

To whom it concerns

E michael.ruzhansky@ugent.be
T +32 9 264 49 22Campus Sterre
Krijgslaan 281 S8
B – 9000 Ghent
Belgium

www.ugent.be

Date	Contact	Phone	Email
06/03/2023	Kim Verbeeck	+32 9 264 45 24	kimpj.verbeeck@ugent.be

REVIEW

**of a foreign scientific consultant on the thesis of
Alimbekova Nurlana Baurzhanovna
entitled «Finite element methods for solving initial boundary value
problems for fractional differential filtration equations»,
submitted for the degree of Doctor of Philosophy (PhD)
in the specialty 6D060100 – Mathematics**

The thesis entitled «Finite element methods for solving initial boundary value problems for fractional differential filtration equations» is devoted to the construction and mathematical justification of finite element methods for solving problems of fluid filtration in fractured porous media based on fractional differential equations.

The thesis focuses on solving three fractional differential filtration equations, for which the study of finite element methods has not been previously carried out. The peculiarity of the considered fractional differential equation of filtration in fractured porous media is the presence of three terms containing fractional derivatives of different orders belonging to the interval $(0,2)$ in the assumption that fractures are distributed uniformly over the volume on average.

The fractional differential generalization of the filtration equation with a transient (non-stationary) filtration law is non-linear. Therefore Newton's iterative method is constructed for its linearization. The fractional differential equation of filtration in fractured porous media in the assumption of the existence of two continua is reduced to solving a fractional differential equation with fourth-order space derivatives.

These circumstances make it difficult to find analytical solutions to such equations, and in the current state of mathematics, they can be solved only by methods of computational mathematics. The application of numerical methods implies the appropriate theoretical substantiation of the problems under study. Numerical simulation, on the other hand, makes it possible to study these complex processes.

In the thesis:

- discrete schemes for the approximate solution of the filtration problem in fractured porous media have been constructed that are based on the use of finite difference approximation of time derivatives and the finite element method in the spatial direction;
- high-order discrete schemes for an approximate solution of a two-dimensional filtration problem with a transient filtration law have been constructed;
- high-order discrete schemes for the approximate solution of the two-dimensional filtration problem in fractured porous media under the assumption of the existence of two continua have been constructed;
- the uniqueness of the solution of the filtration problems under consideration and its continuous dependence on the input data in differential form were studied;
- the stability of the proposed discrete schemes with respect to the input data and the right side-hand of the equation was studied;
- the convergence of the proposed discrete schemes was studied by the method of a priori estimates, and the dependences of the convergence order on the order of fractional derivatives were determined;
- verification of the convergence order and approbation of the proposed discrete schemes for predicting fluid flow in fractured porous media was carried out based on computational experiments.

The thesis is a completed scientific research and testifies to the sufficient level of theoretical training of the doctoral student and her mastery of a wide range of scientific research methods. The research results presented in the thesis of N. B. Alimbekova were discussed at scientific seminars and international conferences on computational mathematics. The main results are published in three scientific journals which are included in the first and second quartiles according to the Clarivate Analytics Journal Citation Reports and/or have a CiteScore percentile in the Scopus database of at least 55, as well as in publications recommended by the authorized body.

The main results of the dissertation were obtained by the doctoral student independently. When completing her dissertation, Alimbekova N. B. proved herself to be a competent specialist.

Based on the foregoing, the thesis entitled "Finite element methods for solving initial-boundary value problems for fractional differential filtration equations" is recommended for defense, and its author Alimbekova Nurlana Baurzhanovna deserves to be awarded the degree of Doctor of Philosophy (PhD) in the specialty 6D060100 - Mathematics.

Foreign scientific consultant
PhD, professor,
Ghent University, Belgium



M. Ruzhansky

месту требования

E: Michael.ruzhansky@ugent.be
T: +32 9 264 49 22Campus Sterre
Krijgslaan 281 S8
B-9000 Гент
Бельгияwww.ugent.beДата: Контактное лицо:
06 марта 2023 г. Ким ВербеекТелефон:
+32 9 264 45 24Email:
kimpj.verbeeck@ugent.be

ОТЗЫВ

**зарубежного научного консультанта на диссертационную работу
Алимбековой Нурланы Бауржановны на тему «Конечно-элементные
методы решения начально-краевых задач для дробно-
дифференциальных уравнений фильтрации», представленную на
соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности 6D060100 – Математика**

Диссертационная работа «Конечно-элементные методы решения начально-краевых задач для дробно-дифференциальных уравнений фильтрации» посвящена построению и математическому обоснованию конечно-элементных методов решения задач фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах на основе дробно-дифференциальных уравнений.

В работе основное внимание сконцентрировано на решении трех дробно-дифференциальных уравнений фильтрации, для которых исследование конечно-элементных методов ранее не проводилось. Особенностью дробно-дифференциального уравнения фильтрации в трещиновато-пористых средах в предположении, что трещины распределены в среднем равномерно по объему, заключается в наличии трех слагаемых, содержащих дробные производные разного порядка, принадлежащих интервалу $(0,2)$. Дробно-дифференциальное обобщение уравнения фильтрации с переходным (нестационарным) законом фильтрации является нелинейным, поэтому для его линеаризации построен итерационный метод Ньютона. Дробно-дифференциальное уравнение фильтрации в трещиновато-пористых средах в предположении существования двух континуумов сводится к решению уравнения четвертого порядка по пространственным переменным.

Данные обстоятельства затрудняют нахождение аналитических решений таких уравнений, и при современном состоянии математики их можно решать только методами вычислительной математики. Применение численных методов предполагает соответствующие теоретические обоснования исследуемых задач. Численное моделирование, с другой стороны, позволяет исследовать те процессы, которые в лабораторных условиях трудно, а порой и невозможно получить.

В диссертационной работе:

- построены дискретные схемы для приближенного решения задачи фильтрации в трещиновато-пористых средах, основанных на применении конечно-разностной аппроксимации производных по времени и метода конечных элементов в пространственном направлении;
- построены дискретные схемы повышенного порядка для приближенного решения двумерной задачи фильтрации с переходным законом фильтрации;
- построены дискретные схемы повышенного порядка для приближенного решения двумерной задачи фильтрации в трещиновато-пористых средах в предположении существования двух континуумов;
- исследованы единственность решения рассматриваемых задач фильтрации и непрерывная зависимость решения от входных данных в дифференциальной форме;
- исследована устойчивость предложенных дискретных схем по входным данным и правой части уравнения;
- исследованы сходимости предложенных дискретных схем методом априорных оценок и определены зависимости порядка сходимости от порядка дробных производных;
- проведена верификация порядка сходимости и апробация предложенных дискретных схем к прогнозированию течения жидкости в трещиновато-пористых средах на основе вычислительных экспериментов.

Диссертация является завершенным научным исследованием и свидетельствует о достаточном уровне теоретической подготовки докторанта, владении им широким спектром методов научного исследования. Результаты исследований, изложенные в диссертационной работе Н. Б. Алимбековой, обсуждались на научных семинарах и международных конференциях по вычислительной математике. Основные результаты опубликованы в трех научных журналах, входящих в первый и второй квартили по данным Journal Citation Reports компании Clarivate Analytics и/или имеющих показатель процентиля по CiteScore в базе данных Scopus не менее 55 и в изданиях, рекомендуемых уполномоченным органом.

Основные результаты диссертации получены докторантом самостоятельно. При выполнении диссертации Алимбекова Н. Б. проявила себя как грамотный специалист.

На основании вышеизложенного, диссертационная работа на тему «Конечно-элементные методы решения начально-краевых задач для дробно-дифференциальных уравнений фильтрации» рекомендуется к защите, а ее автор Алимбекова Нурлана Бауржановна заслуживает присуждения ей степени доктора философии (PhD) по специальности 6D060100 – Математика.

**Зарубежный научный консультант
PhD, профессор,
Гентский университет, Бельгия**

М. Ружанский

Республика Казахстан, город Алматы,
двадцать четвертое марта две тысячи двадцать третьего года
Текст перевода документа с английского языка на русский язык выполнен переводчиком
Деминной Алёной Сергеевной

Подпись Алёны Сергеевны Деминной

Республика Казахстан, город Алматы,
двадцать четвертое марта две тысячи двадцать третьего года

Я, Габдулина Юлия Рафаиловна, нотариус города Алматы, действующий на основании государственной лицензии № 0001750 от девятого января две тысячи четвертого года, выданной Министерством юстиции Республики Казахстан, свидетельствую подлинность подписи переводчика **Деминной Алёны Сергеевны**. Личность переводчика установлена, дееспособность и полномочия проверены.

Зарегистрировано в реестре № 188
Взыскано: 1829 тенге

Нотариус



[Handwritten signature in blue ink]



Ақтөбе облысы
ИІД ӨАТ
ӨАТ

қолданыстағы
лицензия
№00017/30
2004 жылғы
9-қаңтарда

Ішкі істер министрлігі

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ
Ішкі істер министрінің
қолы

9 қаңтар 2004 жылғы
№00017/30
лицензия

Лицензия
2004 жылғы
9-қаңтарда

ақталған
және
қайтарылған

қайтарылған
және
қайтарылған

қайтарылған
және
қайтарылған

қайтарылған
және
қайтарылған

қайтарылған
және
қайтарылған

қайтарылған
және
қайтарылған

қайтарылған
және
қайтарылған

қайтарылған
және
қайтарылған

қайтарылған
және
қайтарылған

қайтарылған
және
қайтарылған

қайтарылған
және
қайтарылған

қайтарылған
және
қайтарылған

қайтарылған
және
қайтарылған

қайтарылған
және
қайтарылған

