов, разработанных в разных областях знаний. Достижение полноценного результата в обучении ОНЗ возможно при условии применения конкретных методов их решения. В этом случае решение ОНЗ выступает и как цель, и как средство обучения. Этот вид учебной деятельности студентов служит средством формирования и развития прикладного математического мышления; способствует глубокому и прочному усвоению сложных определений, понятий, методов и подходов, используемых при решении ОНЗ, а также способствует формированию умений и навыков исследования ОНЗ.

Как показывает опыт, включение в систему обучения ОНЗ лабораторных занятий с использованием компьютерных математических пакетов позволяет достичь высокого уровня усвоения знаний, овладения необходимым прикладным математическим аппаратом путем активизации учебнопознавательной деятельности студентов и делает целесообразным использование данной формы организации обучения.

2.3 Организация и проведение педагогического эксперимента

Одной из важных составляющих учебно-методической работы преподавателей в высших учебных заведениях является контроль качества приобретаемой системы знаний, умений и навыковстудентов.

Для контроля качества приобретаемой системы знаний, умений и навыков студентов по обучению их решению ОНЗ организован педагогический эксперимент.

Цель педагогического эксперимента – подтверждение или опровержение гипотезы педагогического исследования, то есть обоснование эффективности или неэффективности предлагаемой методики обучения. Экспериментальная педагогическая деятельность осуществляется на разных этапах педагогического исследования, направленное на выявление и обоснование педагогических воздействий компонентов методической системы, как: содержание, методе, формы и средства обучения на повышения качества математической подготовеи студентов.

Педагогический эксперимент, как правило, состоит из констатирующего, поискового, формирующего и контролирующего этапов.

Несмотря на существование большого количества определений педагогического эксперимента (Ю.З. Кушнер, И.П. Подласый, М.Н. Скаткин, И.Ф. Харламов и др.[156, 157,166, 167]), его сущность заключается в анализе качества получаемых обучающимися знаний в процессе обучения.

В процессе проведения педагогического эксперимента, целесообразно проверять качество усвоения студентамисистемы знаний не только из области математических методов и методологии исследования ОНЗ, но и фундаментальные знания из области математики.

В качестве таких важных составляющих фундаментальных знаний магистрантов по ОНЗ нами выделены следующие:

– показатели полноты усвоения учебного материала и содержания понятий, используемых в обучении ОНЗ;

– умения и навыки применения рациональных рассуждений при исследовании ОНЗ;

– уровень фундаментальных знаний из области теории и практики исследования ОНЗ и из области прикладной математики.

При проведении педагогического эксперимента были использованы разнообразные подходы, в том числе применение математических методов для обработки результатов педагогических измерений, а также статистические методы.

Педагогический эксперимент проводился для студентов и магистрантов специальностей 5В010900 – Математика, 5В060100 – Математика, 6М010900 – Математика и 5В060100 – Информатика, 6М011100 – Информатика Казахского национального педагогического университета имени Абая.

В начале эксперимента были проведены беседы со студентами и магистрантами, анкетирование и контрольные срезы по ОНЗ. В результате исследования выяснилось недостаточное владение магистрантами фундаментальных знаний как из области теории и практики исследования ОНЗ, так и из области математики.

В качестве контрольной группы была выбрана группа из 19 человек, магистрантов 2 курса по специальности 6М010900-Математика 2014-2015 года обучения. В качестве экспериментальной группы была выбрана группа из 30 человек магистрантов 2 курса по специальности 6М010900-Математика 2015-2016 года обучения. Обучение в экспериментальной группе проводилась по разработанной методике обучения решению ОНЗ.

В ходе педагогического эксперимента определялись: коэффициент усвоения учебного материала по ОНЗ по формуле В.П. Беспалько[168, с. 58]: $k = n/N$, где n– количество баллов, набранных магистрантами, N – максимальное количество баллов; полнота усвоения содержания понятий, используемых в учебном курсе ОНЗ, по формуле А.В. Усовой[169]:

$$K = (1/p \cdot n)\sum_{i=1}^{n} p_i \tag{2.3.1}$$

где p_i – число существенных признаков понятия, усвоенных i-м магистрантом; p – общее число признаков понятия; n– число магистрантов в группе.

Для выявления полноты усвоения фундаментальных основ теории и методологии ОНЗпредлагались задания и задачина раскрытие содержания изучаемых понятий; исследование вопросов корректности ОНЗ, сходимости или устойчивости вычислительного алгоритма; нахождение приближенного решения ОНЗ и другие подобные задания и задачи.

Среди таких заданий была следующая обратная задачауправления:

Имеется объект управления, который описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = d\,u(t),\ c \neq 0,\ t \in (0, +\infty) \tag{2.3.2}$$

Требуется определить оптимальный закон управления $u(t)$ при переводе объекта из начального состояния

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = 0, \tag{2.3.3}$$

в конечное положение

$$y(+\infty) = 0,\ \ y'(+\infty) = 0 \tag{2.3.4}$$

при условии, что функционал

$$J(u) = \int_0^{+\infty} (y^2(t) + \lambda u^2(t)) \to \min \qquad (2.3.5)$$

достигает своего минимума.

В процессе исследования обратной задачи управления (2.3.2)–(2.3.5) студенты, прежде всего, строят функцию Лагранжа F

$$F = y^2(t) + \alpha u^2(t) + \lambda(t)\left[a_2\, y''(t) + a_1\, y'(t) + y(t) - a_3\, u(t)\right],$$

для которой составляют уравнение Эйлера – Лагранжа для двух неизвестных функции $y(t)$ и $u(t)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dt^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial y''} = 0, \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial F}{\partial u'} = 0.$$

После чего, находя решение обратной задачи, определяют оптимальный закон управления. В контрольной группе такая задача была решена только с помощью преподавателя. В экспериментальной группе студенты ее решили самостоятельно. Решение отмеченной задачи демонстрирует наличие у студентов фундаментальных основ ОНЗ.

В ходе эксперимента, также, выявлен уровень усвоения фундаментальных основ ОНЗ у экспериментальной группы.

Рисунки 12, 13 иллюстрируют исходные данные для определения усвоения фундаментальных основ теории ОНЗ (контрольная и экспериментальная группа).

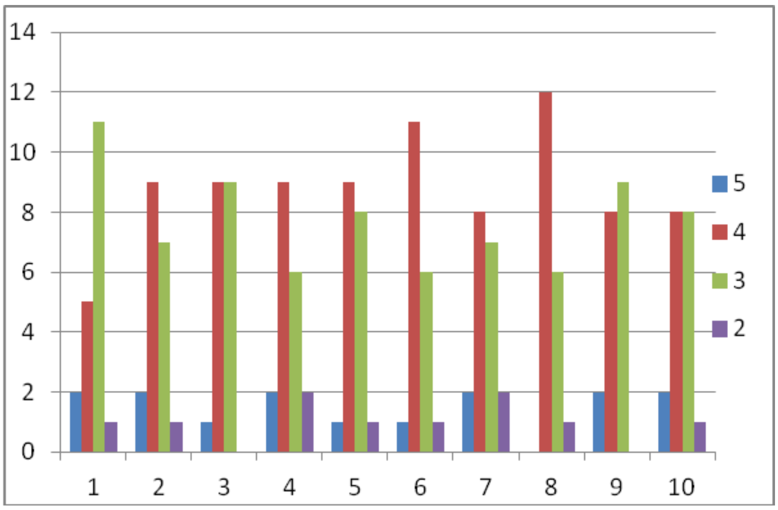

Рисунок 12 - Исходные данные для определения усвоения фундаментальных основ теории ОНЗ (контрольная группа)

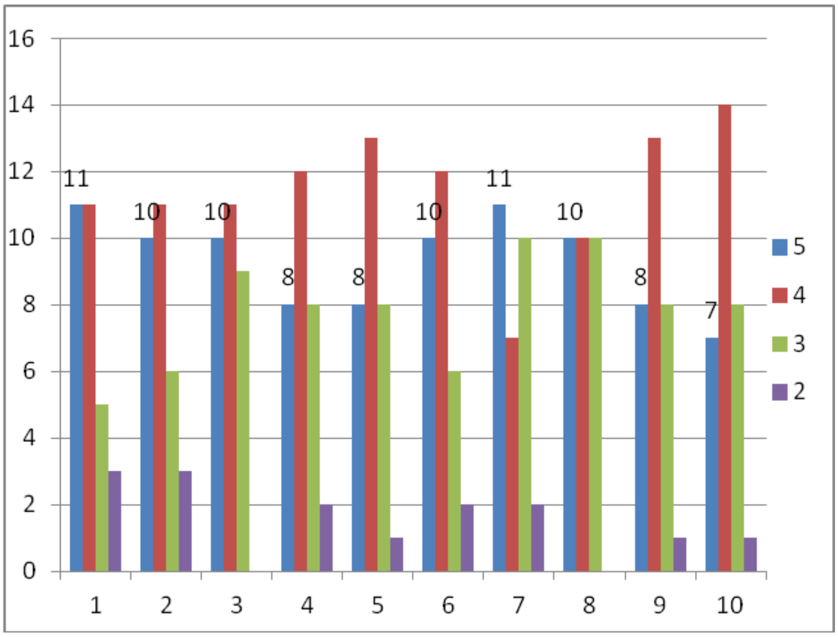

Рисунок 13 - Исходные данные для определения усвоения фундаментальных основ теории ОНЗ (экспериментальная группа)

Рисунки 14, 15 иллюстрируют показатели усвоения магистрантами контрольной и экспериментальной группы фундаментальных основ ОНЗ.

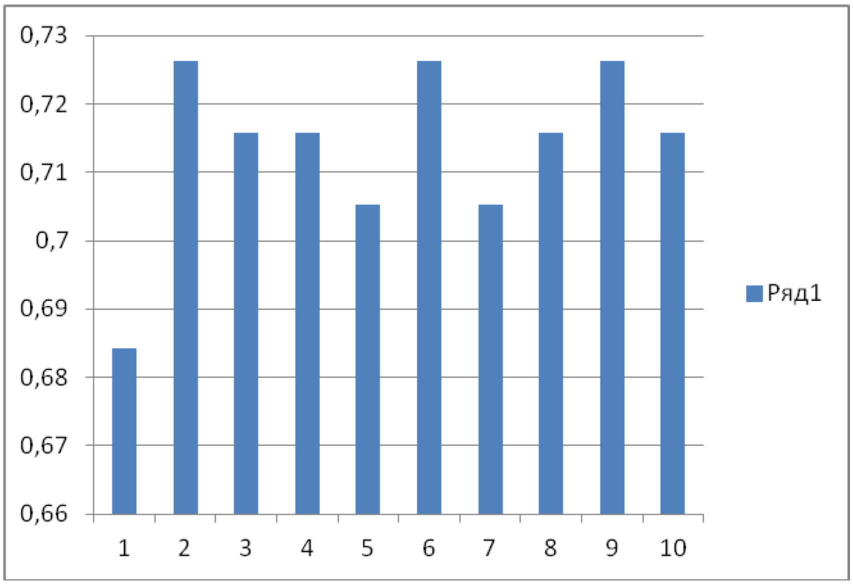

Рисунок 14- Показатели коэффициента усвоения фундаментальных основ теории ОНЗ (контрольная группа)

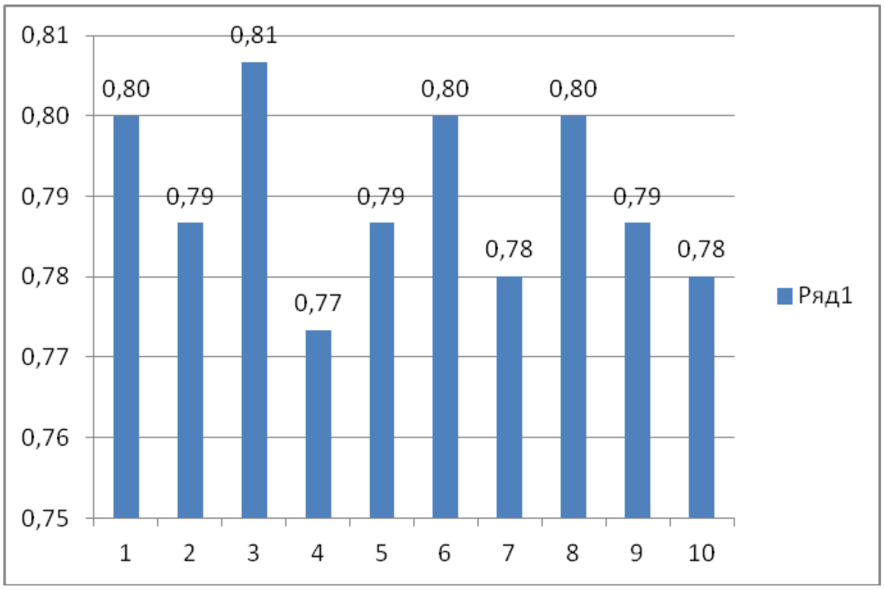

Рисунок 15 - Показатели коэффициента усвоения фундаментальных основ теории ОНЗ (экспериментальная группа).

На рисунке 14 и 15 на вертикальной оси отмечены значения коэффициента, вычисляемого по формуле (2.3.1), а на горизонтальной оси цифрами обозначены номера темы заданий.

Как видно из рисунка 14, 15 показатели коэффициента по каждой из 10 тем не превышают 0.7 – минимально допустимый уровень.

Темы заданий по номерам:

1. Понятие корректности математической постановки задачи.
2. Понятие обратной задачи для дифференциального уравнения.
3. Понятие аналитического решения ОНЗ.
4. Понятие регуляризации некорректно поставленных задач.
5. Понятие вычислительного алгоритма нахождения приближенного решения ОНЗ.
6. Понятие сходимости вычислительного алгоритма нахождения приближенного решения ОНЗ.
7. Понятие устойчивости вычислительного алгоритма нахождения приближенного решения ОНЗ.
8. Понятие некорректной задачи линейной алгебры.
9. Понятие эффективного метода решения СЛАУ.
10. Понятие рационального рассуждения при решении прикладной задачи.

При использовании формулы А.В. Усовой [169, с.55] для каждой темы задания были определены пять признаков понятия и использованы следующие обозначения: 5 – правильный полный ответ (магистрантом приведены все пять признаков); 4 – неполный правильный ответ (магистрантом приведены три либо четыре признака); 3 – неполный ответ (магистрантом приведены один либо два признака); 2 – ответ отсутствует (у магистранта по данному заданию нет ответа).

Рисунок 15 иллюстрирует, что показатели коэффициента для экспериментальной группы достаточно большие. Результаты проведенного эксперимента свидетельствуют об эффективности разработанной методики обучения решению ОНЗ магистрантов педагогических вузов. Косвенно подтверждены наличие научно-образовательного потенциала обучения ОНЗ, у магистрантов знаний из области прикладной математики, что свидетельствует о том, что гипотеза получила свое подтверждение.

В ходе проведения педагогического эксперимента, при помощи коэффициента Пирсона r_{xy} [170]:

$$r_{xy}=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{\sqrt{\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)\left(n\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2\right)}},$$

где n – число сравниваемых наблюдений, x_i и y_i – сравниваемые количественные признаки, выявлялась корреляционная зависимость показателей влияния обучения ОНЗ на формирование фундаментальных знаний из области прикладной математики.

Предлагались различные учебные задачи и задания. При проведении педагогического эксперимента магистрантам контрольной и экспериментальной групп были предложены задания из следующих 10 тем:

1. Компактные множества.
2. Равномерная сходимость функциональных последовательностей.
3. Банахово пространство аналитических функций.
4. Принцип сжатых отображений.
5. Регулярные и сингулярные обобщенные функции.
6. Интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма.
7. Фундаментальное решение задачи Коши для волнового уравнения.
8. Фундаментальное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности.
9. Фундаментальное решение оператора Лапласа.
10. Математические модели как средство познания окружающего мира.

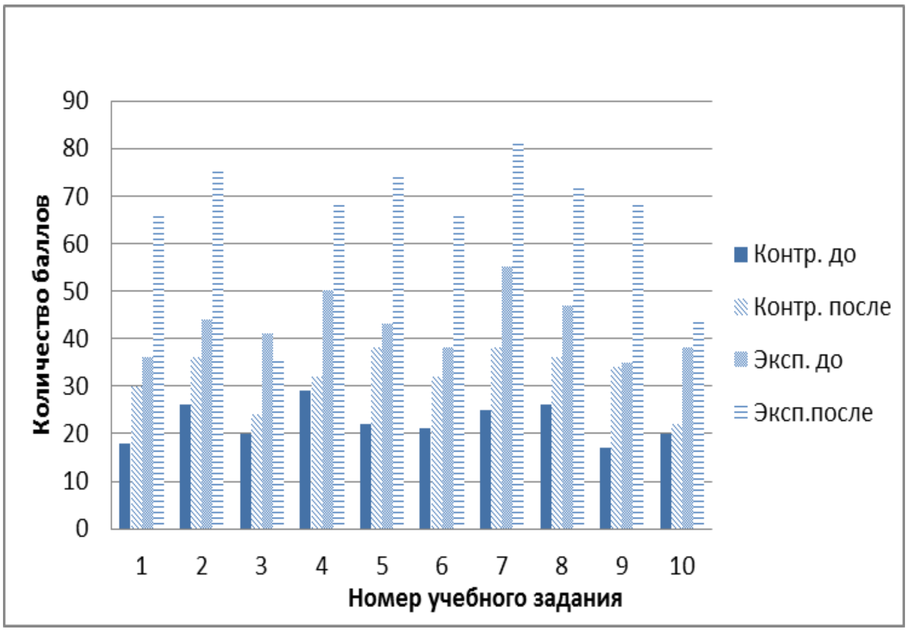

Рисунок 16 - Показатели повышения уровня фундаментальных знаний в области прикладной математики при обучении ОНЗ

Рисунок 16 иллюстрирует результаты выполнения этих заданий магистрантами контрольной и экспериментальной групп до и после обучения соответствующим разделам ОНЗ.

Выводы по второму разделу

Усовершенствование содержания обучения решению ОНЗ студентов педагогических вузов, обладающее дидактической и методологической значимостью, логикой изложения учебного материала, единствомучебного материала, обобщенностью, полнотой, оптимальностью и другими критериями способствовало повышению качества знаний, умений и навыков студентов по математике в рассматриваемом контексте.

Разработанная методика обучения решению ОНЗ студентов и педагогических вузов, предусматривающая применение методов рациональных рассуждений при исследовании ОНЗ (выдвижение гипотез при аналитическом или численном решение ОНЗ, уточнение в ходе решения ОНЗ, контроль сходимости и погрешности конструктивного вычислительного алгоритма решения ОНЗ, разумные аналогии при решении ОНЗ, рассмотрение частных случаев при решении ОНЗ, осмысление физических свойств исследуемого объекта в процессе решения ОНЗ) позволила повысить исследовательский уровень учебной деятельности студентов.

Разработанная методика использования компьютерных математических пакетов для реализации вычислительных алгоритмов приближенного решения обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и некорректных задач способствовало повышению эффективности процесса обучения решению ОНЗ.

Экспериментальная работа доказала эффективность разработанной методики обучения решению ОНЗ студентов и магистрантов специальностей математика и информатика педагогических вузов и ее позитивное влияние на формирование фундаментальных знаний из области математики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного исследования были получены следующие основные **выводы и результаты**

1.Использование, выявленного научно-образовательного потенциала обучения ОНЗ способствует расширению научного мировоззрения студентов, развитию логического, алгоритмического, информационного мышления, позволяет формированию умений правильно устанавливать причинно-следственные связи физических процессов и явлений, реализует междисциплинарные связи и прикладную направленность обучения. В результатестуденты более глубоко усваивают основные понятия прикладной математики и других предметных областей; реализуются мотивационная, познавательная, развивающая, воспитательная и других функций обучения, что приводит к позитивным изменениям в образовательной деятельности студентов, формирующиеу студентов правильное представление о путях приобретения человечеством знаний об окружающем мире, о развитии методов познания.

2. Учет, при обучении студентов фундаментальным основам теории и практики ОНЗ, дидактических принципов научности, доступности, наглядности, системности, связи теории и практики, междисциплинарных связей, способствует пониманию сути специально подобранных задач и заданий (обратная задача восстановления конечной якобиевой матрицы по некоторым функционалам от ее спектральных данных, обратная задача для дифференциального уравнения в частных производных первого порядка с данными Коши, задача дифференцирования функции, известной приближенно, обратная задача для параболического уравнения, обратная задача гиперболического уравнения и другие) в активизации их познавательной деятельности.

3. Цели и содержание обучения ОНЗ должны быть нацелены на формирование у студентовфундаментальных математических знаний из области теории и методологии ОНЗ, умений самостоятельно решать разнообразные ОНЗ, сформировать углубленное представление о междисциплинарных связях ОНЗ. Такое содержание обучения решению ОНЗ должно включать темы, способствующие фундаментализации знаний путемсоставления математических моделей обратных и некорректных задач, рассмотрения исторических аспектов развития теории и практики обратных и некорректных задач, определения роли интегральных уравнений Вольтера и Фредгольма в теории обратных задач для дифференциальных уравнений, обратных и некорректных задач в развитии прикладной и вычислительной математики и т.п.

4. Описанные методы рациональных рассуждений, применяемые в обучении решению ОНЗ студентов специальностей математика и информатика, среди которых: выдвижение гипотез, уточнения, разумные аналогии, осмысление физических свойств исследуемого объекта и др., способствуют повышению уровня исследовательских навыков студентов в процессе обучения математике.

5. Разработанные рекомендации по использованию компьютерного математического пакета Mathcad на практических занятиях в процессе решения учебных обратных и некорректных задач окажут существенную помощь преподавателям в повышении эффективности процесса обучения студентов математике.

6. Сформулированные критерии, в числе которых коэффициент А.В. Усовой (выявление полноты усвоения содержания понятий ОНЗ), коэффициент Пирсона (выявление корреляционной зависимости показателей влияния обучения ОНЗ на формирование фундаментальных знаний в области прикладной математики) и другие критерии, позволяют экспериментально доказать эффективность разработанной методики обучения ОНЗ студентов вузов естественнонаучных направленийи ее позитивность влияния на формирование фундаментальных знаний студентов из области прикладной математики.

Вместе с тем настоящее исследование не претендует на достижение полноты выявления и исследования всех возможных средств и методов фундаментализации математического образования. Нерешенные проблемы фундаментализации могут стать предметом дальнейших исследований из области педагогики и методики обучения математике, нацеленных на обоснование научно-образовательного потенциала обучения физико-математическим дисциплинам в вузе, а также на создание соответствующих научно-обоснованных методических систем обучения, что могло бы внести весомый вклад в фундаментализацию высшего математического образования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Закон Республики Казахстан «Об образовании»: принят 27 июля 2007 года, № 319-III (с изменениями и дополнениями по состоянию на 11.07.2017г.).

2 Государственная программа развития образования и науки Республики Казахстан на 2016–2019 годы // Указ Президента Республики Казахстан от 1 марта 2016 года, № 205. – Астана, 2016.

3 Послание Президента Республики Казахстан Н.А.Назарбаева - Лидера нации народу Казахстана «Стратегия «Казахстан-2050» – новый политический курс состоявшегося государства». – Астана, 27.01.2012.

4 План нации - 100 конкретных шагов. Программа Президента Республики Казахстан от 20 мая 2015 года. – Астана, 2015.

5 Послание Президента Республики Казахстан народу Казахстана «Казахстан в новой глобальной реальности: рост, реформы, развитие». – Астана, 30.11.2015.

6 Послание Президента Республики Казахстан Н.Назарбаева народу Казахстана «Новые возможности развития в условиях четвертой промышленной революции». – Астана, 10.01.2018.

7 Кушербаев К.Е., Ахметов А.К., Абылкасымова А.Е., Рахимбек Х.М. Стратегия развития высшего образования в Республике Казахстан. – Алматы: Білім, 1998, – 353 с.

8 Садыков Т.С., Абылкасымова А.Е. Дидактические основы обучения в высшей школе. – Алматы: РИК КАО им. И. Алтынсарина, 2000. – 186 с.

9 Bidaibekov Y.Y., Kornilov V.S., Kamalova G.B., Akimzhan N.Sh. Fundamentalization of knowledge system on applied mathematics in teaching students of inverse problems for differential equations // AIP Conference Proceedings 1676, 020044-1–020044-5. - Antalya, Turkey, 2015; doi: 10.1063/1.4930470 – URL: http://dx.doi.org/10.1063/1.4930470.

10 БектемесовМ.А. Фракталдар. Орнықтылықжәнежинақтылық. – Алматы: АбайатындагыҚазҰПУ, 2010. – 106 с.

11 Отелбаев М.О. Оценка спектра оператора Штурма-Лиувилля. Алматы, Гылым, 1990, 191с.

12 Смагулов Ш.С., Джаикбаев А.М. Методические указания к чтению лекций «Разрешимость и аппроксимация для уравнений свободной конвекции». – Алма-Ата: Изд-во КазГУ, 1989. – 36 с.

13 Сулейменов Ж. С. Методика преподавания дифференциальных уравнений: учебное пособие. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 199 с.

14 Султангазин У.М., Жаутыков О.А., Ким Е.И. и др. Прикладные задачи математической физики и функционального анализа. – Алма-Ата: Наука, 1985. – 172 с.

15 Темирболат С.Е. Новая методика исследования (решения) некорректно поставленных краевых задач: учебное пособие. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 62 с.

16 Темирболат С.Е. Метод редукции исследования краевых задач для дифференциальных уравнений: учебно-методическое пособие для преподавателей и студентов. – Алматы: КазНУ им. аль-Фараби, 2013. – 52 с.

17 Аданников А.А. Фундаментализация физико-математической подготовки в профессиональной подготовке студентов технических вузов: дис. … канд. пед. наук. – Тольятти: ТГУ, 2001. – 208 с.

18 Беликов В.В. Развитие методической системы обучения численным методам в условиях фундаментализации высшего математического образования: дис. … канд. пед.наук. – М., 2011. – 200 с.

19 Егорченко И.В. Фундаментализация математического образования: аспекты, особенности трактовок, направления реализации // Сибирский педагогический журнал. – Новосибирск, 2006. – № 3. – С. 11–19.

20 Ёлгина Л.С. Фундаментализация образования в контексте устойчивого развития общества: сущность, концептуальные основы: дис. … канд. филос. наук. – Улан-Уде, 2000. – 154 с.

21 Бидайбеков Е.Ы., Корнилов В.С., Камалова Г.Б., Акимжан Н.Ш. Обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений в условиях фундаментализации прикладного математического образования // Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке: матер. VII Междунар. науч.-методич. конф. – Алматы: КазНПУ им. Абая, 2015. – С. 227–230.

22 Лозовский В.Н., Лозовский С.В., Шукшунов В.Е. Фундаментализация высшего технического образования: цели, идеи, практика. – М.: Лань, 2006. – 128 с.

23 Новиков А.Д. Новая методика исследования функций в контексте фундаментализации математического образования // Наука и школа. –2010. – №4. –С. 43-46.

24 Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. –М: Наука, 1984. -264 с.

25 Попов Н.И. Фундаментализация университетского математического образования // Вестник Томского государственного педагогического университета. – 2009. – Вып. 9 (87). – С. 11–13.

26 Самарский А.А., Вабишевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: УРСС, 2004. – 478 с.

27 Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1992. – 432 с.

28 Тестов В.А. Фундаментальность образования: современные подходы // Педагогика. – 2006. – № 4. – С. 3–9.

29 Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. – 1943. Т.39, № 5. – С.195-198.

30 Хинчин А.Я. Педагогические статьи: Вопросы преподавания математики. Борьба с методическими штампами. – М.: КомКнига, 2006. – 208 с.

31 Блехман И.М., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика: Предмет, логика, особенности подходов. – М.: КомКнига, 2005. – 376 с.

32 Кабанихин С.И., Искаков К.Т. Обратные и некорректные задачи для гиперболических уравнений. – Алматы: КазНПУ им. Абая, 2007. – 330 с.

33 Кабанихин С.И., Искаков К.Т., Бектемесов М.А., Шишленин М.А. Алгоритмы и численные методы решения обратных и некорректных задач: учебное пособие для студентов вузов. – Астана, 2011. – 328 с.

34 Кальменов Т. Ш. Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа // Материалы международной конференции «Тихонов и современная математика» / МГУ. Москва, 2006. Т1. С.42-55.

35 Бидайбеков Е.Ы., Камалова Г.Б. Обратные задачи для дифференциальных уравнений как компонент вычислительной информатики в системе подготовки будущих учителей информатики // Обратные и некорректные задачи математической физики: тезисы междунар. конф. – Новосибирск, 2007 – URL: http://www.math.nsc.ru/ conference/ipmp07/main.html

36Бидайбеков Е.Ы., Камалова Г.Б., Джумабаева Д.Д. Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений сведением к обратным задачам // Вестник АГУ. Серия физико-математическая. – 2002. – № 1(5). – С. 57–63.

37 Муканова Б.Г., Кенжебаев Т.С. Усовершенствование метода решения обратной задачи для горизонтально-слоистых моделей при зондировании методом сопротивлений // Материалы международной конференции «Обратные и некорректные задачи математической физики». Новосибирск, 2007.

38 Мухамбетжанов С.Т. Об одном приближенном методе решения задач неравновесной фильтрации // Вестник КазНПУ. Серия «физико-математические науки». 2007. №2(18). С. 180-186.

39 Мынбаев К. Т, Отелбаев М. О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. - М.: Наука, 1988. – 282 с.

40 Нурсеитов Д.Б., Кабанихин С.И., Бектемесов М.А. Оценка скорости сильной сходимости метода итераций Ландвебера для решения начально-краевой задачи для уравнения Лапласа // Вестник КазНПУ. Серия «физико-математические науки». 2007. №1. С. 202-206.

41 Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Нурсеитова А.Т. Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы. – Алматы-Новосибирск: ОФ «Международный фонд обратных задач, 2006. – 425 с.

42 Кабанихин С.И., Бидайбеков Е.Ы., Корнилов В.С., Шолпанбаев Б.Б., Акимжан Н.Ш. Корректные и некорректные задачи для СЛАУ: анализ и методика преподавания // Сибирские электронные математические известия. – 2015. – Т. 12. – С. 255–263. – URL: http://semr.math.nsc.ru/v12/c1-283.pdf

43 Алексеев А.С. Обратные динамические задачи сейсмики. В кн.: Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. - М.: Наука, 1967, с.9-84.

44 Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 287 с.

45 Буи Х.Д. Введение в теорию обратных задач механики материалов. – Караганда: КарГУ, 1997. – 378 с.

46 Бухгейм А.Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1983. – 207 с.

47 Бухгейм А.Л. Введение в теорию обратных задач. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1988. – 181 с.

48 Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М: Физматлит, 2007. – 223 с.

49 Ватульян А.О., Соловьев А.Н. Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел. – Ростов-на Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2008. – 176 с.

50 Ватульян А.О., Беляк О.А., Сухов Д.Ю., Явруян О.В. Обратные и некорректные задачи: учебник. – Ростов-на Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2011. – 232 с.

51 Гервер М.Л. Обратная задача для одномерного волнового уравнения с неизвестным источником колебания. – М.: Наука, 1974. – 123 с.

52 Гласко В.Б. Обратные задачи математической физики. – М.: Изд-во Московского университета, 1984. – 150 с.

53 Гольдман Н.Л. Обратные задачи Стефана. Теория и методы решения. – М: Изд-во Московского университета, 1998. – 295 с.

54 Гончарский А.В., Черепащук А.М., Ягода А.Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. – М.: Наука, 1978. – 335 с.

55 Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач: учебное пособие. – М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 1994. – 207 с.

56 Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.Н. Теория линейных некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 287 с.

57 Кабанихин С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1988. – 166 с.

58 Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи: учебник для студентов вузов. – Новосибирск: Сибирское научн. изд., 2009. – 458 с.

59 Корнилов В.С. Некоторые обратные задачи идентификации параметров математических моделей: учебное пособие для студентов вузов. – М.: МГПУ, 2005. – 359 с.

60 Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. – 1956, – Т.20, № 6. – С.819-842.

61 Лаврентьев М.М. Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений. – Новосибирск: НГУ, 1973. – 71 с.

62 Лаврентьев М.М. Некорректные задачи для дифференциальных уравнений. – Новосибирск: НГУ, 1981. – 75 с.

63 Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Линейные операторы и некорректные задачи. – М.: Наука, 1991. – 331 с.

64 Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 286 с.

65 Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1982. – 88 с.

66 Мамонтов Е.В. О корректности задач математической физики. – Новосибирск: НГУ, 1980. – 62 с.

67 Петров Ю.П., Сизиков В.С. Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями: учебное пособие. – СПб.: Политехника, 2003. – 261 с.

68 Прилепко А.И. Избранные вопросы в обратных задачах математической физики // Условно-корректные задачи математической физики и анализа. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1992. – С.151-162.

69 Романов В.Г. Одномерная обратная задача для телеграфного уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1968. – Т.5, № 1. – С.87–101.

70 Романов В.Г. Одномерная задача распространения электрических колебаний в проводах // Математические проблемы геофизики. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1969. – Вып.1. – С.92-102.

71 Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. – Новосибирск: Наука, 1972. – 164 с.

72 Романов В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений: спецкурс для студентов НГУ. – Новосибирск: НГУ, 1973. – 252 с.

73 Романов В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Обратная кинематическая задача сейсмики. – Новосибирск: НГУ, 1978. – 88 с.

74 Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах. – М.: Научный мир, 2005. – 304 с.

75 Романов В.Г., Кабанихин С.И., Пухначева Т.П. Обратные задачи электродинамики. – Новосибирск: Ротапринт ВЦ СО АН СССР, 1984. – 201 с.

76 Романов В.Г., Яхно В.Г. Обобщенные функции в математической физике: методические указания к курсу «Уравнения математической физики». – Новосибирск: НГУ, 1986. – Вып. 1. – 27 с.

77 Романов В.Г., Яхно В.Г. Обобщенные функции в математической физике: методические указания к курсу «Уравнения математической физики». – Новосибирск: НГУ, 1986. – Вып 2. – 35 с.

78 Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи геоэлектрики. – М.: Наука, 1991. – 303 с.

79 Сизиков В.С. Обратные прикладные задачи и MatLab: учебник для студентов вузов. – СПб.: Лань, 2011. – 251 с.

80 Танана В.П. Методы решения операторных уравнений. – М.: Наука, 1981. – 157 с.

81 Тимофеев Ю.М., Поляков А.В. Математические аспекты решения обратных задач атмосферной оптики: учебное пособие. – СПб: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2001. – 188 с.

82 Федотов А.М. Некорректные задачи со случайными ошибками в исходных данных. – Новосибирск: Наука, 1990. – 240 с.

83 Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Шишленин М.А. Методы решения некорректных задач линейной алгебры: учебное пособие / 2-е изд. – Алматы: КазНПУ им. Абая, 2011. – 131 с.

84 Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. – М.: Наука, 1995. – 308 с.

85 Яхно В.Г. Обобщенные функции в обратных задачах для дифференциальных уравнений: методические указания. – Новосибирск: НГУ, 1987. – 24 с.

86 Яхно В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1990. – 303 с.

87 Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Аяпбергенова А.Т. Итерационные методы решения обратных и некорректных задач. – Алматы: Наука, 2004. – 425 с.

88 Лозовский В.Н., Лозовский С.В., Шукшунов В.Е. Фундаментализация высшего технического образования: цели, идеи, практика. – М.: Лань, 2006. – 128 с.

89 Акимжан Н.Ш. К вопросам обучения некорректным и обратным задачам в вузе // Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач: сборник тезисов шестой междунар. молодеж. науч. школы-конф. – Алматы, Казахстан, 2014. – С.5. URL: http://conf.ict.nsc.ru/files/conferences/mmbam/249865/Theses_ONZ-2014.pdf

90 Белишев М.И., Благовещенский А.С. Динамические обратные задачи теории волн. – СПб.: СпбГУ, 1999. – 266 с.

91 Бидайбеков Е.Ы., Акимжан Н.Ш. К вопросам устойчивости вычислительных алгоритмов // Современные проблемы спектральной теории операторов и улучшения качества обучения математике: теория, методика и опыт: матер. междунар. науч.-практ. конф. – Тараз, 2013. – С. 45–56.

92 Бидайбеков Е.Ы., Камалова Г.Б. О содержании курса «Обратные задачи для дифференциальных уравнений» в подготовке будущих учителей информатики // Вестник КазНПУ им. Абая. Серия «Физико-математические науки». – 2008. – № 4 (24). – С. 54–61.

93 Бидайбеков Е.Ы., Корнилов В.С., Акимжан Н.Ш. Об обучении некорректным задачам линейной алгебре // Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач: сборник тезисов седьмой междунар. молодеж. науч. школы-конф. – Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2015. – С. 20.

94 Бидайбеков Е.Ы., Корнилов В.С., Акимжан Н.Ш. Междисциплинарные связи прикладной математики и информатики при обучении обратным и некорректным задачам // Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева. – Астана, 2016. – № 1 (110), II. – С. 66–71.

95 Бидайбеков Е.Ы., Корнилов В.С., Акимжан Н.Ш. Развитие научного мировоззрения студентов при обучении обратным и некорректным задачам // Вестник КазНПУ им. Абая. Серия «Физико-математические науки». – 2016. – № 1(53). – С. 18–24.

96 Bidaybekov E.I., Kornilov V.S., Kamalova G.B. Inverse Problems for differential equations in education // Inverse Problems: Modeling and Simulation (IPMS-2014): Abstracts of the 7th International conference. – Fethiye, Turkey, 2014. – P. 69.

97 Бидайбеков Е.Ы., Корнилов В.С., Камалова Г.Б. Обучение будущих учителей математики и информатики обратным задачам для дифференциальных уравнений // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». – 2014. – № 3 (29). – С. 57–69.

98 Бидайбеков Е.Ы., Корнилов В.С., Камалова Г.Б., Акимжан Н.Ш. Экспериментально-педагогическая деятельность при обучении студентов обратным задачам для дифференциальных уравнений // Вестник КазНПУ им. Абая. Серия «Физико-математические науки». – 2014. – № 3 (47). – С. 76–80.

99 Бидайбеков Е.Ы., Корнилов В.С., Камалова Г.Б., Акимжан Н.Ш. Применение компьютерных технологий при обучении студентов вузов обратным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». – 2015. – № 2. – С. 57–72.

100 Бидайбеков Е.Ы., Корнилов В.С., Камалова Г.Б., Акимжан Н.Ш. Система компьютерной математики Mathcad при обучении студентов вузов обратным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». – 2015. – № 2 (32). – С. 102–115.

101 Бидайбеков Е.Ы., Кабанихин С.И., Шолпанбаев Б., Акимжан Н.Ш. Макет электронного образовательного ресурса «Обратные задачи» // Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке: матер. VII междунар. науч.-метод. конф.– Алматы: КазНПУ им. Абая, 2015. – С. 223–226.

102 Корнилов В.С. Образовательные электронные ресурсы в обучении обратным задачам для дифференциальных уравнений // Электронные образовательные издания и ресурсы. Теория и практика: Бюллетень Центра информатики и информационных технологий в образовании Института содержания и методов обучения Российской академии образования. – М.: ИСМО РАО, 2006. – Вып. 1. – С. 30–36.

103 Корнилов В.С. Обучение обратным задачам для дифференциальных уравнений как фактор гуманитаризации математического образования. – М.: МГПУ, 2006. – 320 с.

104 Корнилов В.С. Теоретические и методические основы обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений в условиях гуманитаризации высшего математического образования: дис. … док. пед. наук. – М., 2008 . – 481 с.

105 Корнилов В.С. Влияние обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений на формирование профессиональных качеств студентов физико-математических специальностей вузов // Вестник

Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». – 2010. – № 2 (20). – С. 117–122.

106 Корнилов В.С. Теоретические основы информатизации прикладного математического образования: монография. – Воронеж: Научная книга, 2011. – 140 с.

107 Корнилов В.С. Обратные задачи в содержании обучения прикладной математике // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». – 2014. – № 2. – С. 109–118.

108 Корнилов В.С. Обучение студентов обратным задачам для дифференциальных уравнений как фактор формирования компетентности в области прикладной математики // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». – 2015. – № 1. – С. 63–72.

109 Асланов Р.М. Методическая система обучения дифференциальным уравнениям в педвузе: дис. ... док. пед. наук. – М., 1997. – 390 с.

110 Коменский Я.К., Локк Д., Руссо Ж.-Ж., Песталоцци И.Г. Педагогическое наследие / Сост. В.М. Кларин, А.Н. Джуринский. – М.: Педагогика, 1989. – 416 с.

111 Современные проблемы прикладной математики. Сборник научно-популярных статей. / под редакцией А.А. Петрова. – М.: МЗ Пресс, 2005. – Вып. 1. – 231 с.

112 Безусова Т. А. Некорректные задачи как средство развития культуры математического и естественнонаучного мышления школьников: дисс. ... канд. пед. наук. - Пермь, 2008.- 228 с.

113 Яремко Н.Н. Теоретико - методические основания критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений: дисс. … д-ра пед. наук. - Орел, 2016. - 399 с.

114 Увайсов С.У. Рабочая Программа дисциплины «Обратные и некорректные задачи и методы их решения» для бакалавров направления подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» https://www.hse.ru/data/2015/09/23/1097659541/%D0%9F%D0%A3%D0%94_%D0%9E%D0%B1%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D0%B8%20%D0%BD%D0%B5%D0%BA%D0%BE%D1%80%D1%80%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D0%B7%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%B8_2015_2016.docx

115 Л.Н.Темирбекова Рабочая программа дисциплины «Обратные и некорректные задачи математической физики» для магистрантов специальности «6М060100-Математика» КазНПУ им. Абая, г. Алматы, Казахстан. – 2016 г.

116 Вильданова Ф.Х. Учебно-методический комплекс дисциплины «Численные методы решения обратных задач математической физики» для магистрантов специальности 6М060100 – «Математика». – г. Семей, Государственный университет имени Шакарима, Казахстан.-2014.http://edu.semgu.kz/ebook/umkd/67ece67e-40f5-11e4-973d-f6d299da70ee%D0%A3%D0%9C%D0%9A%D0%94%D0%BA%D0%B0%D0%B9%D1%82%D1%8B%D0%BC%D0%B4%D1%8B%20%D0%BE%D0%BF%D0%B

5%D1%80%20%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%BF%D0%BE%D0%B4.doc

117 Рахметуллина С.Ж. Рабочая программа дисциплины «Обратные задачи» для магистрантов специальности 6М070500 – «Математическое и компьютерное моделирование». – Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева. -г. Өскемен, Казахстан. - 2014 http://www.ektu.kz/files/MethodBook/51060/%D0%A0%D0%9F_%D0%9E%D0%97.docx

118 Кабанихин С.И. Рабочая программа «Введение в теорию обратных задач математической физики» для магистрантов направления подготовки 09.04.01 – «Информатика и вычислительная техника». - г.Новосибирск, Россия. - 2014 г. https://nsu.ru/rs/mw/link/Media:/30886/%D0%BA%D0%BC_%D0%94%D0%921.2_%D0%92%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%B2_%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8E_%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D0%B7%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B9_%D1%84%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D0%BA%D0%B8.pdf

119 Ягола А.Г. Спецкурс «Некорректно поставленные задачи» для аспирантов кафедры математики физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова - г. Москва, Россия. – 2018г. http://matematika.phys.msu.ru/stud_aspir/166

120 Ожегов С.И., Шведова Н.Ю. Толковый словарь русского языка. – / 3-е изд. М.: Аз, 1996 . - 928 с.

121 Алонцева Е.А., Гилев А.А. Межпредметные связи естественнонаучных и общетехнических дисциплин // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Психолого-педагогические науки». – 2011. – № 1. – С. 9–13.

122 Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука, 1987. – 158 с.

123 Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969. – 286 с.

124 Ашихмин В.Н., Гитман М.Б., Келлер И.Э., Наймарк О.Б., Столбов В.Ю., Трусов П.В., Фрик П.Г. Введение в математическое моделирование: учебное пособие. – М.: Логос, 2004. – 439 с.

125 Глухова Е.А. Межпредметные связи как средство самообразования студентов в вузе: дис… канд. пед. наук. – Челябинск, 2010. – 208 с.

126 Далингер В.А. Методика реализации внутрипредметных связей при обучении математике. – М.: Просвещение, 1991. – 81 с.

127 Кириченко О.Е. Межпредметные связи курса математики и смежных дисциплин в техническом вузе связи как средство профессиональной подготовки студентов: дис. ... канд. пед. наук. – Орел, 2003. – 170 с..

128 Веселова Е.А. Формирование научного мировоззрения студентов в образовательно-воспитательном процессе высшей школы: дис. … канд. пед.

наук. – Нижний Новгород, 2008. – 255 с.

129 Вернадский В.И. Избранные научные труды академика В.И. Вернадского. Том. 8. Труды по истории, философии и организации науки. – К.: Феникс, 2012. – 658 с.

130 Гнеденко Б.В. Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике Текст. / Б. В. Гнеденко. М. : Просвещение, 1990.- 144 с

131 Сластенин В.А. Педагогика профессионального образования. – М.: Академия, 2007. – 368 с.

132 Бидайбеков Е. Ы. Об обратных задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений // Математические заметки. – 1979. – Т. 26, вып. 1. – С. 53–59.

133 Бидайбеков Е.Ы. О некоторых обратных задачах для линейных дифференциальных уравнений // Известия АН КазССР. Серия физико-математическая. – 1981. – № 1. – С. 15–22.

134 Арнольд В.И. «Жесткие и мягкие» математические модели. – М.: МЦНМО, 2000. – 32 с.

135 Бордовский Г.А., Кондратьев А.С., Чоудери А.Д.Р. Физические основы математического моделирования: учебное пособие. – М.: ACADEMA, 2005. – 316 с.

136 Семененко М.Г. Математическое моделирование в MathCad. – М.: Альтекс-А, 2003. – 208 с.

137 Тарасевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс: учебное пособие. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 149 с.

138 Эдвардс Ч.Г., Пенни Д.Э. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. – М.: И.Д. Вильямс, 2008. – 1097 с.

139 Боголюбов А.Н. Математики. Механики: библиографический справочник. – Киев: Наукова Думка, 1983. – 638 с.

140 Султангазин У.М. Методы сферических гармоник и дискретных ординат в задачах кинетической теории переноса. – Алма-Ата: Наука, 1979. – 268 с.

141 Беленкова И.В. Методика использования математических пакетов в профессиональной подготовке студентов вуза: дис. ... канд. пед. наук. – Екатеринбург, 2004. – 170 с.

142 Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple: учебник для вузов. – СПб.: Питер, 2004 – 539 с.

143 Дахер Е.А. Система Mathematica в процессе математической подготовки специалистов экономического профиля: дис. ... канд. пед. наук. – М., 2004. – 190 с.

144 Дьяченко С.А. Использование интегрированной символьной системы Mathematica при изучении курса высшей математики в вузе: дис. ... канд. пед. наук. – Орел, 2000. – 164 с.

145 Асмолов А. Г. Психология личности: Принципы общепсихологическо го анализа. — М.: Смысл, — 416 с.

146 Бухарова Г.Д. Теоретико-методологические основы обучения решению задач студентов вуза. – Екатеринбург, 1995. – 137 с.

147 Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении: Логико-психологические основы построения учебных предметов. 2-е изд. - М.: Педагогическое общество России, 2000. - 480 с.

148 Леднев, В. С. Содержание образования: Сущность, проблемы, структура / В.С. Леднев. М.: Педагогика, 1995. - 352 с.

149 Салмина Н.Г. Структура, функционирование и формирование знаково-символической деятельности: Дисс... д-ра психол. наук. – М., 1987. – 396 с.

150 Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике: учебное пособие. – М.: URSS: Либроком, 2014. – 248 с.

151 Турдубаев С.К. Определение коэффициента $a(x,t)$ в уравнении $U_{tt} - U_{xx} - a(x,t)U$ // Методы решения некорректных математических задач и проблемы геофизики. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984. – С. 114–120.

152 Беспалько В.П. Педагогика и прогрессивные технологии обучения. – М.: Изд-во Института профессионального образования Минобр. РФ, 1995. – 336 с.

153 Кагазбаева А.К. Совершенствование профессионально-методической подготовки учителя математики в системе высшего педагогического образования: дис. ... док. пед. наук. - 13.00.02 / Алмат. гос. ун-т им. Абая. - Алматы, 1999. – 324 с.

154 Краевский В. В., Хуторской А. В. Основы обучения. Дидактика и методика: учебное пособие для студентов высших учебных заведений. – М.: Академия, 2007. – 352 с.

155 Bidaibekov Y.I., Sholpanbaev B.B.,Akimzhan N.Sh. The use of digital educational resources in teaching ill-posed system of linear algebraic equations //International Conference “Inverse problems in finance, economics and life sciences. The abstract book, - Almaty, Kazakhstan, 2017 – P 43-44.

156 Подласый И.П. Педагогика: учебное пособие для вузов. – М.: Владос, 1999. – Кн. 1. – 574 с.

157 Подласый И.П. Педагогика: учебное пособие для вузов. – М.: Владос, 1999. – Кн. 2. – 256 с.

158 Давыдов В.В. Теория развивающего обучения. – М., 1996. – 544 с.

159 Волгин Н.А., Одегов Ю.Г., Ракитский Б.В., Хорзов С.Е., Абдурахманов К.Х., Бабынина Л.С., Волгина О.Н., Витек А. Организация, формы и методы проведения учебных занятий и самостоятельной работы: требования, условия, механизмы: учебно-методическое пособие / под ред. Н. А. Волгина, Ю. Г. Одегова. – М.: Изд-во Рос. экон. акад., 2004. – 88 с.

160 Хуторской А. В. Современная дидактика: учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2007. – 639 с.

161 Гальперин П.Я. Введение в психологию. – М.: Университет, 2000. – 336 с.

162 Крахт Л.Н. К вопросу о проблемном обучении и реализации

межпредметных связей в техническом вузе // Фундаментальные исследования. – 2005. – № 9. – С. 62–63.

163 Бондаревская Е.В. Теория и практика личностного образования. – Ростов-на-Дону, 2000. – 320 с.

164 Шаталов, В. Ф. Учить всех, учить каждого / В. Ф. Шаталов // Педагогический поиск. — М., 1987. — С. 159–167.

165 Глазунов, С. А. Опорные конспекты как средство повышения качества образования. / Журнал Научные исследования в образовании, 2007. — № 3. http://cyberleninka.ru/article/n/opornye-konspekty-kak-sredstvo-povysheniya-kachestva-obrazovaniya

166 Кушнер Ю.З. Методология и методы педагогического исследования (учебно-методическое пособие) — Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2001. – 66 с.

167 Скаткин М.Н. Методология и методика педагогических исследований. – М., 1986.

168 Беспалько В.П. Слагаемые педагогической технологии. – М.: Педагогика, 1989. – 191 с.

169 Усова А.В. Формирование у школьников научных понятий в процессе обучения. – М.: Педагогика, 1986. – 176 с.

170 Стариченко Б.Е. Обработка и представление данных педагогических исследований с помощью компьютера/Урал.гос.пед.ун-т. Екатеринбург, 2004.- 218с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Анкета

1. Выберите из списка 5 дисциплин, которых Вы считаете наиболее необходимым для вашей будущей профессии.

- Английский язык
- Математический анализ
- ИКТ в образовании
- Уравнение математической физики
- Обратные и некорректные задачи
- Алгебра и геометрия
- Экономическая теория
- Педагогика
- Методика преподавания
-

2. Насколько Вы считаете необходимым для вашей будущей профессии Обратные и некорректные задачи (оценить по 10-бальной шкале, 10 –очень необходим, … 1- совсем нет необходимости)?

3. Считаете ли Вы полезным в формировании профессиональной компетенции по своей специальности обучение обратным и некорректным задачам (оценить по 10-бальной шкале, 10 –очень полезный, … 1- совсем нет пользы)?

4. Считаете ли Вы, что обучение ОНЗ формирует у студентов правильное представление о путях приобретения человечеством знаний об окружающем мире (оценить по 10-бальной шкале, 10 –на высоком уровне, … 1- совсем так не считаю)?

5. Можете ли вы самостоятельно анализировать, знания и умения полученные при изучении ОНЗ (оценить по 10-бальной шкале, 10 –на высоком уровне, … 1- совсем так не считаю)?

6. Считаете ли вы что обучение ОНЗ оказывает позитивное влияние на развитие творческого мышления у студентов (оценить по 10-бальной шкале, 10 –на высоком уровне, … 1- совсем так не считаю)?

7. Считаете ли вы что обучение ОНЗ способствует развитию информационного мышления (оценить по 10-бальной шкале, 10 –на высоком уровне, … 1- совсем так не считаю)?

8. Могу показать творческие способности в области «Математический анализ», решить нестандартные задачи, составить новые задачи, составить собственный алгоритм решения этих задач, умею быстро распознавать новые

ситуации и добывать самостоятельно знания, выполнять самостоятельно лабораторные работы (оценить по 10-бальной шкале, 10 –на высоком уровне, … 1- совсем так не считаю)?

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Алгоритм метода «обруча» отыскания корней полиномов

1. Зафиксируем следующие величины:

А) начальный угол $\alpha_0 \quad (0 \le \alpha_0, < 2\pi)$;

Б) шаг для угла $h \quad (0 < h \le 2\pi/3)$;

В) «точность» вычислений $E\ (E > 0)$;

Г) количество направлений $k\ (k = INT(2\pi/h)$;

2. Пусть $E_0 = (a_0, b_0)$ - точка комплексной плоскости, $R > 0$ и $O(E_0, R)$ - окружность с центром в E_0 и радиуса R. Будем называть $O(E_0, R)$ «обручем». Исходное положение «обруча» и его размер определим числами: $a_0 = b_0 = 0,\ R = 1$.

3. На «обруче» $O(E_0, R)$ зафиксируем k точек $E_j = (a_j, b_j)\ (j = 1,\dots,k)$,

где

$$a_j = a_0 + R\cos(\alpha_0 + (j-1)h), \qquad b_j = b_0 + R\sin(\alpha_0 + (j-1)h).$$

4. Вычислим в точках $E_j\ (j = 0,\dots,k)$ значения модуля $F(x, y)$ многочлена $f(z)$. Получим числа $F_j\ (j = 0,\dots,k)$.

5. Находим наименьший индекс s такой, что $F_s \le F_j\ (j = 0,\dots,k)$. Если $s = 0$, то радиус «обруча» уменьшаем вдвое $(R = R/2)$. В противном случае увеличиваем радиус в два раза $(R = 2R)$.

6. Если $R > E$, то переходим к шагу 3.

7. Если для $z_0 = a_0 + ib_0 \quad |F(z_0) \le \varepsilon|$, то объявляем (a_0, b_0) корнем $f(z)$ и организуем «выщип» корня z_0: $f(z) = f(z)/(z - z_0)$. При $R < E$ и $|F(z_0) > \varepsilon|$ (например, не можем спуститься из седловой точки) считаем вычисления завершившимися неудачно. Иными словами, при данных α_0 и h $f(z)$ не входит в область определения алгоритма. В этом случае счет можно повторить с другими значениями α_0 и h.

8. Если степень $f(z)$ больше 1, то переходим к шагу 2.

9. Решаем линейное уравнение $f(z) = 0$ и находим последний из корней. Вычисления прекращаем.

В дополнение к приведенному алгоритму заметим, что вычисление значений $F(x, y)$ и выделение найденного корня целесообразно проводить по схеме Горнера. Далее, шаг 9 предполагает непосредственное решение последнего линейного уравнения $f(z)=0$. Если оно выглядит так: $(A_0+iB_0)(x+iy)+(A_1+iB_1)=0$, то ясно, что $x=-(A_0A_1+B_0B_1)/(A_0^2+B_0^2)$ $y=(A_1B_0-A_0B_1)/(A_0^2+B_0^2)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Контрольные задания и вопросы для магистрантов

1) Какие из перечисленных краевых условий не подходят при решении задачи для уравнения колебаний

$u_{tt}=a^2u_{xx}$, где $0\le x<l$

A) $u(0,t)=0;$ $u(l,t)=0;$ $u(x,0)=0;$ $u(x,0)=x\cdot(x-l)$ $u(x,l)=0;$

B) $u(0,t)=0;$ $u(l,t)=0;$ $u(x,0)=x\cdot(x-l)$ $u_t(x,0)=0;$

C) $\frac{du}{dx}(x=0)=0$ $\frac{du}{dx}(x=l)=u_0$ $u(x,0)=0$ $u_t(x,0)=0$

D) $\frac{du}{dx}(x=0)=u_0$ $\frac{du}{dx}(x=l)=0$ $u(x,0)=0$ $u(x,0)=0$

2) Для уравнения какого типа применяется задача Коши:

A) гиперболический и эллиптический;

B) параболический и эллиптический ;

C) гиперболический и параболический;

D) правильного ответа нет;

3)Сила натяжения струны постоянна и равна T_0, её концы закреплены неподвижно. В момент времени $t=0$ точкам струны сообщаются начальные отклонения $u(x,0)=\varphi_0$ и начальные скорости $\frac{\partial u}{\partial t}(t=0)=\varphi_1$. Поставьте краевую задачу для определения отклонений струны при $t>0$:

A) $u_{tt}=a^2u_{xx}$, где $-l\le x<l$, $0\le t<\infty$ $u(0,t)=0;$ $u(l,t)=0;$ $u(x,0)=\varphi_0,$ $\frac{\partial u}{\partial t}(t=0)=\varphi_1$

B) $u_{tt}=a^2u_{xx}$, где $-l\le x<0$, $0\le t<\infty$ $u(0,t)=0;$ $u(l,t)=0;$ $u(x,0)=\varphi_0,$ $\frac{\partial u}{\partial t}(t=0)=\varphi_1$

C) $u_{tt}=a^2u_{xx}$, где $0\le x<l$, $0\le t<\infty$ $u(0,t)=0;$ $u(l,t)=0;$ $u(x,0)=\varphi_0,$ $\frac{\partial u}{\partial t}(t=0)=\varphi_1$

D) Правильного ответа нет

4)Неограниченный стержень постоянного сечения с теплоизолированной боковой поверхностью в момент времени $t=0$ имеет температуру $u(x,0)=\varphi_0(x)$. Поставьте краевую задачу об определении температуры в этом стержн при $t>0$:

A) $u_{tt}=a^2u_{xx}$, где $0\le x<l$, $0\le t<\infty$ $u(x,0)=\varphi_0(x)$;

B) $u_{tt}=a^2u_{xx}$, где $0\le x<\infty$, $0\le t<\infty$ $u(x,0)=\varphi_0(x)$;

C) $u_{tt}=a^2u_{xx}$, где $-\infty\le x<0$, $0\le t<\infty$ $u(x,0)=\varphi_0(x)$;

D) правильного ответа нет

5) . Объём V , ограниченный поверхностьюS , состоит из двух частейV_1 и V_2, которые разделены поверхностью S_1. В каждой из указанных частей, коэффициенты теплопроводности материала постоянны и равны соответственно k_1 и k_2.Поставьтекраевую задачу о стационарном распределении температуры в объёмеV, если задана температура на поверхностиS.

A) $\Delta u_1=0$ в V_1 $\Delta u_2=0$ в V_2 $u|_S=u_0$;

B) $u_1=u_2$ в S_1 $k_1\dfrac{\partial u}{\partial n}=k_2\dfrac{\partial u}{\partial n}$ в S_1;

C) $\Delta u_1=0$ в V_1 $\Delta u_2=0$ в V_2 $u|_S=u_0$ $u_1=u_2$ в S_1 $k_1\dfrac{\partial u}{\partial n}=k_2\dfrac{\partial u}{\partial n}$ в S_1;

D) Правильного ответа нет.

6) Выберите из предложеных вариантов значения для коэффициентов $x, y,$ чтобы уравнение $xu_{xx}+6u_{xy}+yu_{yy}=0$ было уравнением параболического типа

A) $x>3$ $y>3$;

B) $x<3$ $y>3$;

C) $x>3$ $y<3$;

D) $x=3$ $y=3$;

7) Выберите из данных каким должен быть коэффициент x, чтобы уравнение $u_{xx}-xu_{yy}=0$ было уравнением гиперболического типа

A) $x\le 0$; B) $x<0$ C) $x>0$ D) $x\ge 0$

8) Выберите из данных каким должен быть коэффициент x, чтобы уравнение $yu_{xx}+xu_{yy}=0$ было уравнением эллиптического типа

A) $x\ge 0, y>0$

B) $x>0, y>0$

C) $x>0, y<0$

D) Правильного

$x<0, y\le 0$; $x<0, y<0$; $x<0, y>0$; ответа нет

9) Приведите к каноническому виду уравнение
$u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}+2u_x+6u_y=0$

A)
$u_{\xi\eta}+u_{\xi}=0$
$\xi=3x-y$
$\eta=x+y$;

B)
$u_{\xi\eta}+u_{\eta}=0$
$\xi=3x-y$
$\eta=x+y$;

C)
$u_{\xi\eta}+\frac{1}{2}u_{\xi}=0$
$\xi=3x-y$
$\eta=x+y$

D)
$u_{\xi\eta}+\frac{1}{2}u_{\eta}=0$
$\xi=3x-y$
$\eta=x+y$

10) Приведите к каноническому виду уравнение
$u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+\alpha u_x+\beta u_y+cu=0$

A)
$u_{\eta\eta}+(\alpha+\beta)u_{\xi}+\beta u_{\eta}+cu=0$
$\xi=x+y$
$\eta=y$;

B)
$u_{\xi\eta}+(\alpha+\beta)u_{\xi}+\beta u_{\eta}+cu=0$
$\xi=x-y$
$\eta=y$;

C)
$u_{\eta}+(\alpha+\beta)u_{\xi}+\beta u_{\eta\eta}+cu=0$
$\xi=x+y$
$\eta=y$;

D) Правильного ответа нет

11) Приведите к каноническому виду уравнение $y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0$

A)
$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{2\xi}u_{\xi}+\frac{1}{2\eta}u_{\eta}=0$
$\xi=y^2$
$\eta=x^2$;

B)
$u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+\frac{1}{2\xi}u_{\xi}+\frac{1}{2\eta}u_{\eta}=0$
$\xi=y^2$
$\eta=x^2$;

C)
$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{2\xi}u_{\xi}+\frac{1}{2\eta}u_{\eta}=0$
$\xi=y$

D)
$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{2\xi}u_{\xi}+\frac{1}{2\eta}u_{\eta}=0$
$\xi=y^2$

$\eta = x^2;$ $\eta = x$

12)Найти функцию $u(x, y)$ для уравнения $3u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}=0$

A) $u(x, y) = F(x-3y)+g(x-y);$

B) $u(x, y) = F(x-\frac{y}{3})+g(3x-3y);$

C) $u(x, y) = F(x+3y)+g(x+y)$

D) $u(x, y) = F(x)+g(\frac{y}{3})$

Контрольные вопросы

1. Условно- корректные (корректные по Тихонову) задачи
2. Задача определения правой части ОДУ
3. Задача численного дифференцирования
4. Задача определения коэффициентов линейного ОДУ
5. Задача определения коэффициентов системы линейных ОДУ
6. Задача для уравнения теплопроводности с обратным временем; единственность решения
7. Оценка устойчивости в задаче для уравнения теплопроводности с обратным временем
8. Задача определения начального распределения температуры по измерению температуры в точке
9. Задача определения источника в уравнении теплопроводности
10. Обратные задачи для уравнения Лапласа
11. Обратные задачи для ньютонова потенциала; единственность решения
12. Обратные задачи для уравнения колебаний
13. Задача определения коэффициента теплопроводности, зависящего от времени
17. Преобразование Радона и его обращение
18. Задача компьютерной томографии в случае радиальной симметрии
19. Решение некорректных задач на компактных множествах
20. Метод квазирешений
21. Метод регуляризации Тихонова для линейных операторов
22. Уравнение Эйлера для сглаживающего функционала
23. Построение приближенного решения линейного операторного уравнения методом регуляризации
24. Метод регуляризации Тихонова для нелинейного операторного уравнения
25. Применения метода регуляризации Тихонова для решения интегральных уравнений 1-го рода

ПРИЛОЖЕНИЕ D

Описание практических занятий

Практическое занятие 9. Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (4 часа)(групповая консультация)

Цель: дать представление об обратных задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений через решение прикладных задач методом математического моделирования.

Задача 1. Процесс радиоактивного распада описывается физическим законом, заключающемся в том, что скорость распада пропорциональна количеству радиоактивного вещества, имеющемуся в данный момент времени. Коэффициент пропорциональности γ, являющийся характерной для данного вещества постоянной, носит название коэффициента скорости распада. Таким образом, математическая модель процесса радиоактивного распада описывается задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения вида:

$$\frac{d\,N(t)}{d\,t} = -\,\gamma\,N(t), \;\; t \geq t_0, \tag{1}$$

$$N(t_0) = N_0, \tag{2}$$

где $N(t)$ – количество вещества в данный момент времени, а N_0 – количество радиоактивного вещества в начальный момент времени.

Если постоянные γ и N_0 известны, то, решив задачу Коши, мы можем определить, как будет изменяться количество радиоактивного вещества с течением времени.

Обратная задача. Вид радиоактивного вещества, т.е. постоянная γ, и его первоначальное количество N_0 неизвестны, но из эксперимента можно определить количество радиоактивного вещества $N(t)$ для $t \in [t_1, t_2]$.

Требуется по функции $N(t)$, заданной для $t \in [t_1, t_2]$, определить постоянные γ и N_0. Таким образом, обратная задача заключается в определении коэффициента γ в дифференциальном уравнении (1) и начального условия N_0 (2) по решению задачи Коши $N(t)$ для $t \in [t_1, t_2]$.

Задача 2. Процесс химической кинетики описывается математической моделью, представляющей собой задачу Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\,y_i(t)}{dt} = a_{i1}y_1(t) + a_{i2}y_2(t) + \ldots + a_{in}y_n(t), \qquad (3)$$

$$y_i(t_0) = \bar{y}_i\,, \; i = \overline{1,\,N}\,. \qquad (4)$$

Функция $y_i(t)$ представляет собой концентрацию i-го вещества, участвующего в процессе, в момент времени t. Постоянные параметры a_{ij}, определяющие ход процесса, характеризуют зависимость скорости изменения концентрации i-го вещества от концентрации веществ, участвующих в процессе.

Обратная задача. В течение некоторого интервала времени $t \in [t_1,\, t_2\,]$ измеряются концентрации веществ $y_i(t)$, $i = \overline{1,\,N}$, и требуется определить величины параметров a_{ij}, т.е. по решению системы дифференциальных уравнений (3) при начальных условиях (4) требуется определить ее коэффициенты.

Эта обратная задача может рассматриваться в двух вариантах:

1. Начальные условия (4) известны, т.е. $\bar{y}_i$ заданы
2. $\bar{y}_i$ – неизвестны, их нужно определить вместе с a_{ij}.

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Акт внедрения в учебный процесс

Директор Института
математики, физики и информатики
КазНПУ имени Абая
__________ Бекпатшаев М.Ж.
«26» ______ 2018 г.

Акт внедрения

Данный акт подтверждает о том, что докторант по специальности 6D010900 – Математика Казахского национального педагогического университета имени Абая Әкімжан Нағима Шопанқызы проводила исследование среди бакалавров специальностей 5B010900-Математика и 5B060100 – Математика и магистрантов специальностей 6M010900-Математика и 6M060100 – Математика в период 2014-2016 годов обучения. В учебный процесс была внедрена разработанная ею методика обучения дисциплинам «Алгебра-1», «Алгебра-2», «Дифференциальные уравнения», «Линейная алгебра», «Математический анализ-1», «Уравнения математической физики», «Теоретические основы организации обучения решению математических задач», в которой использовались метод рациональных рассуждений и метод опорных конспектов и применялся компьютерный математический пакет Mathcad.

Зам. директора
по научной работе Уалиев З.Г.