

Казахский национальный педагогический университет имени Абая

УДК 519.642.2

На правах рукописи

АЛИМБЕКОВА НУРЛАНА БАУРЖАНОВНА

**Конечно-элементные методы решения начально-краевых задач для
дробно-дифференциальных уравнений фильтрации**

6D060100 – Математика

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Отечественные научные консультанты:
Бердышев Абдумаувлен Сулейманович,
доктор физико-математических наук,
профессор

Байшемиров Жарасбек Дуйсембекович,
PhD, ассоциированный профессор

Зарубежный научный консультант:
Ruzhansky Michael,
PhD, профессор,
Гентский университет, Бельгия

Республика Казахстан
Алматы, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

СОКРАЩЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ	4
ВВЕДЕНИЕ	5
1 ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ С РАВНОМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ТРЕЩИН	16
1.1 Постановка задачи	16
1.2 Исследование первого частного случая	19
1.2.1 Слабая вариационная постановка задачи	19
1.2.2 Единственность решения и его непрерывная зависимость от входных данных	20
1.2.3 Построение полудискретной схемы	21
1.2.4 Построение полностью дискретной схемы	23
1.2.5 Устойчивость численной схемы	23
1.2.6 Сходимость полудискретной схемы	26
1.2.7 Сходимость полностью дискретной схемы	29
1.2.8 Верификация порядка сходимости на основе вычислительных экспериментов	31
1.3 Исследование второго и третьего частных случаев	34
1.3.1 Слабая вариационная постановка задачи	34
1.3.2 Единственность решения и его непрерывная зависимость от входных данных	35
1.3.3 Построение полудискретной схемы	36
1.3.4 Построение полностью дискретной схемы	36
1.3.5 Устойчивость численной схемы	37
1.3.6 Сходимость полудискретной схемы	39
1.3.7 Сходимость полностью дискретной схемы	40
1.3.8 Верификация порядка сходимости на основе вычислительных экспериментов	42
1.4 Исследование четвертого частного случая	43
1.4.1 Постановка задачи	44
1.4.2 Единственность решения и его непрерывная зависимость от входных данных	44
1.4.3 Постановка полудискретной схемы	45
1.4.4 Построение полностью дискретной схемы	46
1.4.5 Устойчивость численной схемы	47
1.4.6 Сходимость полудискретной схемы	50
1.4.7 Сходимость полностью дискретной схемы	53
1.4.8 Верификация порядка сходимости на основе вычислительных экспериментов	55
1.5 Применение предлагаемого метода к исследованию течения жидкости в трещиновато-пористой среде	59
1.6 Выводы по первому разделу	61

2 ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИИ С ПЕРЕХОДНЫМ ЗАКОНОМ ФИЛЬТРАЦИИ.....	63
2.1 Постановка задачи	63
2.2 Исследование единственности решения и непрерывной зависимости от входных данных. Построение и исследование численного метода решения задачи	64
2.2.1 Слабая вариационная постановка задачи	64
2.2.2 Единственность решения и его непрерывная зависимость от входных данных	64
2.2.3 Построение полудискретной схемы	65
2.2.4 Построение полностью дискретной схемы	67
2.2.5 Устойчивость численной схемы	68
2.2.6 Сходимость полудискретной схемы	70
2.2.7 Сходимость полностью дискретной схемы	74
2.2.8 Сходимость итерационного процесса	76
2.2.9 Верификация порядка сходимости на основе вычислительных экспериментов	78
2.3 Выводы по второму разделу	79
3 ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ ДВУХ КОНТИНУУМОВ	80
3.1 Постановка задачи	80
3.2 Исследование единственности решения и непрерывной зависимости от входных данных. Построение и исследование численного метода решения задачи	81
3.2.1 Понижение порядка уравнения и слабая вариационная постановка задачи.....	81
3.2.2 Единственность решения и его непрерывная зависимость от входных данных	82
3.2.3 Постановка полудискретной схемы	82
3.2.4 Постановка полностью дискретной схемы.....	83
3.2.5 Устойчивость численной схемы	83
3.2.6 Сходимость полудискретной схемы	85
3.2.7 Сходимость полностью дискретной схемы	88
3.2.8 Верификация порядка сходимости на основе вычислительных экспериментов	90
3.3 Выводы по третьему разделу.....	91
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	92
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	94
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Выполнение диссертационного исследования в рамках госбюджетной научно-исследовательской работы	105
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Задача фильтрации в трещиновато-пористой среде с дробной производной в смысле Капуто-Фабрицио....	107

СОКРАЩЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $\partial_{0,t}^\nu$ – оператор дробного дифференцирования Капуто, который для положительных действительных чисел ν таких, что $n-1 < \nu < n$, $n=1,2,3,\dots$ определяется формулой
- $$\partial_{0,t}^\nu p(x,t) = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \int_0^t \frac{\partial_t^n p(x,\theta)}{(t-\theta)^{1+\nu-n}} d\theta, \text{ где } \partial_t^n = \frac{\partial^n}{\partial t^n}.$$
- $\partial_{0,t}^{-\nu} p(x,t) \equiv I_{0,t}^\nu p(x,t)$ – оператор дробного интегрирования Капуто, который можно определить как
- $$\partial_{0,t}^{-\nu} p(x,t) \equiv I_{0,t}^\nu p(x,t) = g(t) + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t p(x,\theta) (t-\theta)^{\nu-1} d\theta$$
- для $t > 0$ и $0 < \nu \leq 1$.
- $L^q(\Omega)$ – пространство Лебега
- $W^{k,q}(\Omega)$ – пространство Соболева
- $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ – гильбертово пространство
- $L^2(\Omega)$ – пространство измеримых функций на Ω , суммируемых (интегрируемых) с квадратом $\int_\Omega u^2 dx$, с нормой
- $$\|u\| = \left(\int_\Omega u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$
- (\cdot, \cdot) – скалярное произведение в пространстве $L^2(\Omega)$.
- $\|\cdot\|$ – норма в пространстве $L^2(\Omega)$.
- V_h – пространство конечных элементов определенная следующим образом:
- $$V_h = \{v_h \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \mid v_h|_e \in P_1(e), \forall e \in \mathcal{K}_h\}$$
- \mathcal{K}_h – равномерное разбиение отрезка $\bar{\Omega}$ с шагом h , при и квазиравномерная триангуляция области Ω
- p^n – полудискретная аппроксимация функции p в точке $t = t_n$.
- p_h^n – полностью дискретная аппроксимация функции p в точке $t = t_n$ и в пространстве конечных элементов.
- $P_l(\Omega)$ – пространство многочленов степени не выше l на Ω .
- Q_h – оператор проекции $H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h$, удовлетворяющий условию $((Q_h p - p)_x, p_{h,x}) = 0 \quad \forall p \in H_0^1(\Omega), p_h \in V_h$, который обладает свойством: $\|p - Q_h p\| + h \|p - Q_h p\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^2 \|p\|_{H^2(\Omega)}$ для всех $p \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

ВВЕДЕНИЕ

Общая характеристика работы. Диссертационная работа посвящена построению и теоретическому исследованию конечно-элементных методов решения задач фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах на основе дробно-дифференциальных уравнений.

Актуальность исследования. Всестороннему изучению процесса течения жидкости в трещиновато-пористых средах уделяется значительное внимание в связи с его фундаментальной важностью и практической значимостью для широкого спектра промышленных процессов, особенно в нефтяной промышленности, включая повышение нефтеотдачи, улавливание углерода и рекультивацию водоносных горизонтов. Это связано с тем, что в этих сложных образованиях сосредоточен значительный процент мировых запасов нефти, и в связи с добычей нефти из залежей, изучение точной картины поведения потока в пласте является актуальной.

Процесс течения жидкости в трещиновато-пористых средах характеризуется аномальной кинетикой, подчиняющейся законам распределения со степенной асимптотикой. Это связано со сложной внутренней геометрической структурой этих сред, состоящей из матричных пористых блоков и системы трещин. Трещины оказывают существенное влияние на картину течения в связи с ее зависимостью от свойств трещины. Известно, что понимание распространения трещин имеет важное значение для оценки процесса течения жидкости в пористой среде.

За последние несколько десятилетия было предложено несколько существенно различных концептуальных подходов к описанию динамики течения и переноса в этих сложных образованиях. Данные подходы основаны на модификации основополагающих уравнений классических уравнений фильтрации, предложенных в работах М. Маскета, М. Мереса [1], М. Леверетта [2], Г. Дарси [3] и многих других. Всесторонний обзор наиболее важных подходов был проведен в работах [4-8]. Фундаментальные концептуальные модели включают модели с одним и несколькими континуумами, дискретную матрицу трещин и модели дискретной сети трещин и другие. Работы многих авторов [9-11] направлены на качественное сравнение этих моделей.

Численные методы для моделирования трещин в пористых средах включают расширенный метод конечных элементов [12], метод частиц трещин [13], метод элементов трещин [14], метод фазового поля [15] и многие другие. Метод фазового поля вызывает большой интерес в силу простоты численной реализации. Недавние исследования с использованием этого метода были направлены, например, на моделирование гидродинамических трещин [16-18], моделирование анизотропных трещин [19-21] и его применение для решения прикладных задач [22, 23].

Другим подходом к моделированию фильтрации в трещиновато-пористой среде заключается в замене этой среды некоторой однородной средой с памятью. Некоторые авторы [24-26] придерживаются мнения, что движение

жидкости в трещиноватой среде не может быть адекватно описано в рамках классической теории фильтрации, и предполагают, что характер течения зависит не только от текущего состояния процесса, но и от предыдущей истории изменений в этом процессе. Эффекты памяти могут быть учтены добавлением нетривиального слагаемого, которые часто могут быть представлены в виде свертки функции или ее производной с некоторым ядром [27].

Дробно-дифференциальное исчисление является эффективным инструментом для учета эффектов памяти. В основополагающей работе М. Капуто [28] введен формализм памяти и предложена модификация классического закона Дарси с дробной производной по времени. В этом случае уравнения, описывающие течение жидкости, заменяются их дробно-дифференциальными аналогами. Эта идея получила дальнейшее развитие у многих авторов (например, [24, 25, 29-33]), и разработан ряд дробно-дифференциальных обобщений классической модели, учитывающих память и пространственные эффекты корреляции в пористых средах (см. обзор литературы в [34]). В этом случае порядок дробной производной определяет степень влияния памяти на закономерности потока.

Дробно-дифференциальные модели течения жидкости наиболее полно изучены в случае, когда порядок дробной производной принадлежит интервалу $(0,1)$. Например, в работе Хе [35] закон Дарси модифицирован для преодоления предположения о перколяционном потоке. На основе многочисленных вычислительных экспериментов авторы [29] показали существенное влияние памяти на процесс течения жидкости через пористую матрицу. Кроме того, экспериментальные исследования [35, 36] также показывают, что дробно-дифференциальные уравнения можно эффективно использовать для получения более реалистичного описания течения жидкости в пористой среде.

Существует несколько определений дробной производной и дробного интеграла, обзор которых можно найти в [37, 38]. При разработке математических моделей течения жидкости в пористых средах при различных физических допущениях многими авторами использовались дробные производные по времени в смысле определения Капуто [25, 26, 28, 30, 39-41], Римана–Лиувилля [24, 35, 42, 43], Капуто–Фабрицио [44, 45], Atangana–Baleanu [46], Atangana–Baleanu–Caputo [47], Hilfer [48] и других [49]. Для описания нелокальности в пространственном направлении в основном используется производная в смысле определения Римана–Лиувилля [24, 50]. При изучении динамических процессов в трещиноватых фрактальных средах дробная производная по времени в смысле Капуто имеет некоторое преимущество, так как она задается сверткой ядра степенного вида и производной функции. В случае использования производных по времени Римана–Лиувилля возникают трудности при определении и в физической интерпретации начальных условий [51]. Несмотря на очевидные с вычислительной точки зрения преимущества дробной производной Капуто–Фабрицио [52], связанные с невырожденностью ядра, некоторые авторы сомневаются в корректности ее применения для учета

эффектов памяти [53].

Несмотря на наличие работ, посвященных получению аналитического решения некоторых дифференциальных уравнений дробного порядка (см., например, [54, 55]), в общем случае это достаточно сложная задача. Поэтому разработка численных методов, основанных на особенностях дробных производных и дробных уравнений является актуальной проблемой. Большое количество работ посвящено построению и исследованию численных методов решения дифференциальных уравнений дробного порядка порядка $\alpha \in (0,1)$, и они различаются главным образом подходом, которым дискретизируются целые и дробные производные. Эти методы включают в себя методы конечных разностей [56-61], компактную разностную схему [59-61], методы конечных элементов [62-65], методы конечных объемов [66-68], смешанные схемы конечных элементов [65], методы коллокации [69] и многие другие. Кроме того, построение вычислительных схем также основано на использовании определенной формулы дискретизации дробных производных, входящих в уравнение. Существует несколько аппроксимационных формул дробной производной в смысле Капуто порядка $\alpha \in (0,1)$, например, L1-метод [56, 70-72], модифицированный L1-метод [73], обратный метод Эйлера [74] с порядком сходимости $(2-\nu)$; формула L1-2 [75] и схема L2-1_o [57] с порядком сходимости $(3-\nu)$; схема L1-3 [76] с порядком сходимости $(4-\nu)$ и многие другие [77], где ν — порядок дробной производной. Однако получить аппроксимацию высокого порядка по времени довольно сложно из-за особенностей дробных производных.

Стоит отметить, что существует крайне мало работ, в которых порядок дробных производных в основополагающих уравнениях принадлежит интервалу $(1,2)$. Кроме того, очень мало работ, посвященных изучению особенностей реальных физических процессов для этого порядка. Например, известны их приложения к волновым уравнениям в задачах линейной вязкоупругости [78], диффузионно-волновых процессов, анализу сигналов [79, 80], случайному блужданию взвешенных течений и других.

Известно несколько формул дискретизации для аппроксимации производной в смысле Капуто порядка $\alpha \in (1,2)$ — например, L2-метод [70], L2C-метод [81] и метод на основе использования полинома кусочной интерполяции для аппроксимации производной под интегралом [82]. Как правило, они более сложны в реализации и используют многоточечный шаблон, что создает проблемы при их применении на первых временных слоях. Указанные формулы дискретизации используются, например, в [81, 82] для решения волновых уравнений дробного порядка.

Известны различные подходы численного решения уравнений, содержащих дробные производные порядка $\alpha \in (1,2)$. Например, метод конечных синусоидальных преобразований [83], метод конечных разностей [82, 84-86], локальный бессеточный метод [87], метод конечных элементов [88, 89], спектральный метод Галеркина [90], метод коллокации с использованием кубических B-сплайнов [91] и другие. Тем не менее, при обзоре литературы

было выявлено очень мало работ (например, [90]), в которых проводится теоретический анализ устойчивости и сходимости предлагаемых численных методов для уравнений рассматриваемого порядка.

Проведенный литературный обзор задач фильтрации показал, что получению численного решения и проведению теоретического анализа которых, на наш взгляд, уделено мало внимания.

В работе [24] выведена новая модель течения жидкости в трещиноватой пористой среде. Предлагаемая модель основана на использовании дробно-дифференциального аналога закона фильтрации, описывающего течение жидкости в естественных трещиновато-пористых средах, в которых трещины распределены в среднем по объему равномерно. Модель также построена в предположении, что пористость и плотность являются функциями не только давления, но и его дробных производных по времени. Однако в указанной работе не уделяется внимание численной реализации математической модели. Кроме того, обзор литературы не выявил работ, посвященных численной реализации или получению аналитического решения этой задачи.

Линейный закон Дарси [3] описывает прямую взаимосвязь между градиентом давления и скоростью потока. Однако во многих реальных приложениях происходит нарушение закона Дарси, и поток жидкости через пористую среду проявляет так называемый переходный (нестационарный) режим. Примером таких течений является течение в горизонтальной скважине, пробуренной в плотном и трещиноватом сланцевом пласте. Построению численных методов для решения данной задачи и их теоретическому обоснованию посвящены работы [92-95]. Необходимость применения дробно-дифференциального исчисления к этой задаче обсуждается в работе [92]. Однако в указанных работах построение численных методов основывается на применении аппроксимационных формул невысокого порядка. Кроме того, для дробно-дифференциального обобщения задачи не проведен строгий математический анализ разработанных методов.

Рядом авторов рассматриваются задачи фильтрации в предположении существования нескольких континуумов, например, системы трещин, матрицы и каверны [25, 92]. При некоторых физических предположениях данная задача сводится к решению уравнения с дробной производной по времени и производной четвертого порядка по пространственным переменным. Построению численных методов решения уравнений данного типа посвящено крайне мало работ [96]. Однако и в данных работах получены вычислительные методы невысокого порядка в силу применения аппроксимационных формул дробной производной порядка $O(\tau^{2-\alpha})$.

Цель работы – построение и теоретическое исследование конечно-элементных методов решения начально-краевой задачи фильтрации в трещиновато-пористых средах с дробными производными по времени.

Задачи исследования:

1. Построение дискретных схем для приближенного решения задачи фильтрации в трещиновато-пористых средах, основанных на применении

конечно-разностной аппроксимации производных по времени и метода конечных элементов в пространственном направлении.

2. Построение дискретных схем повышенного порядка для приближенного решения двумерной задачи фильтрации с переходным законом фильтрации.

3. Построение дискретных схем повышенного порядка для приближенного решения двумерной задачи фильтрации в трещиновато-пористых средах в предположении существования двух континуумов.

4. Исследование единственности решения рассматриваемых задач фильтрации и непрерывной зависимости решения от входных данных в дифференциальной форме.

5. Исследование устойчивости предложенных дискретных схем по входным данным и правой части уравнения.

6. Исследование сходимости предложенных дискретных схем методом априорных оценок и определения зависимости порядка сходимости от порядка дробных производных.

7. Верификация порядка сходимости и апробация предложенных дискретных схем к прогнозированию течения жидкости в трещиновато-пористых средах на основе вычислительных экспериментов.

Объектом исследования являются конечно-элементные методы решения дробно-дифференциальных задач фильтрации в трещиновато-пористых средах.

Предметом исследования является получение априорных оценок конечно-элементного решения задач дробно-дифференциальных задач фильтрации в трещиновато-пористых средах.

Методы исследования. При выводе результатов диссертационной работы использованы методы конечных элементов, метод априорных оценок, методы функционального анализа, метод вычислительных экспериментов. Программная реализация построенных алгоритмов осуществлена на высокопроизводительном языке программирования Julia 1.8 и в пакете FreeFEM++ 4.6.

Научная новизна работы.

1. Построены конечно-элементные схемы для дробно-дифференциальной задачи фильтрации в трещиновато-пористых средах для четырех частных случаев. Доказана единственность решения и его непрерывная зависимость от входных данных в дифференциальной форме. Доказаны устойчивость и сходимость решения дискретных задач к решению дифференциальной задачи. Аппроксимация дробных производных в смысле Капуто осуществлена L1-методом порядка $O(\tau^{2-\alpha})$. Построение численного метода для четвертого частного случая основано на введении замены переменных для понижения порядка уравнения, а линеаризация нелинейной правой части осуществлена аппроксимацией второго порядка; получены априорные оценки сходимости для конечно-элементного решения и его градиента.

2. Построены конечно-элементные схемы повышенного порядка для нелинейной дробно-дифференциальной задачи фильтрации с переходным

законом фильтрации. Доказана единственность решения и его непрерывная зависимость от входных данных в дифференциальной форме. Доказаны устойчивость и сходимости решения дискретной задачи к решению дифференциальной задачи. Для дискретизации дробных производных в смысле Капуто использована аппроксимационная формула порядка $O(\tau^{4-\alpha})$, $\alpha \in (0,1)$, а для достижения глобального порядка сходимости $O(\tau^{4-\alpha} + h^2)$ использована техника подшаговой схемы. Линеаризация нелинейного слагаемого осуществлена методом Ньютона. Доказана сходимость итерационного процесса и получены достаточные условия его квадратичной сходимости.

3. Построены конечно-элементные схемы повышенного порядка для задачи фильтрации в трещиновато-пористых средах в предположении существования двух континуумов. Доказана единственность решения и его непрерывная зависимость от входных данных в дифференциальной форме. Доказаны устойчивость и сходимости решения дискретной задачи к решению дифференциальной задачи. Для понижения порядка пространственной производной вводится промежуточная переменная, и задача сводится к решению системы двух уравнений второго порядка. Для дискретизации дробных производных в смысле Капуто использована аппроксимационная формула порядка $O(\tau^{4-\alpha})$, $\alpha \in (0,1)$, а для достижения глобального порядка сходимости $O(\tau^{4-\alpha} + h^2)$ использована техника подшаговой схемы.

4. Результаты теоретического анализа подтверждены многочисленными вычислительными экспериментами, проведенных для модельных задач с известным точным решением. Представлены результаты численных экспериментов с более реалистичными исходными данными, из которых сделан вывод о том, что дробно-дифференциальные модели фильтрации воспроизводят характерные особенности процесса течения жидкости в рассматриваемой среде.

Теоретическая и практическая значимость исследования.

Теоретическая значимость работы состоит в строгом математическом обосновании единственности решения и его непрерывной зависимости от входных данных, вопросов устойчивости и сходимости построенных конечно-элементных схем для мало изученных дробно-дифференциальных задач фильтрации. Результаты, полученные в работе, окажут влияние на развитие теории вычислительных методов решения краевых задач для дробно-дифференциальных уравнений фильтрации. Результаты работы могут также применяться при исследовании новых классов задач для дробно-дифференциальных уравнений, использоваться для всестороннего анализа моделей различных процессов науки и техники.

Практическая значимость работы состоит в том, что предложенные конечно-элементные методы решения рассматриваемых задач фильтрации могут быть внедрены в программные комплексы для моделирования процесса разработки месторождений. Результаты исследований имеют большой научный потенциал и важный экономический эффект, поскольку рассматриваемые модели позволяют учесть больше факторов, что способствует более точному прогнозу показателей разработки месторождения.

Основные положения выносимые на защиту. По результатам исследования на защиту выносятся следующие положения:

– Построены устойчивые конечно-элементные схемы для численного решения дробно-дифференциальной задачи фильтрации в трещиновато-пористых средах. Доказана единственность решения и его непрерывная зависимость от входных данных, сходимость конечно-элементных схем.

– Построены устойчивые конечно-элементные схемы повышенного порядка для численного решения нелинейной дробно-дифференциальной задачи фильтрации с переходным законом фильтрации. Доказаны единственность решения и его непрерывная зависимость от входных данных, сходимость конечно-элементных схем, сходимость итерационного процесса и получены достаточные условия его квадратичной сходимости.

– Построены устойчивые конечно-элементные схемы повышенного порядка для численного решения дробно-дифференциальной задачи фильтрации в трещиновато-пористых средах в предположении существования двух континуумов. Доказана единственность решения и его непрерывная зависимость от входных данных, сходимость конечно-элементных схем.

Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и результатов диссертационной работы. Основные результаты и положения приведены с полными и подробными доказательствами, основанными на известных результатах теории конечно-элементных методов и функционального анализа. Эффективность предложенных численных схем для решения рассматриваемых задач подтверждается результатами многочисленных вычислительных экспериментов.

Апробация работы. Основные положения и результаты исследований докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

– на международной конференции «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и техники» (г. Барнаул, Российская Федерация, 13-16 ноября 2018 года);

– на молодежной прикладной IT школе «Математические методы и модели в экологии» (г. Барнаул, Российская Федерация, 27 июня - 1 июля 2019 года);

– на VI Международной научно-технической конференции студентов, магистрантов и молодых ученых «Творчество молодых – инновационному развитию Казахстана» (г. Усть-Каменогорск, 9-10 апреля 2020 года);

– на международной научно-практической конференции «Ұлы дала ұстазы», посвященной 1150-летию аль-Фараби и 3-летию статьи «Рухани жаңғыру» (г. Усть-Каменогорск, 10 апреля 2020 года);

– на XXIII (1-5 июля 2020 года), XXIV (28-29 июня 2021 года) и XXV (27 июня 2022 года) всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Математики – Алтайскому краю (МАК)» (г. Барнаул, Российская Федерация);

– на международной конференции «Fifth International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2020)» (г. Мерсин, Турция, 23-30

сентябрь 2020 года);

– на международной научно-практической конференции «Computational and Information Technologies in Science, Engineering and Education (CITech–2020)», посвященной 1150-летию аль-Фараби (г. Алматы, 9-10 октября 2020 года);

– на международной конференции «2021 IEEE International Conference on Smart Information Systems and Technologies» (г. Нур-Султан, 28-30 апреля 2021 года);

– на международной конференции «Uzbekistan-Malaysia International Conference «Computational Models and Technologies (CMT2022)» (г. Ташкент, Узбекистан, 16-17 сентября 2022 года);

– на международной научно-практической конференции «Computational and Information Technologies in Science, Engineering and Education (CITech–2022)», посвященной 90-летию со дня рождения академика Н. К. Надирова и 80-летию юбилею академика М. О. Отелбаева (г. Алматы, 12-15 октября 2022 года);

– на международной научно-практической конференции «Увалиевские чтения-2022» «Актуальные проблемы науки и образования в условиях современных вызовов», посвященной 70-летию ВКУ имени С. Аманжолова (г. Усть-Каменогорск, 21-22 октября 2022 года).

Кроме того, результаты исследований обсуждались на научных семинарах:

– на семинаре кафедры теоретической кибернетики и прикладной математики Алтайского государственного университета под руководством д.ф.-м.н., профессора Н.М. Оскорбина (г. Барнаул, Россия, 27 сентября 2021 года);

– на IV Международном научно-практическом семинаре по теме «Перспективы преподавания физико-математических дисциплин в вузе» под руководством PhD, ассоциированного профессора Ж.Д. Байшемирова и к.ф.-м.н., доцента Г.А. Байгонакова (онлайн, 21 апреля 2022 года);

– на научном семинаре в Галисийском центре математических исследований и технологий (CITMAga) под руководством PhD, профессора Альберто Кабада (г. Сантьяго-де-Компостела, Испания, 21 июня 2022 года);

– на научных семинарах кафедры математики и математического моделирования Казахского национального педагогического университета им. Абая под руководством д.ф.-м.н., профессора А.С. Бердышева (г. Алматы), кафедры математики Восточно-Казахстанского университета им. С. Аманжолова под руководством PhD, ассоциированного профессора Д.Р. Байгереева (г. Усть-Каменогорск).

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования молодых ученых по научным и (или) научно-техническим проектам на 2020-2022 годы по теме «Разработка и исследование параллельных конечно-элементных методов решения нелинейных задач многофазной фильтрации», ИРН AP08053189 (Приложение А).

Публикации и личный вклад соискателя. По результатам

диссертационного исследования опубликовано 27 работ, в том числе:

- 3 статьи в научных журналах, входящих в первый и второй квартили по данным Journal Citation Reports компании Clarivate Analytics и/или имеющих показатель процентиля по CiteScore в базе данных Scopus не менее 55 [97-99];
- 7 статей в изданиях, рекомендуемых уполномоченным органом [100-106];
- 14 публикаций в материалах Международных конференций [107-121], в том числе 2 публикации [107, 108] – в сборниках, проиндексированных Международными базами данных Web of Science и/или Scopus;
- 1 учебное пособие по конечно-элементным методам решения задач фильтрации [122];
- 2 авторских свидетельства на программы для ЭВМ для проведения вычислительных экспериментов по решению задач фильтрации методом конечных элементов [123, 124].

В совместных работах научным консультантам, а также руководителю госбюджетного проекта ИРН AP08053189 принадлежит постановка задачи, а соискателю – результаты теоретических исследований (теоремы единственности решения и его непрерывная зависимость от входных данных, теоремы устойчивости и сходимости конечно-элементных методов, промежуточные леммы), проведение вычислительных экспериментов и их апостериорный анализ.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 119 страницах машинописного текста. Работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка использованных источников (137 наименований) и двух приложений. Работа содержит 6 рисунков, 13 таблиц.

Основное содержание диссертации.

В первом разделе рассматривается дробно-дифференциальная задача фильтрации в предположении о равномерном распределении трещин. Построены конечно-элементные методы для четырех частных случаев в зависимости от порядков дробных производных и предлагается три различных неявных метода, основанных на применении метода конечных элементов в пространственном направлении и метода конечных разностей по временной переменной. Первый подход, примененный к случаю $\alpha, \beta, \gamma \in (0,1)$, основан на использовании аппроксимационной формулы дробной производной порядка $O(\tau^{2-\nu})$, $\nu = \max\{\alpha, \beta, \gamma\}$ и аппроксимации целочисленной временной производной повышенного порядка. Вторая численная схема, примененная к случаям $\alpha \in (1,2)$, $\beta, \gamma \in (0,1)$ и $\beta \in (1,2)$, $\alpha, \gamma \in (0,1)$, основана на использовании схемы типа Кранка-Николсона. Для построения третьего численного метода для нелинейного уравнения, порядки производных в котором принадлежат интервалу $\alpha, \beta, \gamma \in (1,2)$, введена замена переменных, уменьшающая порядок дробных производных на единицу для уменьшения вычислительной сложности, связанной с вычислением дробных производных. Нелинейное слагаемое линеаризовано с использованием конечно-разностной аппроксимации второго порядка.

Доказаны единственность решения указанных задач в дифференциальной форме и его зависимость от начальных данных и правой части уравнения. Для всех построенных численных методов строго доказываются сходимость как полудискретных, так и полностью дискретных схем. Для оценки слагаемых, содержащих дискретные дробные производные, получены вспомогательные неравенства. Теоретический порядок сходимости подтверждается результатами численных тестов для задачи с известным точным решением.

Далее рассмотрен более реалистичный пример, который направлен на изучение течения нефти в трещиновато-пористой среде, и приведены результаты численного моделирования в зависимости от порядков дробных производных. Кроме того, для сравнения представлены результаты численной реализации классической модели течения жидкости в пористой среде. По результатам численных испытаний сделан вывод, что модель воспроизводит характерные особенности процесса течения жидкости в трещиновато-пористой среде.

Во втором разделе работы предлагается метод решения задачи для нелинейного дробно-дифференциального уравнения фильтрации с переходным законом фильтрации. Для получения вычислительной схемы повышенного порядка дробная производная аппроксимируется формулой порядка $O(\tau^{4-\nu})$ из работы [76], которая ранее не применялась при решении практических задач. Для достижения глобального порядка сходимости использована техника подшаговой схемы [125] на интервалах $(0, t_1)$ и (t_1, t_2) , так как в случае $n < 3$ в указанной аппроксимационной формуле порядок сходимости ниже $O(\tau^{4-\nu})$.

Доказаны единственность решения указанных задач в дифференциальной форме и его зависимость от начальных данных и правой части уравнения. Доказана устойчивость метода по начальным данным и по правой части уравнения. Для оценки слагаемых, содержащих дискретные дробные производные, получены вспомогательные неравенства. Доказана сходимость построенного метода с порядком точности $O(\tau^{4-\nu} + h^{k+1})$, где τ и h – временной и пространственный параметры дискретизации, ν – порядок дробной производной. Линеаризация нелинейного слагаемого осуществлена методом Ньютона. Доказана сходимость итерационного процесса Ньютона и получены достаточные условия его квадратичной сходимости. Осуществлена верификация теоретического анализа на основе вычислительных экспериментов.

В третьем разделе работы рассматривается дробно-дифференциальная задача фильтрации в трещиновато-пористых средах в предположении существования двух континуумов. Задача сводится к решению уравнения четвертого порядка по пространственным переменным. Для понижения порядка пространственной производной вводится промежуточная переменная, и уравнение преобразуется в связанную систему двух уравнений второго порядка. При построении вычислительной схемы повышенного порядка использован подход, примененный во втором разделе работы. Доказаны единственность решения указанных задач в дифференциальной форме и его

зависимость от начальных данных и правой части уравнения. Доказана устойчивость метода по начальным данным и правой части уравнения. Далее строго доказана сходимостъ построенного метода с порядком $O(\tau^{4-\nu} + h^{k+1})$. Результаты теоретического анализа подтверждены вычислительными экспериментами.

В Приложении Б рассматривается обобщение дробно-дифференциальной задачи фильтрации с равномерным распределением трещин в случае использования дробных производных в смысле Капуто-Фабрицио. Построен вычислительный метод второго порядка сходимости как по временной, так по пространственной переменным. Полученные теоретические результаты подтверждены вычислительными экспериментами.

Автор выражает искреннюю благодарность научным консультантам – д.ф.-м.н., профессору А. С. Бердышеву, PhD, ассоциированному профессору Ж. Д. Байшемирову, PhD, профессору М. Ружанскому, а также PhD, ассоциированному профессору Д. Р. Байгерееву за ценные советы и всестороннюю помощь при выполнении диссертационной работы.

1 ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ С РАВНОМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ТРЕЩИН

В настоящем разделе диссертационной работы рассматривается начальная-краевая задача для дробно-дифференциального уравнения фильтрации в трещиновато-пористых средах в предположении, что трещины распределены в среднем равномерно по объему. Рассматриваемое уравнение выведено в работе [24] на основе использования дробно-дифференциальных обобщений классических уравнений фильтрации. Особенность данного уравнения заключается в наличии трех слагаемых, содержащих дробные производные разного порядка, принадлежащих интервалу $(0,2)$. Несмотря на исчерпывающее обоснование предположений и описание основных гипотез при выводе модели, в оригинальной работе [24] не уделено внимание ее численной реализации и анализу влияния дробных производных на процесс течения жидкости. Стоит отметить, что литературный обзор также не выявил и других работ, посвященных теоретическому исследованию, либо численной реализации данной задачи.

В подразделе 1.1 представлен краткий вывод дробно-дифференциального уравнения фильтрации и приведена постановка задачи. При этом, в отличие от оригинальной работы [24], где использованы дробные производные в смысле определения Римана-Лиувилля, в настоящей диссертационной работе используются дробные производные в смысле определения Капуто. В подразделах 1.2, 1.3 и 1.4 изучаются несколько частных случаев данной задачи. В подразделе 1.5 один из предлагаемых численных методов применен к исследованию более реалистичного примера, а именно к изучению влияния дробных производных на процесс течения нефти в трещиновато-пористой среде.

1.1 Постановка задачи

В классической теории фильтрации движение однофазной вязкой жидкости через изотропную пористую среду описывается уравнением неразрывности [126]:

$$\partial_t(\phi\rho) + \nabla \cdot (\rho\vec{u}) = q \quad (1.1)$$

и законом Дарси:

$$\vec{u} = -\frac{k}{\tilde{\mu}} \nabla p, \quad (1.2)$$

где ϕ и k – пористость и абсолютная проницаемость среды, которые для простоты предполагаются постоянными; p , ρ , и $\tilde{\mu}$ – давление, плотность и

вязкость жидкости; \vec{u} – вектор скорости фильтрации; q – плотность массовых источников; $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$. Для простоты будем пренебрегать влиянием гравитационных сил.

Одним из подходов к описанию течения жидкости через трещиновато-пористую среду состоит в замене указанной выше среды некоторой модельной однородной пористой средой со степенной памятью. В связи с тем, что пористость зависит от давления жидкости и напряженно-деформированного состояния среды, обладающей вязкоупругими свойствами, в работе [24] сделан вывод о том, что пористость является функцией не только давления, но также его дробной производной или дробного интеграла:

$$\phi = \phi(p, \partial_{0,t}^{\bar{\alpha}} p), \quad \bar{\alpha} \in (-1, 1), \quad (1.3)$$

где $\partial_{0,t}^{\nu}$ – оператор дробного дифференцирования Капуто, который для положительных действительных чисел ν таких, что $n-1 < \nu < n$, $n=1,2,3,\dots$ определяется как [37, 127]

$$\partial_{0,t}^{\nu} p(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \int_0^t \frac{\partial_t^n p(x, \theta)}{(t-\theta)^{1+\nu-n}} d\theta, \quad (1.4)$$

где $\partial_t^n = \frac{\partial^n}{\partial t^n}$. Оператор дробного дифференцирования Капуто отрицательного порядка $\partial_{0,t}^{-\nu}$ эквивалентен оператору дробного интегрирования Капуто $I_{0,t}^{\nu}$, который можно определить как [128, 129]

$$\partial_{0,t}^{-\nu} p(x, t) \equiv I_{0,t}^{\nu} p(x, t) = g(t) + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t p(x, \theta) (t-\theta)^{\nu-1} d\theta \quad (1.5)$$

для $t > 0$ и $0 < \nu \leq 1$, где $g(t)$ – функция, определенная в [128].

Кроме того, будем использовать следующее дробно-дифференциальное обобщение уравнения состояния [130]:

$$\rho = \rho(p, \partial_{0,t}^{\bar{\beta}} p), \quad \bar{\beta} \in (-1, 1). \quad (1.6)$$

Для учета влияния трещин на процесс течения жидкости будем использовать следующий обобщенный закон движения, описывающий течение жидкости в естественных трещиновато-пористых средах, в которых трещины распределены равномерно в среднем по объему [24]:

$$\vec{u} = -F(\partial_{0,t}^{\gamma}(\nabla p)) \frac{\nabla p}{|\nabla p|}, \quad \gamma \in (0, 1), \quad (1.7)$$

где $F(z)$ – заданная функция. Подставляя (1.3), (1.6) и (1.7) в уравнение (1.1), получим следующее нелинейное дробно-дифференциальное уравнение, описывающее течение вязкоупругой жидкости в трещиновато-пористой среде:

$$\begin{aligned} & \phi(c_{f_1} + c_{\phi_1})\partial_t p + \phi c_{\phi\bar{\alpha}}\partial_{0,t}^{\bar{\alpha}+1} p + \phi c_{\phi\bar{\beta}}\partial_{0,t}^{\bar{\beta}+1} p - \nabla \cdot \left(F(\partial_{0,t}^\gamma(\nabla p)) \frac{\nabla p}{|\nabla p|} \right) - \\ & - F(\partial_{0,t}^\gamma(\nabla p)) \frac{\nabla p}{|\nabla p|} (c_{f_1} \nabla p + c_{\phi\bar{\beta}} \partial_{0,t}^{\bar{\beta}}(\nabla p)) = \bar{f}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $\bar{f} = \frac{f}{\rho}$; $c_{f_1} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}$ и $c_{\phi_1} = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p}$ – соответственно, классические изотермические сжимаемости жидкости и пористой среды, а $c_{\phi\bar{\beta}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial (\partial_{0,t}^{\bar{\beta}} p)}$, $c_{\phi\bar{\alpha}} = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial (\partial_{0,t}^{\bar{\alpha}} p)}$ – их обобщенные дробно-дифференциальные аналоги [24].

Полный анализ начально-краевой задачи для полученного уравнения (1.8) довольно сложен из-за наличия большого количества параметров. Введем несколько упрощающих предположений, которые не являются слишком ограничивающими в практических приложениях. Во-первых, предположим, что поток одномерный. Следуя [24], будем пренебрегать последним слагаемым в левой части (1.8) из-за его малости по сравнению с четвертым слагаемым. Кроме того, функция пористости ϕ предполагается линейной относительно своих аргументов:

$$\phi = b_1 p + b_2 \partial_{0,t}^{\bar{\alpha}} p,$$

где b_1, b_2 – некоторые положительные константы. Далее, предположим, что плотность жидкости явно зависит только от дробной производной давления, и существует положительная постоянная величина b_3 такая, что $\phi c_{\phi\bar{\beta}} = b_3$. Принимая во внимание приведенные предположения, уравнение (1.8) сводится к следующему виду:

$$\partial_t p + \bar{c}_{\phi\alpha} \partial_{0,t}^{\bar{\alpha}+1} p + \bar{c}_{\phi\beta} \partial_{0,t}^{\bar{\beta}+1} p - \left(F(\partial_{0,t}^\gamma p_x) \right)_x = \bar{f}, \quad (1.9)$$

где $\bar{c}_{\phi\alpha} = b_2/b_1$, $\bar{c}_{\phi\beta} = b_3/b_1$ – положительные константы.

Для простоты изложения введем обозначения $\alpha = \bar{\alpha} + 1$, $\beta = \bar{\beta} + 1$ и ограничимся рассмотрением следующих трех частных случаев:

$$\begin{aligned}
\text{Случай I.} \quad & \bar{\alpha} \in (-1,0), \quad \bar{\beta} \in (-1,0), \quad \gamma \in (0,1), \\
\text{Случай II.} \quad & \bar{\alpha} \in (0,1), \quad \bar{\beta} = \bar{\alpha} - 1 \in (-1,0), \quad \gamma \in (0,1), \\
\text{Случай III.} \quad & \bar{\beta} \in (0,1), \quad \bar{\alpha} = \bar{\beta} - 1 \in (-1,0), \quad \gamma \in (0,1).
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Таким образом, в данном разделе рассматривается следующая задача.

Задача 1.1. В области $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times \bar{J}$, где $\Omega = (0,1)$, $J = (0,T]$, найти p , такое что

$$\begin{cases}
\partial_t p + \bar{c}_{\phi\alpha} \partial_{0,t}^{\alpha} p + \bar{c}_{f\beta} \partial_{0,t}^{\beta} p - (F(\partial_{0,t}^{\gamma} p_x))_x = \bar{f}, & (x,t) \in \Omega \times J, \\
p = p_0(x), & x \in \bar{\Omega}, \quad t = 0, \\
p = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \in J
\end{cases}$$

при $\alpha, \beta, \gamma \in (0,1)$;

$$\begin{cases}
\partial_t p + \bar{c}_{\phi\alpha} \partial_{0,t}^{\bar{\alpha}+1} p + \bar{c}_{f\beta} \partial_{0,t}^{\bar{\alpha}} p - (F(\partial_{0,t}^{\gamma} p_x))_x = \bar{f}, & (x,t) \in \Omega \times J, \\
p = p_0(x), \quad \partial_t p = u_0(x), & x \in \bar{\Omega}, \quad t = 0, \\
p = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \in J
\end{cases}$$

при $\bar{\alpha}, \gamma \in (0,1)$;

$$\begin{cases}
\partial_t p + \bar{c}_{\phi\alpha} \partial_{0,t}^{\bar{\beta}} p + \bar{c}_{f\beta} \partial_{0,t}^{\bar{\beta}+1} p - (F(\partial_{0,t}^{\gamma} p_x))_x = \bar{f}, & (x,t) \in \Omega \times J, \\
p = p_0(x), \quad \partial_t p = u_0(x), & x \in \bar{\Omega}, \quad t = 0, \\
p = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \in J
\end{cases}$$

при $\bar{\beta}, \gamma \in (0,1)$.

Предположение 1.1. Задача 1.1 имеет решение, обладающее достаточным количеством производных, необходимым для выполнения анализа.

1.2 Исследование первого частного случая

1.2.1 Слабая вариационная постановка задачи

Теперь определим слабую вариационную постановку задачи 1.1. Поскольку искомое решение принадлежит разным функциональным пространствам в зависимости от порядков дробных производных $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ и $\bar{\gamma}$, рассмотрим вариационные постановки задачи по отдельности в соответствии со случаями I, II и III.

Приведем сначала слабую вариационную постановку задачи для случая I; другие случаи будут рассмотрены в разделе 1.3.

В работе используются стандартные обозначения пространств Лебега $L^q(\Omega)$ и пространств Соболева $W^{k,q}(\Omega)$ [131], и в частном случае $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$. Для краткости записи через (\cdot, \cdot) и $\|\cdot\|$ будут обозначаться, соответственно, скалярное произведение и норма в пространстве $L^2(\Omega)$.

Задача 1.2. Найти $p \in H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ такое, что для всех $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$(\partial_t p, v) + \bar{c}_{\phi\alpha}(\partial_{0,t}^\alpha p, v) + \bar{c}_{f\beta}(\partial_{0,t}^\beta p, v) + (F(\partial_{0,t}^\gamma p_x), v_x) = (\bar{f}, v), \quad (1.11)$$

$$p(x, 0) = p_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (1.12)$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$.

Предположение 1.2. Функция F имеет вид

$$F(\varphi) = \mu\varphi,$$

где μ – некоторая положительная постоянная.

1.2.2 Единственность решения и его непрерывная зависимость от входных данных

Приведем следующие известные леммы, которые будут применяться несколько раз при получении основных результатов.

Лемма 1.1 [132]. Для любой абсолютно непрерывной на \bar{J} функции $g(t)$ справедливо следующее неравенство:

$$(\partial_{0,t}^\nu g, g) \geq \frac{1}{2} \partial_{0,t}^\nu \|g\|^2, \quad 0 < \nu < 1.$$

Лемма 1.2. Пусть $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ и $\lambda(t)$ – три неотрицательные функции, удовлетворяющие неравенству

$$\alpha(t) + \beta(t) \leq c + \int_0^t \lambda(s) ds + \int_0^t \alpha(s) \gamma(s) ds$$

для всех $t \in \bar{J}$, где $\beta(t)$ – неотрицательная функция на \bar{J} . Тогда

$$\alpha(t) + \beta(t) \leq \left(c + \int_0^t \lambda(s) ds \right) \exp\left(\int_0^t \gamma(s) ds \right).$$

Докажем следующий результат.

Теорема 1.1. Для решения задачи 1.1 в случае $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$ выполняется следующее неравенство:

$$\|p\|^2 \leq C \left(\|p_0\|^2 + \int_0^t \|\bar{f}\|^2 ds \right), \quad C > 0, \quad (1.13)$$

из которого следует единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных.

Доказательство. Выберем $v = p$ в (1.11) и получим

$$(\partial_t p, p) + \bar{c}_{\phi\alpha} (\partial_{0,t}^\alpha p, p) + \bar{c}_{\beta\beta} (\partial_{0,t}^\beta p, p) + (F(\partial_{0,t}^\gamma p_x), p_x) = (\bar{f}, p). \quad (1.14)$$

Оценивая слагаемые в тождестве (1.14), применяя неравенство Коши и лемму 1.1, легко получить, что

$$\frac{d}{dt} \|p\|^2 + \bar{c}_{\phi\alpha} \partial_{0,t}^\alpha \|p\|^2 + \bar{c}_{\beta\beta} \partial_{0,t}^\beta \|p\|^2 + \mu \partial_{0,t}^\gamma \|p_x\|^2 \leq C \left(\|\bar{f}\|^2 + \|p\|^2 \right) \quad (1.15)$$

Обозначим $\nu = \max\{\alpha, \beta\}$, $\lambda = \min\{\alpha, \beta\}$ и рассмотрим два случая. Для первого случая, $\gamma < \nu$, применим оператор дробного интегрирования (1.5) к обеим частям (1.15), и получим

$$\partial_{0,t}^{1-\nu} \|p\|^2 + k_\nu \|p\|^2 + k_\mu \partial_{0,t}^{\lambda-\nu} \|p\|^2 + \mu \partial_{0,t}^{\gamma-\nu} \|p_x\|^2 \leq C \partial_{0,t}^{-\nu} \left(\|\bar{f}\|^2 + \|p\|^2 \right) \quad (1.16)$$

По определению дробного интеграла третье и четвертое слагаемые в левой части (1.16) неотрицательны. Следовательно, из (1.16) следует, что

$$\frac{d}{dt} \|p\|^2 \leq C \left(\|\bar{f}\|^2 + \|p\|^2 \right). \quad (1.17)$$

Интегрируя (1.17) от 0 до t и применяя лемму 1.2, получаем неравенство (1.13).

Аналогичные рассуждения для второго случая, $\gamma > \nu$, приводят к неравенству

$$\partial_{0,t}^{1-\gamma} \|p\|^2 + \bar{c}_{\phi\alpha} \partial_{0,t}^{\alpha-\gamma} \|p\|^2 + \bar{c}_{\beta\beta} \partial_{0,t}^{\beta-\gamma} \|p\|^2 + \mu \|p_x\|^2 \leq C \partial_{0,t}^{-\gamma} \left(\|\bar{f}\|^2 + \|p\|^2 \right)$$

откуда также следует неравенство (1.13).

1.2.3 Построение полудискретной схемы

Чтобы определить полудискретную формулировку задачи 1.1 по времени, необходимо аппроксимировать как целые, так и дробные производные по времени. Для этого введем равномерное разбиение отрезка времени \bar{J} точками $t_n = n\tau$, $\tau > 0$, $n = 0, 1, \dots, N$ так, что $N\tau = T$. Обозначим через p^n полудискретную аппроксимацию функции p в точке $t = t_n$. Кроме того, для краткости иногда будет использовано обозначение $p(\cdot, t) = p(t)$.

В данном разделе используется следующая аппроксимационная формула для дробной производной в смысле Капуто.

Лемма 1.3. Дискретный аналог $\Delta_{0,t}^\nu p^n$ дробной производной в смысле Капуто $\partial_{0,t}^\nu p(t_n)$ порядка $0 < \nu < 1$ можно представить в виде [56]

$$\Delta_{0,t}^\nu p^n = \sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^\nu (p^s - p^{s-1}), \quad (1.18)$$

где

$$\delta_{n,s}^\nu = \frac{\tau^{-\nu}}{\Gamma(2-\nu)} \left[(n-s+1)^{1-\nu} - (n-s)^{1-\nu} \right]$$

Более того, для разности $r_n^\nu = \partial_{0,t}^\nu p(t_n) - \Delta_{0,t}^\nu p^n$ справедлива следующая оценка:

$$|r_n^\nu| \leq \frac{5-\nu}{8(1-\nu)} \max_{0 \leq t \leq t_n} |\partial_t^2 p(t)| \tau^{2-\nu}.$$

Приведем очевидные свойства коэффициентов $\delta_{n,s}^\nu$, представленных в лемме 1.3.

Лемма 1.4. Для коэффициентов $\delta_{n,s}^\nu$, $s = 1, 2, \dots, n$ выполняются следующие свойства:

- а) $\delta_{n,s}^\nu > 0$, $s = 1, 2, \dots, n$;
- б) $\delta_{n,s}^\nu < \delta_{n,s+1}^\nu$, $s = 1, 2, \dots, n-1$;
- в) $\delta_{n,s}^\nu = \delta_{n-1,s-1}^\nu$;
- г) $\sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^\nu = \frac{nt_n^{-\nu}}{\Gamma(2-\nu)}$.

Для аппроксимации целочисленной временной производной используем различные формулы в зависимости от временного слоя:

$$\partial_t p(t_n) = \begin{cases} \frac{3p^n - 4p^{n-1} + p^{n-2}}{2\tau} + \frac{\tau^2}{3} \partial_t^3 p(\zeta_n), & n \geq 2, \\ \frac{p^1 - p^0}{\tau} + \frac{\tau}{2} \partial_t^2 p(\zeta_1), & n = 1, \end{cases} \quad (1.19)$$

где $\zeta_1 \in (t_0, t_1)$, $\zeta_n \in (t_{n-2}, t_n)$, $n \geq 2$.

Определим полудискретную формулировку задачи 1.1, соответствующую случаю I, следующим образом.

Задача 1.3. Пусть известны $\{p^i\}_{i=0}^{n-1}$, $p^i \in H_0^1(\Omega)$, где $p^0 = p_0(x)$ для $x \in \bar{\Omega}$ и $n \geq 1$. Найти $p^n \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющее следующим тождествам для всех $v \in H_0^1(\Omega)$ и $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$:

$$\left(\frac{p^1 - p^0}{\tau}, v \right) + \bar{c}_{\phi\alpha} (\Delta_{0,t}^\alpha p^1, v) + \bar{c}_{f\beta} (\Delta_{0,t}^\beta p^1, v) + (F(\Delta_{0,t}^\gamma p^1), v_x) = (\bar{f}^1, v), \quad n = 1, \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3p^n - 4p^{n-1} + p^{n-2}}{2\tau}, v \right) + \bar{c}_{\phi\alpha}(\Delta_{0,t}^\alpha p^n, v) + \bar{c}_{f\beta}(\Delta_{0,t}^\beta p^n, v) + \\ & + (F(\Delta_{0,t}^\gamma p_x^n), v_x) = (\bar{f}^n, v), \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (1.21)$$

1.2.4 Построение полностью дискретной схемы

Обозначим через K_h равномерное разбиение отрезка $\bar{\Omega}$ с шагом h . Для заданного числа $l \in \mathbb{N}$, определим пространство $P_l(\Omega)$ многочленов степени не выше l на Ω . Определим пространство конечных элементов следующим образом:

$$V_h = \{v_h \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \mid v_h|_e \in P_1(e), \quad \forall e \in K_h\}$$

Определим оператор проекции $Q_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h$, удовлетворяющий условию

$$((Q_h p - p)_x, p_{h,x}) = 0 \quad \forall p \in H_0^1(\Omega), \quad p_h \in V_h,$$

который обладает следующим известным свойством:

$$\|p - Q_h p\| + h \|p - Q_h p\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^2 \|p\|_{H^2(\Omega)} \quad (1.22)$$

для всех $p \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

На основе полудискретной схемы (1.20), (1.21) построим следующую полностью дискретную схему, соответствующую случаю I.

Задача 1.4. Пусть известны $\{p_h^i\}_{i=0}^{n-1}$, $p_h^i \in V_h$, где $p_h^0 = Q_h p_0$. Найти $p_h^n \in V_h$, $n = 1, 2, \dots, N$, удовлетворяющие следующим тождествам для любого $v_h \in V_h$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p_h^1 - p_h^0}{\tau}, v_h \right) + \bar{c}_{\phi\alpha}(\Delta_{0,t}^\alpha p_h^1, v_h) + \bar{c}_{f\beta}(\Delta_{0,t}^\beta p_h^1, v_h) + \\ & + (F(\Delta_{0,t}^\gamma p_{h,x}^1), v_{h,x}) = (\bar{f}_0^1, v_h), \quad n = 1, \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3p_h^n - 4p_h^{n-1} + p_h^{n-2}}{2\tau}, v_h \right) + \bar{c}_{\phi\alpha}(\Delta_{0,t}^\alpha p_h^n, v_h) + \bar{c}_{f\beta}(\Delta_{0,t}^\beta p_h^n, v_h) + \\ & + (F(\Delta_{0,t}^\gamma p_{h,x}^n), v_{h,x}) = (\bar{f}_0^n, v_h), \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$.

1.2.5 Устойчивость численной схемы

Сначала докажем несколько вспомогательных лемм. Леммы 1.5 и 1.6 используются при получении оценок слагаемых, содержащих дробные и целые производные по времени.

Лемма 1.5. Для $\Delta_{0,t}^\nu p^n$, $0 < \nu < 1$, $n \geq 1$, справедливо неравенство

$$(\Delta_{0,t}^\nu p^n, p^n) \geq \Theta_n^\nu - \Theta_{n-1}^\nu - \frac{1}{2} \delta_{n,1}^\nu \|p^0\|^2,$$

где $\Theta_i^\nu = \frac{1}{2} (\delta_{i,1}^\nu \|p^1\|^2 + \delta_{i,2}^\nu \|p^2\|^2 + \dots + \delta_{i,i}^\nu \|p^i\|^2)$, $i \geq 1$ и $\Theta_0^\nu = 0$.

Доказательство. Из леммы 1.3 следует, что

$$(\Delta_{0,t}^\nu p^n, p^n) = \delta_{n,n}^\nu \|p^n\|^2 - \sum_{s=1}^{n-1} (\delta_{n,s+1}^\nu - \delta_{n,s}^\nu) (p^s, p^n) - \delta_{n,1}^\nu (p^0, p^n)$$

Используя неравенство Коши–Шварца и лемму 1.4 с учетом элементарного неравенства $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, получим

$$\begin{aligned} (\Delta_{0,t}^\nu p^n, p^n) &\geq \delta_{n,n}^\nu \|p^n\|^2 - \sum_{s=1}^{n-1} (\delta_{n,s+1}^\nu - \delta_{n,s}^\nu) \|p^s\| \|p^n\| - \delta_{n,1}^\nu \|p^0\| \|p^n\| \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^\nu \|p^s\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n-1} \delta_{n,s+1}^\nu \|p^s\|^2 - \frac{1}{2} \delta_{n,1}^\nu \|p^0\|^2 = \\ &= \Theta_n^\nu - \Theta_{n-1}^\nu - \frac{1}{2} \delta_{n,1}^\nu \|p^0\|^2. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 1.6. Пусть задана последовательность $\{p^i\}_{i=0}^n$, $p^i \in L^2(\Omega)$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{p^n - p^{n-1}}{\tau}, p^n \right) &= \frac{1}{2\tau} (\|p^n\|^2 - \|p^{n-1}\|^2 + \|p^n - p^{n-1}\|^2), \quad n \geq 1, \\ \left(\frac{3p^n - 4p^{n-1} + p^{n-2}}{2\tau}, p^n \right) &= \frac{1}{4\tau} (\|p^n\|^2 + \|2p^n - p^{n-1}\|^2 - \|p^{n-1}\|^2 - \\ &\quad - \|2p^{n-1} - p^{n-2}\|^2 + \|p^n - 2p^{n-1} + p^{n-2}\|^2), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Доказательство. Эта лемма проверяется непосредственно.

Кроме того, сформулируем дискретный аналог леммы Гронуолла, который будет использоваться несколько раз при получении основных результатов.

Лемма 1.7 [134]. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – две положительные последовательности, а $\{c_n\}$ – монотонная положительная последовательность, удовлетворяющие неравенствам $a_0 + b_0 \leq c_0$, $a_n + b_n \leq c_n + \lambda \sum_{i=0}^{n-1} a_i$, $\lambda > 0$. Тогда справедлива оценка

$$a_n + b_n \leq c_n e^{n\lambda}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Теперь докажем основные результаты раздела. Символом C будем обозначать положительную константу, не зависящую от τ , которая может принимать различные значения.

Теорема 1.2. Дискретная схема (1.23)-(1.24) безусловно устойчива по начальным данным и правой части, и справедлива следующая оценка:

$$\|p_h^n\|^2 + 8\tau\Theta_n \leq C\left(\|\bar{f}\|^2 + \|p_h^0\|_{H^1(\Omega)}^2\right),$$

где

$$\begin{aligned} \Theta_n &= \bar{c}_{\phi\alpha}\Theta_n^\alpha + \bar{c}_{f\beta}\Theta_n^\beta + \mu\Theta_n^\gamma, \\ \Theta_i^\nu &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \delta_{i,j}^\nu \|p_h^j\|^2, \quad \nu \in \{\alpha, \beta\}, \quad \Theta_i^\gamma = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \delta_{i,j}^\gamma \|p_{h,x}^j\|^2. \end{aligned}$$

Доказательство. Выберем $v_h = p_h^1$ в (1.23):

$$\begin{aligned} &\left(\frac{p_h^1 - p_h^0}{\tau}, p_h^1\right) + \bar{c}_{\phi\alpha}(\delta_{1,1}^\alpha(p_h^1 - p_h^0), p_h^1) + \bar{c}_{f\beta}(\delta_{1,1}^\beta(p_h^1 - p_h^0), p_h^1) + \\ &\quad + (F(\delta_{1,1}^\gamma(p_h^1 - p_h^0)), p_{h,x}^1) = (\bar{f}, p_h^1) \end{aligned}$$

Используя лемму 1.5, получим

$$\begin{aligned} &\|p_h^1\|^2 + \|p_h^1 - p_h^0\|^2 + 2\tau(\bar{c}_{\phi\alpha}\Theta_1^\alpha + \bar{c}_{f\beta}\Theta_1^\beta + \mu\Theta_1^\gamma) \leq \\ &\leq 2\tau(\bar{f}, p_h^1) + \|p_h^0\|^2 + 2\tau(\bar{c}_{\phi\alpha}\Theta_0^\alpha + \bar{c}_{f\beta}\Theta_0^\beta + \mu\Theta_0^\gamma) + \tau(\bar{c}_{\phi\alpha}\delta_{1,1}^\alpha + \bar{c}_{f\beta}\delta_{1,1}^\beta) \|p_h^0\|^2 + \tau\mu\delta_{1,1}^\gamma \|p_{h,x}^0\|^2. \end{aligned}$$

Применяя неравенств Коши и ε -неравенство к первому слагаемому в правой части и учитывая, что $\Theta_0^\nu = 0$, получим:

$$\|p_h^1\|^2 + 2\|p_h^1 - p_h^0\|^2 + 4\tau\Theta_1 \leq 4\tau^2\|\bar{f}\|^2 + C\|p_h^0\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad (1.25)$$

где $C = \max\{2 + T(\bar{c}_{\phi\alpha}\delta_{1,1}^\alpha + \bar{c}_{f\beta}\delta_{1,1}^\beta), T\mu\delta_{1,1}^\gamma\}$.

В случае $n \geq 2$ выберем $v_h = p_h^n$ в (1.24):

$$\begin{aligned} &\left(\frac{3p_h^n - 4p_h^{n-1} + p_h^{n-2}}{2\tau}, v_h\right) + \bar{c}_{\phi\alpha}\left(\sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^\alpha(p_h^s - p_h^{s-1}), v_h\right) + \\ &\quad + \bar{c}_{f\beta}\left(\sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^\beta(p_h^s - p_h^{s-1}), v_h\right) + \left(F\left(\sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^\gamma(p_{h,x}^s - p_{h,x}^{s-1})\right), v_{h,x}\right) = (\bar{f}, v_h) \end{aligned}$$

Применяя лемму 1.5, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \|p_h^n\|^2 + \|2p_h^n - p_h^{n-1}\|^2 + \|p_h^n - 2p_h^{n-1} + p_h^{n-2}\|^2 + \\ & + 4\tau\Theta_n = 4\tau\|\bar{f}\| \|p_h^n\| + \|p_h^{n-1}\|^2 + \|2p_h^{n-1} - p_h^{n-2}\|^2 + \\ & + 4\tau\Theta_{n-1} + 2\tau(\bar{c}_{\phi\alpha}\delta_{n,1}^\alpha + \bar{c}_{f\beta}\delta_{n,1}^\beta) \|p_h^0\|^2 + 2\tau\mu\delta_{n,1}^\gamma \|p_{h,x}^0\|^2. \end{aligned}$$

Суммируя последнее неравенство по n от 2 по n , получим

$$\begin{aligned} \|p_h^n\|^2 + 4\tau\Theta_n &= 4\tau\|\bar{f}\| \|p_h^n\| + 4\tau\sum_{i=2}^{n-1} \|\bar{f}\| \|p_h^i\| + \|p_h^1\|^2 + \|2p_h^1 - p_h^0\|^2 + \\ &+ 4\tau\Theta_1 + 2\tau\sum_{i=2}^n (\bar{c}_{\phi\alpha}\delta_{i,1}^\alpha + \bar{c}_{f\beta}\delta_{i,1}^\beta) \|p_h^0\|^2 + 2\tau\mu\sum_{i=2}^n \delta_{i,1}^\gamma \|p_{h,x}^0\|^2, \end{aligned}$$

и с учетом элементарного неравенства $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \|p_h^n\|^2 + 8\tau\Theta_n &\leq (16\tau^2 + 4T)\|\bar{f}\|^2 + 4\tau\sum_{i=2}^{n-1} \|p_h^i\|^2 + \\ &+ \|p_h^1\|^2 + \|2p_h^1 - p_h^0\|^2 + 4\tau\Theta_1 + 2\tau\sum_{i=2}^n (\bar{c}_{\phi\alpha}\delta_{i,1}^\alpha + \bar{c}_{f\beta}\delta_{i,1}^\beta) \|p_h^0\|^2 + 2\tau\mu\sum_{i=2}^n \delta_{i,1}^\gamma \|p_{h,x}^0\|^2. \end{aligned}$$

Используя лемму 1.5, из последнего неравенства получим

$$\begin{aligned} \|p_h^n\|^2 + 8\tau\Theta_n &\leq C\left(\|\bar{f}\|^2 + 3\left(\|p_h^1\|^2 + 2\|p_h^1 - p_h^0\|^2 + 4\tau\Theta_1\right) + \right. \\ &\left. + 2\tau\sum_{i=2}^n (\bar{c}_{\phi\alpha}\delta_{i,1}^\alpha + \bar{c}_{f\beta}\delta_{i,1}^\beta) \|p_h^0\|^2 + 2\tau\mu\sum_{i=2}^n \delta_{i,1}^\gamma \|p_{h,x}^0\|^2\right). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Объединяя неравенства (1.25) и (1.26), приходим к утверждению теоремы.

1.2.6 Сходимость полудискретной схемы

Теорема 1.3. Пусть $\{p^i\}_{i=0}^N$, $p^i \in H_0^1(\Omega)$ – решение задачи 1.3, а p – решение задачи 1.1. Тогда для $p^n \in H_0^1(\Omega)$ выполняется следующее неравенство при выполнении предположений 1.1 и 1.2:

$$\|p(t_n) - p^n\| + \tau\sqrt{\frac{2c_0}{T}} \|p(t_n) - p^n\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\tau^{2-\alpha} + \tau^{2-\beta} + \tau^{2-\gamma}),$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$ и $c_0 = \min\{\bar{c}_{\phi\alpha}\delta_{n,1}^\alpha, \bar{c}_{f\beta}\delta_{n,1}^\beta, \mu\delta_{n,1}^\gamma\}$.

Доказательство. Обозначим $\pi^n = p(t_n) - p^n$. Вычитая (1.20) и (1.21) из (1.11) при $t = t_n$, приняв $v = \pi^n$, и используя аппроксимационные формулы (1.19) и лемму 1.6, получим:

$$\begin{aligned} & \|\pi^1\|^2 - \|\pi^0\|^2 + \|\pi^1 - \pi^0\|^2 + 2\bar{c}_{\phi\alpha}(\partial_{0,t}^\alpha p(t_1) - \Delta_{0,t}^\alpha p^1, \pi^1) + 2\bar{c}_{\phi\beta}(\partial_{0,t}^\beta p(t_1) - \Delta_{0,t}^\beta p^1, \pi^1) + \\ & + 2\tau(F(\partial_{0,t}^\gamma p_x(t_1)) - F(\Delta_{0,t}^\gamma p_x^1), \pi_x^1) + \tau^2(\partial_t^2 p(\zeta_1), \pi^1) = 0, \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} & \|\pi^n\|^2 + \|2\pi^n - \pi^{n-1}\|^2 - \|\pi^{n-1}\|^2 - \|2\pi^{n-1} - \pi^{n-2}\|^2 + \\ & + \|\pi^n - 2\pi^{n-1} + \pi^{n-2}\|^2 + 4\bar{c}_{\phi\alpha}(\partial_{0,t}^\alpha p(t_n) - \Delta_{0,t}^\alpha p^n, \pi^n) + \\ & + 4\bar{c}_{\phi\beta}(\partial_{0,t}^\beta p(t_n) - \Delta_{0,t}^\beta p^n, \pi^n) + 4\tau(F(\partial_{0,t}^\gamma p_x(t_n)) - F(\Delta_{0,t}^\gamma p_x^n), \pi_x^n) + \\ & + \frac{4\tau^3}{3}(\partial_t^3 p(\zeta_n), \pi^n) = 0, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Используя предположение 1.2 и лемму 1.5, имеем:

$$\begin{aligned} & (\partial_{0,t}^\alpha p(t_n) - \Delta_{0,t}^\alpha p^n, \pi^n) = (r_n^\alpha, \pi^n) + (\Theta_n^\alpha - \Theta_{n-1}^\alpha), \pi^n \geq \\ & \geq (r_n^\alpha, \pi^n) + (\Theta_n^\alpha - \Theta_{n-1}^\alpha) - \frac{1}{2} \delta_{n,1}^\alpha \|\pi^0\|^2, \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$(\partial_{0,t}^\beta p(t_n) - \Delta_{0,t}^\beta p^n, \pi^n) \geq (r_n^\beta, \pi^n) + (\Theta_n^\beta - \Theta_{n-1}^\beta) - \frac{1}{2} \delta_{n,1}^\beta \|\pi^0\|^2, \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} & (F(\partial_{0,t}^\gamma p_x(t_n)) - F(\Delta_{0,t}^\gamma p_x^n), \pi_x^n) = \mu(\partial_{0,t}^\gamma p_x(t_n) - \Delta_{0,t}^\gamma p_x^n, \pi_x^n) \geq \\ & \geq \mu(r_n^\gamma, \pi_x^n) + \mu(\Theta_n^\gamma - \Theta_{n-1}^\gamma) - \frac{1}{2} \mu \delta_{n,1}^\gamma \|\pi_x^0\|^2, \end{aligned} \quad (1.31)$$

где

$$\begin{aligned} \Theta_n^{\bar{v}} &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^{\bar{v}} \|\pi^s\|^2, & r_n^{\bar{v}} &= \partial_{0,t}^{\bar{v}} p(t_n) - \Delta_{0,t}^{\bar{v}} p(t_n), \quad \bar{v} \in \{\alpha, \beta\}, \\ \Theta_n^\gamma &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^\gamma \|\pi_x^s\|^2, & r_n^\gamma &= \partial_{0,t}^\gamma p_x(t_n) - \Delta_{0,t}^\gamma p_x(t_n) \end{aligned} \quad (1.32)$$

и $r_n^v = O(\tau^{2-v})$, $v \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ по лемме 1.3.

Принимая во внимание неравенства (1.29)–(1.31), из (1.27) и (1.28) получаем, что

$$\begin{aligned} & \|\pi^1\|^2 + 2\tau\Theta_1 \leq \tau^2 \|\partial_t^2 p(\zeta_1)\| \|\pi^1\| + 2\bar{c}_{\phi\alpha} \|r_1^\alpha\| \|\pi^1\| + \\ & + 2\bar{c}_{\phi\beta} \|r_1^\beta\| \|\pi^1\| + 2\tau\mu \|r_1^\gamma\| \|\pi_x^1\|, \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} & \|\pi^n\|^2 + \|2\pi^n - \pi^{n-1}\|^2 + 4\tau\Theta_n + \|\pi^n - 2\pi^{n-1} + \pi^{n-2}\|^2 \leq \\ & \leq \|\pi^{n-1}\|^2 + \|2\pi^{n-1} - \pi^{n-2}\|^2 + 4\tau\Theta_{n-1} + \frac{4\tau^3}{3} \|\partial_t^3 p(\zeta_n)\| \|\pi^n\| + \\ & + 4\bar{c}_{\phi\alpha} \|r_n^\alpha\| \|\pi^n\| + 4\bar{c}_{\phi\beta} \|r_n^\beta\| \|\pi^n\| + 4\tau\mu \|r_n^\gamma\| \|\pi_x^n\|, \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (1.34)$$

где

$$\Theta_n = \bar{c}_{\phi\alpha} \Theta_n^\alpha + \bar{c}_{f\beta} \Theta_n^\beta + \mu \Theta_n^\gamma. \quad (1.35)$$

Суммируя (1.34) относительно n от 2 до n , используя ε -неравенство, получим

$$\begin{aligned} \|\pi^n\|^2 + \|2\pi^n - \pi^{n-1}\|^2 + 4\tau\Theta_n &\leq \|\pi^1\|^2 + \|2\pi^1 - \pi^0\|^2 + 4\tau\Theta_1 + \\ &+ \frac{\tau}{2} \left((\bar{c}_{\phi\alpha} \delta_{n,n}^\alpha + \bar{c}_{f\beta} \delta_{n,n}^\beta) \|\pi^n\|^2 + \mu \delta_{n,n}^\gamma \|\pi_x^n\|^2 \right) + \\ &+ \frac{\tau^2}{2} \sum_{i=2}^{n-1} \left((\bar{c}_{\phi\alpha} \delta_{n,n}^\alpha + \bar{c}_{f\beta} \delta_{n,n}^\beta) \|\pi^i\|^2 + \mu \delta_{n,n}^\gamma \|\pi_x^i\|^2 \right) + \\ &+ \frac{C\tau}{\delta_{n,n}^\sigma} \left(\tau^2 \|\partial_i^3 p(\zeta_n)\|_{L^\infty(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega))} + \|r_n^\alpha\| + \|r_n^\beta\| \right)^2 + \frac{C\tau}{\delta_{n,n}^\gamma} \|r_n^\gamma\|^2 + \\ &+ \frac{C}{\delta_{n,n}^\sigma} \sum_{i=2}^{n-1} \left(\tau^2 \|\partial_i^3 p(\zeta_i)\|_{L^\infty(0, t_{n-1}; L^2(\Omega))} + \|r_i^\alpha\| + \|r_i^\beta\| \right)^2 + \frac{C}{\delta_{n,n}^\gamma} \sum_{i=2}^n \|r_i^\gamma\|^2, \end{aligned}$$

где $\sigma = \min\{\alpha, \beta\}$. Используя лемму 1.3, а также замечая, что

$$\frac{1}{2} (\bar{c}_{\phi\alpha} \delta_{i,i}^\alpha + \bar{c}_{f\beta} \delta_{i,i}^\beta) \|\pi^i\|^2 + \frac{1}{2} \mu \delta_{i,i}^\gamma \|\pi_x^i\|^2 \leq \Theta_i \quad (1.36)$$

и $(\delta_{n,n}^\nu)^{-1} < \Gamma(2-\nu)\Gamma^\nu$, приходим к неравенству

$$\|\pi^n\|^2 + 2\tau\Theta_n \leq 5\|\pi^1\|^2 + 4\tau\Theta_1 + \tau^2 \sum_{i=2}^{n-1} \Theta_i + C\tau^{4-2\alpha} + C\tau^{4-2\beta} + C\tau^{4-2\gamma}. \quad (1.37)$$

Применяя лемму 1.7, заключаем, что

$$\|\pi^n\|^2 + 2\tau\Theta_n \leq C \left(\|\pi^1\|^2 + \tau\Theta_1 + \tau^{4-2\alpha} + \tau^{4-2\beta} + \tau^{4-2\gamma} \right). \quad (1.38)$$

Оценим правую часть (1.33), используя неравенство Коши-Шварца и ε -неравенство, и применим лемму 1.3:

$$\begin{aligned} \|\pi^1\|^2 + 4\tau\Theta_1 &\leq \frac{\tau}{2} \left((\bar{c}_{\phi\alpha} \delta_{1,1}^\alpha + \bar{c}_{f\beta} \delta_{1,1}^\beta) \|\pi^1\|^2 + \mu \delta_{1,1}^\gamma \|\pi_x^1\|^2 \right) + \\ &+ C\tau \left(\tau^{4-2\alpha} + \tau^{4-2\beta} + \tau^{4-2\gamma} \right) \end{aligned}$$

Используя (1.36), получим

$$\|\pi^1\|^2 + 2\tau\Theta_1 \leq C\tau(\tau^{4-2\alpha} + \tau^{4-2\beta} + \tau^{4-2\gamma}) \quad (1.39)$$

Объединяя неравенства (1.38) и (1.39), приходим к неравенству

$$\|\pi^n\|^2 + 2\tau\Theta_n \leq C(\tau^{4-2\alpha} + \tau^{4-2\beta} + \tau^{4-2\gamma}).$$

Наконец, извлекая квадратный корень из обеих частей последнего неравенства и применяя неравенство $\left(\sum_{i=1}^m a_i^2\right)^{1/2} \geq \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m |a_i|$ и замечая, что $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{\frac{\tau}{T}}$, приходим к утверждению теоремы.

1.2.7 Сходимость полностью дискретной схемы

Теорема 1.4. Пусть $\{p_h^i\}_{i=0}^N$, $p_h^i \in V_h$ – решение задачи 1.4, а p – решение задачи 1.1. Тогда при выполнении предположений 1.1 и 1.2 $p_h^n \in V_h$ удовлетворяет следующему неравенству для $\alpha, \beta, \gamma \in (0,1)$ и всех τ таких, что $\tau < 1/6$:

$$\|p(t_n) - p_h^n\| \leq C(\tau^{2-\alpha} + \tau^{2-\beta} + \tau^{2-\gamma} + h^2).$$

Доказательство. Пусть $p(t_n) - p_h^n = (p(t_n) - Q_h p^n) + (Q_h p^n - p_h^n) = \psi^n + \xi^n$.

Вычитая (1.24) из (1.21) и принимая $v_h = \xi^n$, имеем

$$\begin{aligned} & \|\xi^n\|^2 + \|2\xi^n - \xi^{n-1}\|^2 - \|\xi^{n-1}\|^2 - \|2\xi^{n-1} - \xi^{n-2}\|^2 + \\ & + \|\xi^n - 2\xi^{n-1} + \xi^{n-2}\|^2 + 4\tau\bar{c}_{\phi\alpha}(\Delta_{0,t}^\alpha(\psi^n + \xi^n), \xi^n) + \\ & + 4\tau\bar{c}_{f\beta}(\Delta_{0,t}^\beta(\psi^n + \xi^n), \xi^n) + 4\tau(F(\Delta_{0,t}^\gamma p_x^n) - F(\Delta_{0,t}^\gamma p_{h,x}^n), \xi^n) + \\ & + 4\tau\left(\frac{3\psi^n - 4\psi^{n-1} + \psi^{n-2}}{2\tau}, \xi^n\right) = 0. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Учитывая предположение 1.2 и используя лемму 1.5, получим

$$\begin{aligned} & 4\tau\bar{c}_{\phi\alpha}(\Delta_{0,t}^\alpha \xi^n, \xi^n) + 4\tau\bar{c}_{f\beta}(\Delta_{0,t}^\beta \xi^n, \xi^n) + 4\tau(F(\Delta_{0,t}^\gamma p_x^n) - F(\Delta_{0,t}^\gamma p_{h,x}^n), \xi^n) \geq \\ & \geq 4\tau\Theta_n - 4\tau\Theta_{n-1} - 2\tau(\delta_{n,1}^\alpha + \delta_{n,1}^\beta) \|\xi^0\|^2 - 2\tau\mu\delta_{n,1}^\gamma \|\xi_x^0\|^2, \end{aligned} \quad (1.41)$$

где используется обозначение (1.35) с величинами

$$\Theta_n^{\bar{v}} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^{\bar{v}} \|\xi^s\|^2, \quad \bar{v} \in \{\alpha, \beta\}; \quad \Theta_n^\gamma = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^\gamma \|\xi_x^s\|^2.$$

Далее, используя леммы 1.3 и 1.4, неравенство Коши–Шварца и ε -

неравенство, получим

$$\begin{aligned}
4\bar{c}_{\phi\alpha}(\Delta_{0,t}^\alpha \psi^n, \xi^n) &\leq 2\bar{c}_{\phi\alpha}^2 \left\| \sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^\alpha (\psi^s - \psi^{s-1}) \right\|^2 + 2\tau \|\xi^n\|^2 = \\
&= 2\bar{c}_{\phi\alpha}^2 \int_0^1 \left(\sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^\alpha \int_{t_{s-1}}^{t_s} \partial_t \psi d\theta \right)^2 dx + 2\tau \|\xi^n\|^2 \leq \\
&\leq 2\bar{c}_{\phi\alpha}^2 \int_0^1 \left(\tau \max_{1 \leq s \leq n} |\partial_t \psi(\zeta_s)| \frac{nT^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right)^2 dx + 2\tau \|\xi^n\|^2 \leq \\
&\leq 4\tau \left(\frac{\bar{c}_{\phi\alpha} T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right)^2 \max_{1 \leq s \leq n} \|\partial_t \psi(\zeta_s)\|^2 + 2\tau \|\xi^n\|^2, \tag{1.42}
\end{aligned}$$

где $t_{n-1} \leq \zeta_s \leq t_n$. Аналогичным образом получаем

$$4\bar{c}_{j\beta}(\Delta_{0,t}^\beta \psi^n, \xi^n) \leq 4\tau \left(\frac{\bar{c}_{j\beta} T^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \right)^2 \max_{1 \leq s \leq n} \|\partial_t \psi(\zeta_s)\|^2 + 2\tau \|\xi^n\|^2. \tag{1.43}$$

Чтобы оценить последнее слагаемое в левой части (1.40), применим неравенство Коши – Шварца и ε -неравенство, а также неравенство $\left(\int_a^b f dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2 dx$:

$$\begin{aligned}
4\tau \left(\frac{3\psi^n - 4\psi^{n-1} + \psi^{n-2}}{2\tau}, \xi^n \right) &\leq 2\tau \left\| \frac{3\psi^n - 4\psi^{n-1} + \psi^{n-2}}{2\tau} \right\|^2 + 2\tau \|\xi^n\|^2 = \\
&= \frac{1}{2\tau} \left\| \int_{t_{n-1}}^{t_n} \partial_t \psi d\theta - \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \partial_t \psi d\theta \right\|^2 + 2\tau \|\xi^n\|^2 \leq \\
&\leq \frac{1}{2\tau} \cdot \tau \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\partial_t \psi\|^2 d\theta + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \|\partial_t \psi\|^2 d\theta \right) + 2\tau \|\xi^n\|^2 = \\
&= \frac{1}{2} \int_{t_{n-2}}^{t_n} \|\partial_t \psi\|^2 d\theta + 2\tau \|\xi^n\|^2. \tag{1.44}
\end{aligned}$$

Принимая во внимание неравенства (1.41)–(1.44), из (1.40) следует, что

$$\begin{aligned}
&\|\xi^n\|^2 + \|2\xi^n - \xi^{n-1}\|^2 + \|\xi^n - 2\xi^{n-1} + \xi^{n-2}\|^2 + 4\tau\Theta_n \leq \\
&\leq \|\xi^{n-1}\|^2 + \|2\xi^{n-1} - \xi^{n-2}\|^2 + 4\tau\Theta_{n-1} + 6\tau\|\xi^n\|^2 + \\
&+ 4\tau \left[\left(\frac{\bar{c}_{\phi\alpha} T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right)^2 + \left(\frac{\bar{c}_{j\beta} T^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \right)^2 \right] \max_{1 \leq s \leq n} \|\psi_t(\zeta_s)\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \|\partial_t \psi\|^2 d\theta. \tag{1.45}
\end{aligned}$$

Суммируя неравенство (1.45) относительно n от 2 до n , получим

$$\|\xi^n\|^2 + 4\tau\Theta_n \leq 5\|\xi^1\|^2 + 4\tau\Theta_1 + 6\tau\|\xi^n\|^2 + 6\tau\sum_{i=2}^{n-1}\|\xi^i\|^2 + Ch^4.$$

Предполагая, что τ удовлетворяет условию $\tau < 1/6$, и применяя лемму 1.7, имеем

$$\|\xi^n\|^2 + 4\tau\Theta_n \leq C\left(\|\xi^1\|^2 + \tau\Theta_1 + h^4\right). \quad (1.46)$$

Рассмотрим разность (1.20) и (1.23), и примем $v_h = \xi^1$ в полученном тождестве. Далее, используя тот же метод оценки слагаемых, аналогично неравенствам (1.41)–(1.44), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|\xi^1\|^2 + \tau\Theta_1 \leq \left(1 + \frac{1}{2}\bar{\tau}_{\phi\alpha} + \bar{\tau}_{f\beta}\right)\|\xi^0\|^2 + \frac{1}{2}\tau\mu\|\xi_x^0\|^2 + \\ & + 6\left(\tau^{4-2\alpha}\left(\frac{\bar{c}_{\phi\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^2 + \tau^{4-2\beta}\left(\frac{\bar{c}_{f\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\right)^2\right)\|\partial_t\psi(\zeta_1)\|^2 + 6\tau^2\left\|\frac{\psi^1 - \psi^0}{\tau}\right\|^2 + \tau\Theta_0, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\frac{1}{2}\|\xi^1\|^2 + \tau\Theta_1 \leq C\left(\tau^{8-4\alpha} + \tau^{8-4\beta} + h^4\right). \quad (1.47)$$

Объединяя неравенства (1.46) и (1.47), получим

$$\|\xi^n\|^2 + 4\tau\Theta_n \leq C\left(\tau^{8-4\alpha} + \tau^{8-4\beta} + h^4\right). \quad (1.48)$$

Используя неравенство треугольника, имеем

$$\|p(t_n) - p_h^n\| \leq \|p(t_n) - p^n\| + \|p^n - Q_h p^n\| + \|\xi^n\|. \quad (1.49)$$

Тогда, принимая во внимание теорему 1.3, а также неравенства (1.22) и (1.48), приходим к утверждению теоремы.

1.2.8 Верификация порядка сходимости на основе вычислительных экспериментов

Для проверки теоретической оценки сходимости, полученной в теореме 1.4 для полностью дискретной схемы, проведен ряд вычислительных экспериментов на примере модельной задачи с известным точным решением.

Цель вычислительных экспериментов состоит в определении зависимости эмпирического порядка сходимости от порядков дробных производных и в сравнении эмпирического порядка сходимости с теоретическим порядком

сходимости, полученным в теореме 1.4.

Пример 1.1. Рассмотрим дробное дифференциальное уравнение

$$\partial_t p + \partial_{0,t}^\alpha p + \partial_{0,t}^\beta p - \partial_{0,t}^\gamma p_{xx} = 3x(x-1) \left(\frac{2t^{3-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)(\alpha-3)(\alpha-2)(\alpha-1)} + \frac{2t^{3-\beta}}{\Gamma(1-\beta)(\beta-3)(\beta-2)(\beta-1)} - t^2 \right) - \frac{12t^{3-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)(\gamma-3)(\gamma-2)(\gamma-1)},$$

$$x \in \Omega = (0,1), t \in (0,1]$$

удовлетворяющее начальным и граничным условиям

$$p(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega},$$

$$p(0,t) = p(1,t) = 0, \quad t \in (0,1],$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in (0,1)$. Точное решение задачи $p(x,t) = x(1-x)t^3$.

Сначала исследовано поведение сходимости численного решения относительно временному шагу. Варьируя значение временного шага в диапазоне от $\tau = 1/10$ до $\tau = 1/160$ посредством двукратного его уменьшения при фиксированном количестве элементов $M = 20000$, вычислены соответствующие погрешности E_τ в L^2 -норме и скорости сходимости по формуле

$$r = \frac{\ln(E_{2\tau}/E_\tau)}{\ln 2}.$$

Выбор достаточно большого M намерением уменьшить влияние ошибки относительно пространственной переменной в численном тесте. Рассмотрены несколько комбинаций порядков дробной производной из множества $\{0.1, 0.5, 0.9\}$, а значения α и β для простоты приняты равными. Результаты расчета представлены в таблице 1.1. В столбце «Порядок» в скобках указаны теоретические порядки сходимости. Графики погрешностей показаны на рисунке 1.1.

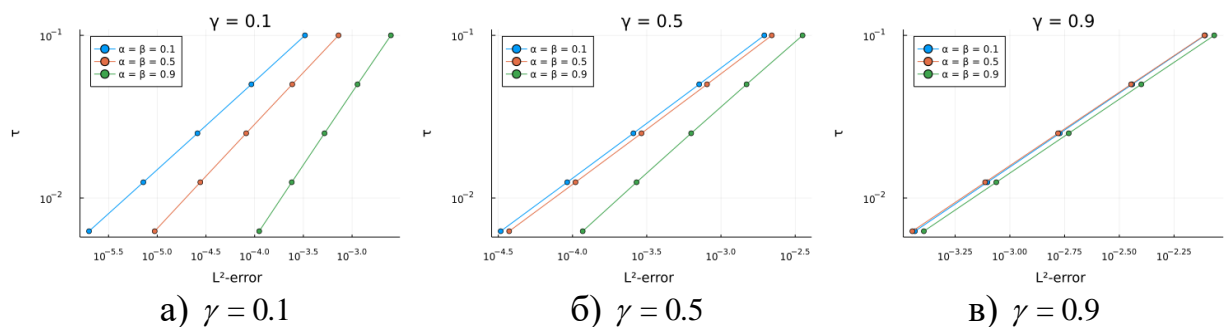


Рисунок 1.1 – Графики погрешностей относительно временного шага τ , полученные для примера 1.1 с $h = 1/20,000$ и различными порядками дробных производных: $\alpha \in \{0.1, 0.5, 0.9\}$; $\beta = \alpha$

Из таблицы 1.1 следует, что порядок сходимости по временному шагу τ существенно зависит от порядков дробных производных α, β, γ . В частности, легко увидеть, что эмпирический порядок сходимости в L^2 -норме был равен около 1,90 в случае $\alpha = \beta = \gamma = 0.1$ и значительно уменьшался с увеличением порядка дробных производных. Порядок сходимости был близок к 1,10, когда любое из α, β или γ было равно 0,9. Такое поведение хорошо согласуется с теоретическим порядком $O(\tau^{2-\alpha} + \tau^{2-\beta} + \tau^{2-\gamma})$.

Чтобы проверить поведение сходимости по отношению к размеру сетки h , зафиксирован временной шаг $\tau = 1/20000$ и рассмотрены различные значения пространственного шага в диапазоне от $h = 1/5$ до $h = 1/40$. Соответствующие результаты расчета представлены в таблице 1.2 и на рисунке 1.2.

Таблица 1.1 – L^2 -погрешности и порядки сходимости, полученные для примера 1.1, при $h = 1/20000$. В скобках указан теоретический порядок сходимости

τ	$\alpha = \beta = 0.1$		$\alpha = \beta = 0.5$		$\alpha = \beta = 0.9$	
	L^2 -погрешность	Порядок	L^2 -погрешность	Порядок	L^2 -погрешность	Порядок
$\gamma = 0.1$						
1/10	3.2849×10^{-4}	-	7.2572×10^{-4}	-	2.5025×10^{-3}	-
1/20	9.2528×10^{-5}	1.83 (≈ 1.90)	2.4325×10^{-4}	1.58 (≈ 1.50)	1.1371×10^{-3}	1.14 (≈ 1.10)
1/40	2.5876×10^{-5}	1.84 (≈ 1.90)	8.1825×10^{-5}	1.57 (≈ 1.50)	5.2122×10^{-4}	1.13 (≈ 1.10)
1/80	7.1986×10^{-6}	1.85 (≈ 1.90)	2.7674×10^{-5}	1.56 (≈ 1.50)	2.4040×10^{-4}	1.12 (≈ 1.10)
1/160	1.9943×10^{-6}	1.85 (≈ 1.90)	9.4167×10^{-6}	1.56 (≈ 1.50)	1.1134×10^{-4}	1.11 (≈ 1.10)
$\gamma = 0.5$						
1/10	1.9588×10^{-3}	-	2.2005×10^{-3}	-	3.5455×10^{-3}	-
1/20	7.1320×10^{-4}	1.46 (≈ 1.50)	8.0528×10^{-4}	1.45 (≈ 1.50)	1.4874×10^{-3}	1.25 (≈ 1.10)
1/40	2.5706×10^{-4}	1.47 (≈ 1.50)	2.9148×10^{-4}	1.47 (≈ 1.50)	6.2996×10^{-4}	1.24 (≈ 1.10)
1/80	9.2043×10^{-5}	1.48 (≈ 1.50)	1.0471×10^{-4}	1.48 (≈ 1.50)	2.6991×10^{-4}	1.22 (≈ 1.10)
1/160	3.2809×10^{-5}	1.49 (≈ 1.50)	3.7426×10^{-5}	1.48 (≈ 1.50)	1.1708×10^{-4}	1.21 (≈ 1.10)
$\gamma = 0.9$						
1/10	7.7892×10^{-3}	-	7.7469×10^{-3}	-	8.5795×10^{-3}	-
1/20	3.6247×10^{-3}	1.10 (≈ 1.10)	3.5794×10^{-3}	1.11 (≈ 1.10)	3.9847×10^{-3}	1.11 (≈ 1.10)
1/40	1.6908×10^{-3}	1.10 (≈ 1.10)	1.6601×10^{-3}	1.11 (≈ 1.10)	1.8576×10^{-3}	1.10 (≈ 1.10)
1/80	7.8920×10^{-4}	1.10 (≈ 1.10)	7.7124×10^{-4}	1.11 (≈ 1.10)	8.6693×10^{-4}	1.10 (≈ 1.10)
1/160	3.6836×10^{-4}	1.10 (≈ 1.10)	3.5862×10^{-4}	1.10 (≈ 1.10)	4.0467×10^{-4}	1.10 (≈ 1.10)

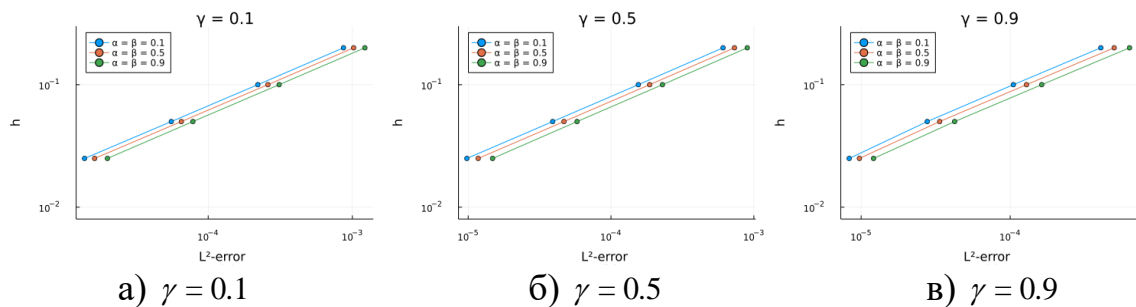


Рисунок 1.2 – Графики погрешностей относительно пространственного шага h , полученные для примера 1.1 при $\tau = 1/20,000$ и различных порядков дробных производных: $\alpha \in \{0.1, 0.5, 0.9\}$; $\beta = \alpha$

Таблица 1.2 – L^2 -погрешности и порядки сходимости, полученные для примера 1.1, при $\tau = 1/20,000$. В скобках указан теоретический порядок сходимости

h	$\alpha = \beta = 0.1$		$\alpha = \beta = 0.5$		$\alpha = \beta = 0.9$	
	L^2 - погрешность	Порядок	L^2 - погрешность	Порядок	L^2 - погрешность	Порядок
$\gamma = 0.1$						
1/5	8.6774×10^{-4}	-	1.0205×10^{-4}	-	1.2214×10^{-3}	-
1/10	2.2098×10^{-4}	1.97 (≈ 2.00)	2.5958×10^{-4}	1.98 (≈ 2.00)	3.1062×10^{-4}	1.98 (≈ 2.00)
1/20	5.5494×10^{-5}	1.99 (≈ 2.00)	6.5172×10^{-5}	1.99 (≈ 2.00)	7.8361×10^{-5}	1.99 (≈ 2.00)
1/40	1.3889×10^{-5}	2.00 (≈ 2.00)	1.6315×10^{-5}	2.00 (≈ 2.00)	2.0016×10^{-5}	1.97 (≈ 2.00)
$\gamma = 0.5$						
1/5	6.0889×10^{-4}	-	7.3163×10^{-4}	-	8.9867×10^{-4}	-
1/10	1.5537×10^{-4}	1.97 (≈ 2.00)	1.8650×10^{-4}	1.97 (≈ 2.00)	2.2911×10^{-4}	1.97 (≈ 2.00)
1/20	3.9054×10^{-5}	1.99 (≈ 2.00)	4.6867×10^{-5}	1.99 (≈ 2.00)	5.7869×10^{-5}	1.99 (≈ 2.00)
1/40	9.7935×10^{-6}	2.00 (≈ 2.00)	1.1751×10^{-5}	2.00 (≈ 2.00)	1.4824×10^{-5}	1.96 (≈ 2.00)
$\gamma = 0.9$						
1/5	4.0575×10^{-4}	-	4.9865×10^{-4}	-	6.3234×10^{-4}	-
1/10	1.0506×10^{-4}	1.95 (≈ 2.00)	1.2865×10^{-4}	1.95 (≈ 2.00)	1.6279×10^{-4}	1.96 (≈ 2.00)
1/20	2.7770×10^{-5}	1.92 (≈ 2.00)	3.3643×10^{-5}	1.94 (≈ 2.00)	4.2397×10^{-5}	1.94 (≈ 2.00)
1/40	7.3664×10^{-6}	1.91 (≈ 2.00)	8.8056×10^{-6}	1.93 (≈ 2.00)	1.1102×10^{-5}	1.93 (≈ 2.00)

Из таблицы 1.2 следует, что порядок пространственной сходимости был достаточно близок к 2,00 для всех рассмотренных значений порядков дробной производной, и, следовательно, этот результат хорошо согласуется с теоремой 1.4. Можно заметить, что порядок пространственной сходимости несколько уменьшался при приближении любого из α, β или γ к 1. Это можно объяснить влиянием ошибки по шагу по времени из-за недостаточно малого значения τ , $\tau = 1/20000$, и тем, что временной порядок сходимости в этом случае был равен около 1.

Таким образом, можно сделать вывод, что численные результаты, проведенные для примера 1.1, полностью подтверждают теоретически спрогнозированный порядок сходимости, полученный в теореме 1.4.

1.3 Исследование второго и третьего частных случаев

Заметим, что результаты, полученные для задачи 1.1 в частном случае $\bar{\alpha}, \gamma \in (0,1)$, также справедливы и для третьего частного случая $\bar{\beta}, \gamma \in (0,1)$. Поэтому в данном подразделе указанные частные случаи рассматриваются вместе.

1.3.1 Слабая вариационная постановка задачи

Определим сначала слабую вариационную постановку задачи для второго и третьего частных случаев задачи 1.1.

Задача 1.5. Найти $p \in H^{1+q}(0, T; H_0^1(\Omega))$, $q = \max\{\bar{\alpha}, \gamma\}$ такое, что для всех $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$(\partial_t p, v) + \bar{c}_{\phi\alpha} (\partial_{0,t}^{\bar{\alpha}} (\partial_t p + p), v) + \mu (\partial_{0,t}^{\gamma} (\partial_t p_x + p_x), v_x) = (\bar{f}, v), \quad (1.50)$$

$$p(x, 0) = p_0(x), \partial_t p(x, 0) = u_0(x), x \in \bar{\Omega}, \quad (1.51)$$

где $\bar{\alpha}, \gamma \in (0, 1)$.

Задача 1.6. Найти $p \in H^{1+q}(0, T; H_0^1(\Omega))$, $q = \max\{\bar{\beta}, \gamma\}$ такое, что для всех $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$(\partial_t p, v) + \bar{c}_{f\beta} (\partial_{0,t}^{\bar{\beta}} (\partial_t p + p), v) + \mu (\partial_{0,t}^{\gamma} (\partial_t p_x + p_x), v_x) = (\bar{f}, v), \quad (1.52)$$

$$p(x, 0) = p_0(x), \partial_t p(x, 0) = u_0(x), x \in \bar{\Omega}, \quad (1.53)$$

где $\bar{\beta}, \gamma \in (0, 1)$.

Функция F имеет вид

$$F(\varphi) = \mu (\partial_t \varphi + \varphi),$$

где μ – положительная постоянная. Предположим, что $\bar{c}_{\phi\alpha} = \bar{c}_{f\beta}$.

1.3.2 Единственность решения и его непрерывная зависимость от входных данных

Докажем следующий результат.

Теорема 1.5. Для решения задачи 1.5 выполняется неравенство

$$\|p\|^2 \leq C \left(\|p_0\|^2 + \int_0^t \|\bar{f}\|^2 ds \right), C > 0, \quad (1.54)$$

из которого следует единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных.

Доказательство. Выберем $v = p$ в тождестве (1.50):

$$(\partial_t p, p) + \bar{c}_{\phi\alpha} (\partial_{0,t}^{\bar{\alpha}} (\partial_t p + p), p) + \mu (\partial_{0,t}^{\gamma} (\partial_t p_x + p_x), p_x) = (\bar{f}, p) \quad (1.55)$$

Оценивая слагаемые в (1.55) с помощью неравенства Коши и леммы 1.1, легко получить, что

$$\frac{d}{dt} \|p\|^2 + \bar{c}_{\phi\alpha} \partial_{0,t}^{\bar{\alpha}+1} \|p\|^2 + \bar{c}_{\phi\alpha} \partial_{0,t}^{\bar{\alpha}} \|p\|^2 + \mu \partial_{0,t}^{\gamma+1} \|p_x\|^2 + \mu \partial_{0,t}^{\gamma} \|p_x\|^2 \leq C (\|\bar{f}\|^2 + \|p\|^2) \quad (1.56)$$

Рассмотрим два случая. Для первого случая, $\gamma < \bar{\alpha}$, применим оператор дробного интегрирования $\partial_{0,t}^{-(\bar{\alpha}+1)}$, определенный формулой (1.5), к обеим частям неравенства (1.56), и получим

$$\partial_{0,t}^{-\bar{\alpha}} \|p\|^2 + \bar{c}_{\phi\alpha} \|p\|^2 + \bar{c}_{\phi\alpha} \int_0^t \|p\|^2 ds + \mu \partial_{0,t}^{\gamma-\bar{\alpha}} \|p_x\|^2 + \mu \partial_{0,t}^{\gamma-\bar{\alpha}-1} \|p_x\|^2 \leq C \partial_{0,t}^{-\bar{\alpha}-1} (\|\bar{f}\|^2 + \|p\|^2) \quad (1.57)$$

В силу неотрицательности второго, третьего и четвертого членов в левой части (1.57) получим:

$$\partial_{0,t}^{-\bar{\alpha}} \|p\|^2 \leq C \partial_{0,t}^{-\bar{\alpha}-1} (\|\bar{f}\|^2 + \|p\|^2). \quad (1.58)$$

Применяя оператор дробного интегрирования к обеим частям неравенства (1.58) и лемму 1.2, получим (1.54).

Аналогичные рассуждения для второго случая, $\gamma > \bar{\alpha}$, приводят к неравенству

$$\partial_{0,t}^{-\gamma} \|p\|^2 + \bar{c}_{\phi\alpha} \partial_{0,t}^{\bar{\alpha}-\gamma} \|p\|^2 + \bar{c}_{\phi\beta} \partial_{0,t}^{\bar{\alpha}-\gamma-1} \|p\|^2 + \mu \|p_x\|^2 + \mu \int_0^t \|p_x\|^2 ds \leq C \partial_{0,t}^{-\gamma-1} (\|\bar{f}\|^2 + \|p\|^2),$$

из которого также следует неравенство (1.54).

1.3.3 Построение полудискретной схемы

Для задачи 1.5 построим численную схему, основанную на использовании аппроксимации дробной производной (1.18) и схемы типа Кранка-Николсона. Для этого введем обозначения

$$p^{n-1/2} = \frac{1}{2}(p^n + p^{n-1}), \quad \Delta_t p^{n-1/2} = \frac{1}{\tau}(p^n - p^{n-1}) \quad (1.59)$$

Сформулируем полудискретные постановки задач, соответствующие рассматриваемым частным случаям задачи 1.1.

Задача 1.7. Пусть известны $\{p^i\}_{i=0}^{n-1}$, $p^i \in H_0^1(\Omega)$, и, в частности, $p^0 = p_0(x)$ и $\Delta_t p^{1/2} = u_0(x)$, $x \in \bar{\Omega}$. Найти $p^n \in H_0^1(\Omega)$, $n \geq 2$, удовлетворяющие следующему тождеству для всех $v \in H_0^1(\Omega)$ и $\bar{\alpha}, \gamma \in (0,1)$:

$$(\Delta_t p^{n-1/2}, v) + \bar{c}_{\phi\alpha} (\Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}} (\Delta_t p^{n-1/2} + p^{n-1/2}), v) + \mu (\Delta_{0,t}^{\gamma} (\Delta_t p_x^{n-1/2} + p_x^{n-1/2}), v_x) = (\bar{f}^{n-1/2}, v) \quad (1.60)$$

Задача 1.8. Пусть известны $\{p^i\}_{i=0}^{n-1}$, $p^i \in H_0^1(\Omega)$, и, в частности, $p^0 = p_0(x)$ и $\Delta_t p^{1/2} = u_0(x)$, $x \in \bar{\Omega}$. Найти $p^n \in H_0^1(\Omega)$, $n \geq 2$, удовлетворяющие следующему тождеству для всех $v \in H_0^1(\Omega)$ и $\bar{\beta}, \gamma \in (0,1)$:

$$(\Delta_t p^{n-1/2}, v) + \bar{c}_{\phi\beta} (\Delta_{0,t}^{\bar{\beta}} (\Delta_t p^{n-1/2} + p^{n-1/2}), v) + \mu (\Delta_{0,t}^{\gamma} (\Delta_t p_x^{n-1/2} + p_x^{n-1/2}), v_x) = (\bar{f}_0^{n-1/2}, v) \quad (1.61)$$

1.3.4 Построение полностью дискретной схемы

Построим следующие полностью дискретные схемы на основе

полудискретных схем (1.60) и (1.61).

Пусть V_h – пространство конечных элементов, определенное в подразделе 1.2.4.

Задача 1.9. Пусть известны $\{p_h^i\}_{i=0}^{n-1}$, $p_h^i \in V_h$, и, в частности, $p_h^0 = Q_h p_0$ и $\Delta_t p_h^{1/2} = Q_h u_0$. Найти $p_h^n \in V_h$, $n = 2, 3, \dots, N$, удовлетворяющие следующему тождеству для всех $v_h \in V_h$:

$$\begin{aligned} & (\Delta_t p_h^{n-1/2}, v_h) + \bar{c}_{\phi\alpha} (\Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}} (\Delta_t p_h^{n-1/2} + p_h^{n-1/2}), v_h) + \\ & + \mu (\Delta_{0,t}^{\gamma} (\Delta_t p_{h,x}^{n-1/2} + p_{h,x}^{n-1/2}), v_{h,x}) = (\bar{f}^{n-1/2}, v_h), \end{aligned} \quad (1.62)$$

где $\bar{\alpha}, \gamma \in (0, 1)$.

Задача 1.10. Пусть известны $\{p_h^i\}_{i=0}^{n-1}$, $p_h^i \in V_h$, и, в частности, $p_h^0 = Q_h p_0$ и $\Delta_t p_h^{1/2} = Q_h u_0$. Найти $p_h^n \in V_h$, $n = 2, 3, \dots, N$, удовлетворяющие следующему тождеству для всех $v_h \in V_h$:

$$\begin{aligned} & (\Delta_t p_h^{n-1/2}, v_h) + \bar{c}_{f\beta} (\Delta_{0,t}^{\bar{\beta}} (\Delta_t p_h^{n-1/2} + p_h^{n-1/2}), v_h) + \\ & + \mu (\Delta_{0,t}^{\gamma} (\Delta_t p_{h,x}^{n-1/2} + p_{h,x}^{n-1/2}), v_{h,x}) = (\bar{f}^{n-1/2}, v_h), \end{aligned} \quad (1.63)$$

где $\bar{\beta}, \gamma \in (0, 1)$.

1.3.5 Устойчивость численной схемы

Сформулируем следующую лемму, которая будет использоваться при оценке слагаемых, содержащих дискретную дробную производную.

Лемма 1.8. Для $\Delta_{0,t}^{\nu} p^{n-1/2}$, $0 < \nu < 1$, $n \geq 1$, справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & (\Delta_{0,t}^{\nu} (\Delta_t p^{n-1/2} + p^{n-1/2}), \Delta_t p^{n-1/2} + p^{n-1/2}) \geq \\ & \geq \Theta_n^{\nu} - \Theta_{n-1}^{\nu} - \frac{1}{2} (\delta_{n,2}^{\nu} - \delta_{n,1}^{\nu}) \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} \right) \|p^1\|^2 - \\ & - \frac{1}{2} \delta_{n,1}^{\nu} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} \right) \|p^0\|^2 + \delta_{n,2}^{\nu} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{2} \right) (p^0, \Delta_t p^{n-1/2} + p^{n-1/2}), \end{aligned} \quad (1.64)$$

где $\Theta_i^{\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s=2}^i \delta_{i,s}^{\nu} \|\Delta_t p^{s-1/2} + p^{s-1/2}\|^2$, $i \geq 1$ и $\Theta_0^{\nu} = 0$.

Доказательство. Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 1.5.

Теперь исследуем устойчивость полностью дискретной схемы (1.62).

Теорема 1.6. При выполнении предположений 1.1, 1.3 и 1.4 дискретная задача 1.9 устойчива при достаточно малом $\tau > 0$ и справедлива следующая оценка:

$$\|p_h^n\|^2 + \tau \|\Delta_t p_h^{n-1/2} + p_h^{n-1/2}\|^2 + \tau \delta_{n,n}^\gamma \|\Delta_t p_{h,x}^{n-1/2} + p_{h,x}^{n-1/2}\|^2 \leq \|p_h^0\|^2 + C \max_{1 \leq l \leq n} \|\bar{f}^{l-1/2}\|^2.$$

Доказательство. В тождестве (1.62) выберем $v_h = \Delta_t p_h^{n-1/2} + p_h^{n-1/2}$:

$$\begin{aligned} & (\Delta_t p_h^{n-1/2}, \Delta_t p_h^{n-1/2} + p_h^{n-1/2}) + \bar{c}_{\phi\alpha} (\Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}} (\Delta_t p_h^{n-1/2} + p_h^{n-1/2}), \Delta_t p_h^{n-1/2} + p_h^{n-1/2}) + \\ & + \mu (\Delta_{0,t}^\gamma (\Delta_t p_{h,x}^{n-1/2} + p_{h,x}^{n-1/2}), \Delta_t p_{h,x}^{n-1/2} + p_{h,x}^{n-1/2}) = (\bar{f}^{n-1/2}, \Delta_t p_h^{n-1/2} + p_h^{n-1/2}), \end{aligned} \quad (1.65)$$

Оценим слагаемые в тождестве (1.65), используя лемму 1.8:

$$(\Delta_t p_h^{n-1/2}, \Delta_t p_h^{n-1/2} + p_h^{n-1/2}) \geq \frac{1}{2\tau} \|p_h^n\|^2 - \frac{1}{2\tau} \|p_h^{n-1}\|^2 + \|\Delta_t p_h^{n-1/2}\|^2, \quad (1.66)$$

$$(\Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}} (\Delta_t p_h^{n-1/2} + p_h^{n-1/2}), \Delta_t p_h^{n-1/2} + p_h^{n-1/2}) \geq \Theta_n^{\bar{\alpha}} - \Theta_{n-1}^{\bar{\alpha}}, \quad (1.67)$$

$$(\Delta_{0,t}^\gamma (\Delta_t p_{h,x}^{n-1/2} + p_{h,x}^{n-1/2}), \Delta_t p_{h,x}^{n-1/2} + p_{h,x}^{n-1/2}) \geq \Theta_n^\gamma - \Theta_{n-1}^\gamma, \quad (1.68)$$

$$(\bar{f}^{n-1/2}, \Delta_t p_h^{n-1/2} + p_h^{n-1/2}) \leq \|\bar{f}^{n-1/2}\| \|\Delta_t p_h^{n-1/2} + p_h^{n-1/2}\|, \quad (1.69)$$

где

$$\Theta_n^{\bar{\alpha}} = \frac{1}{2} \sum_{s=2}^n \delta_{n,s}^{\bar{\alpha}} \|\Delta_t p_h^{s-1/2} + p_h^{s-1/2}\|^2, \quad (1.70)$$

$$\Theta_n^\gamma = \frac{1}{2} \sum_{s=2}^n \delta_{n,s}^\gamma \|\Delta_t p_{h,x}^{s-1/2} + p_{h,x}^{s-1/2}\|^2.$$

Тогда из (1.65) с учетом полученных неравенств (1.66)–(1.69) получим

$$\begin{aligned} & \|p_h^n\|^2 + 2\tau \|\Delta_t p_h^{n-1/2}\|^2 + 2\tau (\Theta_n^{\bar{\alpha}} + \Theta_n^\gamma) \leq \\ & \leq \|p_h^{n-1}\|^2 + 2\tau (\Theta_{n-1}^{\bar{\alpha}} + \Theta_{n-1}^\gamma) + 2\tau \|\bar{f}^{n-1/2}\| \|\Delta_t p_h^{n-1/2} + p_h^{n-1/2}\|, \end{aligned}$$

Просуммируем данное неравенство по n от 1 до n :

$$\|p_h^n\|^2 + 2\tau (\Theta_n^{\bar{\alpha}} + \Theta_n^\gamma) \leq \|p_h^0\|^2 + 2\tau (\Theta_0^{\bar{\alpha}} + \Theta_0^\gamma) + 2\tau \sum_{l=1}^n \|\bar{f}^{l-1/2}\| \|\Delta_t p_h^{l-1/2} + p_h^{l-1/2}\|,$$

Используя обозначения (1.70), получим

$$\begin{aligned} & \|p_h^n\|^2 + \tau \left(\delta_{n,n}^{\bar{\alpha}} \|\Delta_t p_h^{n-1/2} + p_h^{n-1/2}\|^2 + \delta_{n,n}^\gamma \|\Delta_t p_{h,x}^{n-1/2} + p_{h,x}^{n-1/2}\|^2 \right) + \\ & + \tau \left(\sum_{s=2}^{n-1} \delta_{n,s}^{\bar{\alpha}} \|\Delta_t p_h^{s-1/2} + p_h^{s-1/2}\|^2 + \sum_{s=2}^{n-1} \delta_{n,s}^\gamma \|\Delta_t p_{h,x}^{s-1/2} + p_{h,x}^{s-1/2}\|^2 \right) \leq \\ & \leq \|p_h^0\|^2 + C \sum_{l=1}^n \|\bar{f}^{l-1/2}\|^2 + \tau^2 \|\Delta_t p_h^{n-1/2} + p_h^{n-1/2}\|^2 + \tau^2 \sum_{l=1}^{n-1} \|\Delta_t p_h^{l-1/2} + p_h^{l-1/2}\|^2. \end{aligned}$$

Тогда при малом τ получим

$$\begin{aligned} & \|p_h^n\|^2 + \tau \|\Delta_t p_h^{n-1/2} + p_h^{n-1/2}\|^2 + \tau \delta_{n,n}^\gamma \|\Delta_t p_{h,x}^{n-1/2} + p_{h,x}^{n-1/2}\|^2 \leq \\ & \leq \|p_h^0\|^2 + C \sum_{l=1}^n \|\bar{f}_0^{l-1/2}\|^2 + \tau^2 \sum_{l=1}^{n-1} \|\Delta_t p_h^{l-1/2} + p_h^{l-1/2}\|^2. \end{aligned}$$

Применяя лемму 1.7 к данному неравенству, приходим к утверждению теоремы.

1.3.6 Сходимость полудискретной схемы

Теорема 1.7. Пусть $\{p^i\}_{i=0}^N$, $p^i \in H_0^1(\Omega)$ – решение задачи 1.7, а p – решение задачи 1.1. Тогда при выполнении предположений 1.1, 1.3, 1.4 для $p^n \in H_0^1(\Omega)$ и $\bar{\alpha}, \gamma \in (0,1)$ справедливо следующее неравенство:

$$\|p(t_n) - p^n\| + \tau \sum_{i=1}^n \|\Delta_t (p(t_{i-1/2}) - p^{i-1/2})\| \leq C(\tau^{2-\bar{\alpha}} + \tau^{2-\gamma}).$$

Доказательство. Обозначим $\pi^n = p(t_n) - p^n$. Вычитая (1.60) из (1.50) и выбирая $v = \Delta_t \pi^{n-1/2} + \pi^{n-1/2}$ получим

$$\begin{aligned} & (\Delta_t \pi^{n-1/2}, \Delta_t \pi^{n-1/2} + \pi^{n-1/2}) + \bar{c}_{\phi\alpha} (\Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}} (\Delta_t \pi^{n-1/2} + \pi^{n-1/2}), \Delta_t \pi^{n-1/2} + \pi^{n-1/2}) + \\ & + \mu (\Delta_{0,t}^\gamma (\Delta_t \pi_x^{n-1/2} + \pi_x^{n-1/2}), \Delta_t \pi_x^{n-1/2} + \pi_x^{n-1/2}) = \\ & = (r_{n-1/2}^{\bar{\alpha}}, \Delta_t \pi^{n-1/2} + \pi^{n-1/2}) + (r_{n-1/2}^\gamma, \Delta_t \pi_x^{n-1/2} + \pi_x^{n-1/2}), \end{aligned} \quad (1.71)$$

где $|r_{n-1/2}^{\bar{\alpha}}| \leq C\tau^{2-\bar{\alpha}}$, $|r_{n-1/2}^\gamma| \leq C\tau^{2-\gamma}$, что легко следует из леммы 1.3. Оценим слагаемые в (1.71), используя лемму 1.8:

$$(\Delta_t \pi^{n-1/2}, \Delta_t \pi^{n-1/2} + \pi^{n-1/2}) \geq \frac{1}{2\tau} \|\pi^n\|^2 - \frac{1}{2\tau} \|\pi^{n-1}\|^2 + \|\Delta_t \pi^{n-1/2}\|^2, \quad (1.72)$$

$$(\Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}} (\Delta_t \pi^{n-1/2} + \pi^{n-1/2}), \Delta_t \pi^{n-1/2} + \pi^{n-1/2}) \geq \Theta_n^{\bar{\alpha}} - \Theta_{n-1}^{\bar{\alpha}}, \quad (1.73)$$

$$(\Delta_{0,t}^\gamma (\Delta_t \pi_x^{n-1/2} + \pi_x^{n-1/2}), \Delta_t \pi_x^{n-1/2} + \pi_x^{n-1/2}) \geq \Theta_n^\gamma - \Theta_{n-1}^\gamma, \quad (1.74)$$

$$\begin{aligned} & (r_{n-1/2}^{\bar{\alpha}}, \Delta_t \pi^{n-1/2} + \pi^{n-1/2}) + (r_{n-1/2}^\gamma, \Delta_t \pi_x^{n-1/2} + \pi_x^{n-1/2}) \leq \\ & \leq C\tau^{2-\bar{\alpha}} \|\Delta_t \pi^{n-1/2} + \pi^{n-1/2}\| + C\tau^{2-\gamma} \|\Delta_t \pi_x^{n-1/2} + \pi_x^{n-1/2}\|, \end{aligned} \quad (1.75)$$

где

$$\Theta_n^{\bar{\alpha}} = \frac{1}{2} \sum_{s=2}^n \delta_{n,s}^{\bar{\alpha}} \|\Delta_t \pi^{s-1/2} + \pi^{s-1/2}\|^2, \quad \Theta_n^\gamma = \frac{1}{2} \sum_{s=2}^n \delta_{n,s}^\gamma \|\Delta_t \pi_x^{s-1/2} + \pi_x^{s-1/2}\|^2.$$

Следовательно, из (1.71) следует, что

$$\begin{aligned} & \|\pi^n\|^2 - \|\pi^{n-1}\|^2 + 2\tau \|\Delta_t \pi^{n-1/2}\|^2 + 2\tau \Theta_n \leq 2\tau \Theta_{n-1} + \\ & + C\tau^{3-\bar{\alpha}} \|\Delta_t \pi^{n-1/2} + \pi^{n-1/2}\| + C\tau^{3-\gamma} \|\Delta_t \pi_x^{n-1/2} + \pi_x^{n-1/2}\|, \end{aligned} \quad (1.76)$$

где $\Theta_n = \bar{c}_{\phi\alpha} \Theta_n^{\bar{\alpha}} + \mu \Theta_n^\gamma$. Просуммируем неравенство (1.76) по n от 1 до n :

$$\begin{aligned} & \|\pi^n\|^2 + 2\tau \sum_{i=1}^n \|\Delta_t \pi^{i-1/2}\|^2 + 2\tau \Theta_n \leq \|\pi^0\|^2 + 2\tau \Theta_0 + \\ & + C\tau^{3-\bar{\alpha}} \|\Delta_t \pi^{n-1/2} + \pi^{n-1/2}\| + C\tau^{3-\bar{\alpha}} \sum_{i=1}^{n-1} \|\Delta_t \pi^{i-1/2} + \pi^{i-1/2}\| + \\ & + C\tau^{3-\gamma} \|\Delta_t \pi_x^{n-1/2} + \pi_x^{n-1/2}\| + C\tau^{3-\gamma} \sum_{i=1}^{n-1} \|\Delta_t \pi_x^{i-1/2} + \pi_x^{i-1/2}\|. \end{aligned}$$

Используя ту же методику, что и при получении неравенства (1.37), и заметив, что

$$\frac{1}{2} \delta_{i,s}^{\bar{\alpha}} \|\Delta_t \pi^{s-1/2} + \pi^{s-1/2}\|^2 + \frac{1}{2} \delta_{i,s}^\gamma \|\Delta_t \pi_x^{s-1/2} + \pi_x^{s-1/2}\|^2 \leq \Theta_i,$$

приходим к неравенству

$$\|\pi^n\|^2 + 2\tau \sum_{i=1}^n \|\Delta_t \pi^{i-1/2}\|^2 + \tau \Theta_n \leq \tau^2 \sum_{i=1}^{n-1} \Theta_i + C(\tau^{4-2\bar{\alpha}} + \tau^{4-2\gamma}).$$

Наконец, применяя лемму 1.7, приходим к утверждению теоремы.

Замечание 1.1. Результат сходимости полудискретной схемы, соответствующей частному случаю III, аналогичен теореме 1.7.

1.3.7 Сходимость полностью дискретной схемы

Лемма 1.9. Пусть $\{p^n\}_{n=0}^N$ – решение задачи 1.7. Тогда справедливо неравенство

$$\|R_h^{n-1/2}\| \leq C(\tau^{2-\bar{\alpha}} + h^2), \quad (1.77)$$

где

$$R_h^{n-1/2} = \Delta_t (\mathcal{Q}_h p^{n-1/2} - p^{n-1/2}) + \bar{c}_{\phi\alpha} \Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}} (\Delta_t (\mathcal{Q}_h p^{n-1/2} - p^{n-1/2}) + (\mathcal{Q}_h p^{n-1/2} - p^{n-1/2})) \quad (1.78)$$

Доказательство. Используя лемму 1.3, легко показать, что

$$R_h^{n-1/2} = \mathcal{Q}_h z(t_{n-1/2}) - z(t_{n-1/2}) + O(\tau^{2-\bar{\alpha}}),$$

где $z(t_n) = \partial_t p(t_n) + \bar{c}_{\phi\alpha} \partial_{0,t}^{\bar{\alpha}} (\partial_t p(t_n) + p(t_n))$. Тогда используя неравенство треугольника и свойство (1.22), приходим к неравенству (1.77).

Теперь докажем сходимость полностью дискретной схемы (1.62).

Теорема 1.8. Пусть $\{p_h^i\}_{i=0}^N$, $p_h^i \in V_h$ – решение задачи 1.9, а p – решение задачи 1.1. Тогда при выполнении предположений 1.1, 1.3 и 1.4, $p_h^n \in V_h$ удовлетворяет следующему неравенству для $\bar{\alpha}, \gamma \in (0,1)$ и для всех τ таких, что $\tau < 2$:

$$\|p(t_n) - p_h^n\| \leq C(\tau^{2-\bar{\alpha}} + \tau^{2-\gamma} + h^2)$$

Доказательство. Обозначим $\xi^n = Q_h p^n - p_h^n$. Используя (1.60), (1.62) и (1.22), имеем

$$\begin{aligned} & (\Delta_t \xi^{n-1/2}, v_h) + \bar{c}_{\phi\alpha} (\Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}} (\Delta_t \xi^{n-1/2} + \xi^{n-1/2}), v_h) + \\ & + \mu (\Delta_{0,t}^{\gamma} (\Delta_t \xi_x^{n-1/2} + \xi_x^{n-1/2}), v_{h,x}) = (R_h^{n-1/2}, v_h), \end{aligned} \quad (1.79)$$

где $R_h^{n-1/2}$ определено в (1.78).

Выбирая $v_h = \Delta_t \xi^{n-1/2} + \xi^{n-1/2}$ и применяя метод, использованный при получении неравенств (1.72)–(1.75), приходим к следующим неравенствам:

$$(\Delta_t \xi^{n-1/2}, \Delta_t \xi^{n-1/2} + \xi^{n-1/2}) \geq \frac{1}{2\tau} \|\xi^n\|^2 - \frac{1}{2\tau} \|\xi^{n-1}\|^2 + \|\Delta_t \xi^{n-1/2}\|^2, \quad (1.80)$$

$$(\Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}} (\Delta_t \xi^{n-1/2} + \xi^{n-1/2}), \Delta_t \xi^{n-1/2} + \xi^{n-1/2}) \geq \Theta_n^{\bar{\alpha}} - \Theta_{n-1}^{\bar{\alpha}}, \quad (1.81)$$

$$(\Delta_{0,t}^{\gamma} (\Delta_t \xi_x^{n-1/2} + \xi_x^{n-1/2}), \Delta_t \xi_x^{n-1/2} + \xi_x^{n-1/2}) \geq \Theta_n^{\gamma} - \Theta_{n-1}^{\gamma}, \quad (1.82)$$

$$(R_h^{n-1/2}, \Delta_t \xi^{n-1/2} + \xi^{n-1/2}) \leq C(h^2 + \tau^{2-\bar{\alpha}}) \|\Delta_t \xi^{n-1/2} + \xi^{n-1/2}\|, \quad (1.83)$$

где $\Theta_n^{\bar{\alpha}} = \frac{1}{2} \sum_{s=2}^n \delta_{n,s}^{\bar{\alpha}} \|\Delta_t \xi^{s-1/2} + \xi^{s-1/2}\|^2$, $\Theta_n^{\gamma} = \frac{1}{2} \sum_{s=2}^n \delta_{n,s}^{\gamma} \|\Delta_t \xi_x^{s-1/2} + \xi_x^{s-1/2}\|^2$.

Следовательно, принимая во внимание неравенства (1.80)–(1.83), из (1.79) следует, что

$$\begin{aligned} \|\xi^n\|^2 + 2\tau \|\Delta_t \xi^{n-1/2}\|^2 + 2\tau \Theta_n & \leq \|\xi^{n-1}\|^2 + 2\tau \Theta_{n-1} + \\ & + C\tau(h^2 + \tau^{2-\bar{\alpha}}) \|\Delta_t \xi^{n-1/2} + \xi^{n-1/2}\|, \end{aligned} \quad (1.84)$$

где $\Theta_n = \bar{c}_{\phi\alpha} \Theta_n^{\bar{\alpha}} + \mu \Theta_n^{\gamma}$. Просуммируем неравенство (1.84) по n от 1 до n , затем используем неравенство Коши-Шварца и ε -неравенство и применим ту же методику, что и при получении неравенства (1.37). Далее, замечая, что $\frac{1}{2} \delta_{i,s}^{\bar{\alpha}} \|\Delta_t \xi^{i-1/2} + \xi^{i-1/2}\|^2 \leq \Theta_i$, приходим к неравенству

$$\|\xi^n\|^2 + 2\tau \sum_{i=1}^n \|\Delta_t \xi^{i-1/2}\|^2 + 2\tau \Theta_n \leq \|\xi^0\|^2 + 2\tau \Theta_0 + \tau^2 \Theta_n + \tau^2 \sum_{i=1}^{n-1} \Theta_i + C(h^4 + \tau^{4-2\bar{\alpha}}).$$

Предполагая, что τ удовлетворяет условию $\tau < 2$, заключаем, что

$$\|\xi^n\|^2 + 2\tau \sum_{i=1}^n \|\Delta_t \xi^{i-1/2}\|^2 + \tau \Theta_n \leq \tau^2 \sum_{i=1}^{n-1} \Theta_i + C(h^4 + \tau^{4-2\bar{\alpha}}) \quad (1.85)$$

Наконец, применяя лемму 1.7 и принимая во внимание неравенства (1.22), (1.49), (1.85) и теорему 1.7, приходим к утверждению теоремы.

Замечание 1.2. Результат сходимости полностью дискретной схемы, соответствующей случаю III, аналогичен теореме 1.8.

1.3.8 Верификация порядка сходимости на основе вычислительных экспериментов

Цель вычислительных экспериментов, проведенных в данном подразделе, состоит в сравнении эмпирического порядка сходимости с теоретическим порядком сходимости, полученным в теореме 1.8. Численные тесты в основном направлены на проверку порядка сходимости относительно временного шага τ . Рассматривались различные значения τ в диапазоне от 1/10 до 1/160 при фиксированном размере сетки $h = 1/40000$.

Пример 1.2. Рассмотрим дробно-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & \partial_t p + \partial_{0,t}^{\bar{\alpha}} (\partial_t p + p) - \frac{1}{8} \partial_{0,t}^{\gamma} (\partial_t p_{xx} + p_{xx}) = \\ & = -2t \sin(\pi x) \left(\frac{t^{-\bar{\alpha}} (\bar{\alpha} - t - 2)}{\Gamma(1-\bar{\alpha})(\bar{\alpha}-2)(\bar{\alpha}-1)} + \frac{\pi^2 t^{-\gamma} (\gamma - t - 2)}{8\Gamma(1-\gamma)(\gamma-2)(\gamma-1)} - 1 \right), \\ & x \in \Omega = (0,1), t \in (0,1] \end{aligned}$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} p(x,0) = \partial_t p(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}; \\ p(0,t) = p(1,t) = 0, \quad t \in (0,1], \end{aligned}$$

где $\bar{\alpha}, \gamma \in (0,1)$. Точное решение задачи $p(x,t) = t^2 \sin(\pi x)$.

Численные эксперименты проводились по методике, описанной в подразделе 1.2.8. В экспериментах рассматривалось несколько комбинаций порядков дробной производной $\bar{\alpha}$ и γ из набора $\{0.1, 0.5, 0.9\}$. Результаты вычислительных экспериментов представлены в таблице 1.3, а графики ошибок показаны на рисунке 1.3.

Таблица 1.3 – L^2 -погрешности и порядки сходимости, полученные для примера 1.2 при $h = 1/40,000$. В скобках указан теоретический порядок сходимости

τ	$\bar{\alpha} = 0.1$		$\bar{\alpha} = 0.5$		$\bar{\alpha} = 0.9$	
	L^2 -погрешность	Порядок	L^2 -погрешность	Порядок	L^2 -погрешность	Порядок
$\gamma = 0.1$						
1/10	2.3676×10^{-3}	-	3.2628×10^{-3}	-	4.4958×10^{-3}	-
1/20	5.9378×10^{-4}	2.00 (≈ 1.90)	9.0842×10^{-4}	1.84 (≈ 1.50)	1.4817×10^{-3}	1.60 (≈ 1.10)
1/40	1.5068×10^{-4}	1.98 (≈ 1.90)	2.6240×10^{-4}	1.79 (≈ 1.50)	5.3666×10^{-4}	1.47 (≈ 1.10)
1/80	3.8539×10^{-5}	1.97 (≈ 1.90)	7.8441×10^{-5}	1.74 (≈ 1.50)	2.1149×10^{-4}	1.34 (≈ 1.10)
1/160	9.7984×10^{-6}	1.98 (≈ 1.90)	2.4172×10^{-5}	1.70 (≈ 1.50)	8.8729×10^{-5}	1.25 (≈ 1.10)
$\gamma = 0.5$						
1/10	3.5044×10^{-3}	-	4.5686×10^{-3}	-	6.0144×10^{-3}	-
1/20	9.9782×10^{-4}	1.81 (≈ 1.50)	1.4057×10^{-3}	1.70 (≈ 1.50)	2.1346×10^{-3}	1.49 (≈ 1.10)
1/40	2.9554×10^{-4}	1.76 (≈ 1.50)	4.4784×10^{-4}	1.65 (≈ 1.50)	8.0921×10^{-4}	1.40 (≈ 1.10)
1/80	9.0569×10^{-5}	1.71 (≈ 1.50)	1.4635×10^{-4}	1.61 (≈ 1.50)	3.2397×10^{-4}	1.32 (≈ 1.10)
1/160	2.8713×10^{-5}	1.66 (≈ 1.50)	4.8539×10^{-5}	1.59 (≈ 1.50)	1.3629×10^{-4}	1.25 (≈ 1.10)
$\gamma = 0.9$						
1/10	5.2340×10^{-3}	-	6.4114×10^{-3}	-	8.1559×10^{-3}	-
1/20	1.8406×10^{-3}	1.51 (≈ 1.10)	2.3477×10^{-3}	1.45 (≈ 1.10)	3.3127×10^{-3}	1.30 (≈ 1.10)
1/40	7.0754×10^{-4}	1.38 (≈ 1.10)	9.1878×10^{-4}	1.35 (≈ 1.10)	1.4232×10^{-3}	1.22 (≈ 1.10)
1/80	2.9274×10^{-4}	1.27 (≈ 1.10)	3.7822×10^{-4}	1.28 (≈ 1.10)	6.3606×10^{-4}	1.16 (≈ 1.10)
1/160	1.1989×10^{-4}	1.29 (≈ 1.10)	1.6027×10^{-4}	1.24 (≈ 1.10)	2.9034×10^{-4}	1.13 (≈ 1.10)

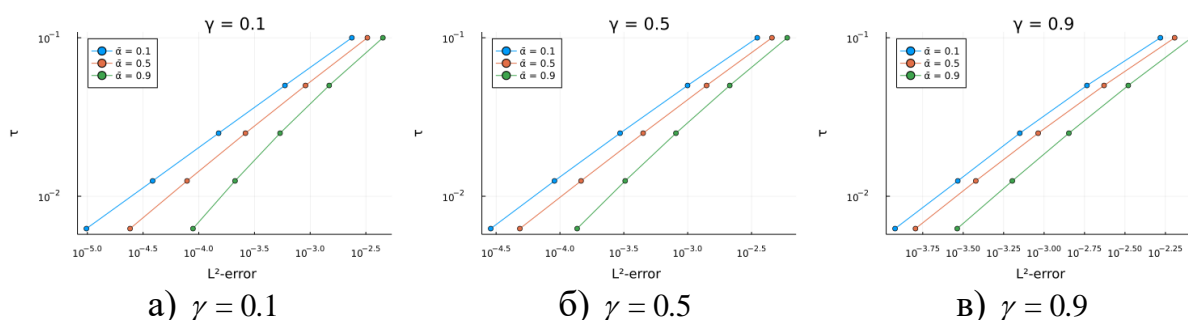


Рисунок 1.3 – Графики погрешностей относительно временного шага τ , полученные для примера 1.3 с $h = 1/40000$ и различных порядков дробных производных: $\bar{\alpha} \in \{0.1, 0.5, 0.9\}$

Сравнивая эмпирический и теоретический порядки сходимости, представленные в таблице 1.3, можно сделать вывод, что численные результаты полностью подтверждают теоретический результат, спрогнозированный в теореме 1.8.

1.4 Исследование четвертого частного случая

Теперь рассмотрим еще одно обобщение задачи 1.1, в которой порядки дробных производных $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in (0, 1)$ и $\gamma \in (1, 2)$. Кроме того, предполагается явная зависимость правой части уравнения от искомой функции.

В отличие от частных случаев (1.10), изучается более общий случай, в котором не накладываются ограничения на соотношения между порядками дробных производных.

1.4.1 Постановка задачи

Задача 1.11. В области $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times \bar{J}$, где $\Omega \subset R^d$, $d \geq 1$, $J = (0, T]$, $T > 0$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\partial_t p + k_{\bar{\alpha}} \partial_{0,t}^{\bar{\alpha}+1} p + k_{\bar{\beta}} \partial_{0,t}^{\bar{\beta}+1} p - \lambda \partial_{0,t}^{\bar{\gamma}+1} \nabla^2 p = f(x, t, p), \quad x \in \Omega, \quad t \in J, \quad (1.86)$$

$$p = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in J, \quad (1.87)$$

$$p = p_0(x), \quad \partial_t p = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t = 0, \quad (1.88)$$

где $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \in (0, 1)$, $k_{\bar{\alpha}}, k_{\bar{\beta}}, \lambda$ – положительные константы, f – заданная функция.

Предположим, что задача 1.11 имеет решение, имеющее достаточное количество производных, необходимых для выполнения анализа. Более того, предположим, что правую часть уравнения (1.86) можно представить в виде

$$f(x, t, p) = f_1(p) + f_2(x, t),$$

и существуют положительные действительные числа C_1 и C_2 такие, что $|f_1(p)| \leq C_1 |p|$, $f_1(p_0) = 0$, $|f_1'(p)| \leq C_2$. На практике $f_1(p)$ может учитывать возможный нелинейный перенос массы из других континуумов.

Перепишем (1.86) в следующем виде:

$$\begin{cases} \partial_t p = u, \\ k_{\bar{\alpha}} \partial_{0,t}^{\bar{\alpha}} u + k_{\bar{\beta}} \partial_{0,t}^{\bar{\beta}} u - \lambda \partial_{0,t}^{\bar{\gamma}} \nabla^2 u + u = f_1(p) + f_2(x, t). \end{cases}$$

Тогда соответствующая вариационная постановка задачи 1.11 формулируется следующим образом.

Задача 1.12. Найти пару $\{u, p\}: J \mapsto H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ такую, что для всех $w \in L^2(\Omega)$ и $v \in H_0^1(\Omega)$ справедливы тождества

$$(\partial_t p, w) = (u, w), \quad (1.89)$$

$$k_{\bar{\alpha}} (\partial_{0,t}^{\bar{\alpha}} u, v) + k_{\bar{\beta}} (\partial_{0,t}^{\bar{\beta}} u, v) + \lambda (\partial_{0,t}^{\bar{\gamma}} \nabla u, \nabla v) + (u, v) = (f_1(p), v) + (f_2, v), \quad (1.90)$$

где $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \in (0, 1)$.

1.4.2 Единственность решения и его непрерывная зависимость от входных данных

Теорема 1.9. Для решения задачи 1.12 справедливо неравенство

$$\|p\|^2 \leq C \left(\|p_0\|^2 + \int_0^t \|f_2\|^2 ds \right), \quad C > 0, \quad (1.91)$$

из которого следует единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных.

Доказательство. Выберем $(w, v) = (p, u)$ в тождествах (1.89) и (1.90):

$$(\partial_t p, p) = (u, p), \quad (1.92)$$

$$k_{\bar{\alpha}}(\partial_{0,t}^{\bar{\alpha}} u, u) + k_{\bar{\beta}}(\partial_{0,t}^{\bar{\beta}} u, u) + \lambda(\partial_{0,t}^{\bar{\gamma}} \nabla u, \nabla u) + (u, u) = (f_1(p), u) + (f_2, u). \quad (1.93)$$

Оценивая слагаемые в (1.92) и (1.93) с помощью неравенства Коши и леммы 1.1, легко получить, что

$$\frac{d}{dt} \|p\|^2 + k_{\bar{\alpha}} \partial_{0,t}^{\bar{\alpha}} \|u\|^2 + k_{\bar{\beta}} \partial_{0,t}^{\bar{\beta}} \|u\|^2 + \lambda \partial_{0,t}^{\bar{\gamma}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|^2 \leq C(\|f_2\|^2 + \|p\|^2) \quad (1.94)$$

Обозначим $\nu = \max\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}\}$, $\mu = \min\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}\}$ и рассмотрим два случая. Для первого случая, $\bar{\gamma} < \nu$, применим оператор дробного интегрирования (1.5) к обеим частям неравенства (1.94):

$$\begin{aligned} \partial_{0,t}^{1-\nu} \|p\|^2 + k_{\nu} \|u\|^2 + k_{\mu} \partial_{0,t}^{\mu-\nu} \|u\|^2 + \lambda \partial_{0,t}^{\bar{\gamma}-\nu} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ + \partial_{0,t}^{-\nu} \|u\|^2 \leq C \partial_{0,t}^{-\nu} (\|f_2\|^2 + \|p\|^2) \end{aligned} \quad (1.95)$$

По определению дробного интеграла третье, четвертое и пятое слагаемые в левой части (1.95) неотрицательны. Следовательно, из (1.95) следует, что

$$\frac{d}{dt} \|p\|^2 \leq C(\|f_2\|^2 + \|p\|^2) \quad (1.96)$$

Интегрируя (1.96) от 0 до t и применяя лемму 1.2, получим неравенство (1.91).

Аналогичные рассуждения для второго случая, $\bar{\gamma} > \nu$, приводят к неравенству

$$\begin{aligned} \partial_{0,t}^{1-\bar{\gamma}} \|p\|^2 + k_{\bar{\alpha}} \partial_{0,t}^{\bar{\alpha}-\bar{\gamma}} \|u\|^2 + k_{\bar{\beta}} \partial_{0,t}^{\bar{\beta}-\bar{\gamma}} \|u\|^2 + \\ + \lambda \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \partial_{0,t}^{-\bar{\gamma}} \|u\|^2 \leq C \partial_{0,t}^{-\bar{\gamma}} (\|f_2\|^2 + \|p\|^2) \end{aligned}$$

из которого также следует неравенство (1.91).

1.4.3 Постановка полудискретной схемы

Для построения численного метода введем сначала равномерное разбиение временного интервала \bar{J} точками $t_n = n\tau$, $\tau > 0$, $n = 0, 1, \dots, N$, такое, что $N\tau = T$. Пусть p^n – полудискретная аппроксимация функции p относительно времени в момент $t = t_n$.

Для построения полудискретной постановки задачи 1.11, используем аппроксимационную формулу дробной производной в смысле Капуто, определенную в лемме 1.3, а для аппроксимации целочисленной производной используем соотношения (1.19).

Определим полудискретную постановку задачи 1.11 следующим образом.

Задача 1.13. Пусть известны $\{(u^i, p^i)\}_{i=0}^{n-1}$, $(u^i, p^i) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ и, в частности, $p^0 = p_0(x)$ и $u^0 = u_0(x)$. Найти пару $(u^n, p^n) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ такую, что для всех $w \in L^2(\Omega)$ и $v \in H_0^1(\Omega)$:

при $n = 1$:

$$\left(\frac{p^1 - p^0}{\tau}, w \right) = (u^1, w), \quad (1.97)$$

$$k_{\bar{\alpha}}(\Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}} u^1, v) + k_{\bar{\beta}}(\Delta_{0,t}^{\bar{\beta}} u^1, v) + \lambda(\Delta_{0,t}^{\bar{\gamma}} \nabla u^1, \nabla v) + (u^1, v) = (f_1(p^0), v) + (f_2^1, v), \quad (1.98)$$

при $n \geq 2$:

$$\left(\frac{3p^n - 4p^{n-1} + p^{n-2}}{2\tau}, w \right) = (u^n, w), \quad (1.99)$$

$$\begin{aligned} k_{\bar{\alpha}}(\Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}} u^n, v) + k_{\bar{\beta}}(\Delta_{0,t}^{\bar{\beta}} u^n, v) + \lambda(\Delta_{0,t}^{\bar{\gamma}} \nabla u^n, \nabla v) + (u^n, v) = \\ = (2f_1(p^{n-1}) - f_1(p^{n-2}), v) + (f_2^n, v), \end{aligned} \quad (1.100)$$

где $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \in (0, 1)$.

1.4.4 Построение полностью дискретной схемы

В области $\bar{\Omega}$ введем квазиравномерную триангуляцию K_h с диаметром h . Определим пространства конечных элементов

$$\begin{aligned} V_h &= \{v_h \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \mid v_h|_e \in P_1(e), \forall e \in K_h\}, \\ W_h &= \{w_h \in L^2(\Omega) \mid w_h|_e \in P_0(e), \forall e \in K_h\}. \end{aligned}$$

Определим оператор проекции $Q_h: H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h$, удовлетворяющий условию

$$(\nabla(Q_h p - p), \nabla p_h) = 0 \quad \forall p \in H_0^1(\Omega), p_h \in V_h$$

и оператор L^2 -проекции $\Pi_h: L^2(\Omega) \rightarrow W_h$ такой, что

$$(\Pi_h p - p, p_h) = 0 \quad \forall p \in L^2(\Omega), p_h \in W_h.$$

Операторы проекции обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned}\|p - Q_h p\| + h\|p - Q_h p\|_{H^1(\Omega)} &\leq Ch^2\|p\|_{H^2(\Omega)}, \quad \forall p \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ \|\Pi_h p\| &\leq C\|p\|, \quad \forall p \in L^2(\Omega), \\ \|p - \Pi_h p\| &\leq Ch\|p\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall p \in H^1(\Omega).\end{aligned}$$

Определим следующую конечно-элементную процедуру.

Задача 1.14. Пусть известны $\{(u_h^i, p_h^i)\}_{i=0}^{n-1} \in V_h \times W_h$, в частности, p_h^0 и u_h^0 — L^2 -проекции функций p_0 и u_0 . Найти пару $(u_h^n, p_h^n) \in V_h \times W_h$ такую, что для всех $w_h \in W_h$ и $v_h \in V_h$:

при $n = 1$:

$$\left(\frac{p_h^1 - p_h^0}{\tau}, w_h \right) = (u_h^1, w_h), \quad (1.101)$$

$$\begin{aligned}k_{\bar{\alpha}}(\Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}} u_h^1, v_h) + k_{\bar{\beta}}(\Delta_{0,t}^{\bar{\beta}} u_h^1, v_h) + \lambda(\Delta_{0,t}^{\bar{\gamma}} \nabla u_h^1, \nabla v_h) + \\ + (u_h^1, v_h) = (f_1(p_h^0), v_h) + (f_2^1, v_h),\end{aligned} \quad (1.102)$$

при $n \geq 2$:

$$\left(\frac{3p_h^n - 4p_h^{n-1} + p_h^{n-2}}{2\tau}, w_h \right) = (u_h^n, w_h), \quad (1.103)$$

$$\begin{aligned}k_{\bar{\alpha}}(\Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}} u_h^n, v_h) + k_{\bar{\beta}}(\Delta_{0,t}^{\bar{\beta}} u_h^n, v_h) + \lambda(\Delta_{0,t}^{\bar{\gamma}} \nabla u_h^n, \nabla v_h) + (u_h^n, v_h) = \\ = (2f_1(p_h^{n-1}) - f_1(p_h^{n-2}), v_h) + (f_2^n, v_h),\end{aligned} \quad (1.104)$$

где $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \in (0, 1)$.

1.4.5 Устойчивость численной схемы

Докажем устойчивость построенного численного метода.

Теорема 1.10. Дискретная схема (1.101)–(1.104) безусловно устойчива по начальным данным и правой части уравнения при всех $\tau < 1/4$, и справедлива следующая оценка:

$$\|p_h^n\|^2 + 2\tau\|u_h^n\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C\left(\|f_2\|_{L^\infty(J; L^2(\Omega))}^2 + \|p_h^0\|^2 + \|u_h^0\|_{H^1(\Omega)}^2\right).$$

Доказательство. Для случая $n = 1$ выберем $w_h = p_h^1$ в (1.101) и $v_h = u_h^1$ в (1.103):

$$\begin{aligned}\left(\frac{p_h^1 - p_h^0}{\tau}, p_h^1 \right) = (u_h^1, p_h^1), \\ k_{\bar{\alpha}}(\Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}} u_h^1, u_h^1) + k_{\bar{\beta}}(\Delta_{0,t}^{\bar{\beta}} u_h^1, u_h^1) + \lambda(\Delta_{0,t}^{\bar{\gamma}} \nabla u_h^1, \nabla u_h^1) + (u_h^1, u_h^1) = (f_1(p_h^0), u_h^1) + (f_2^1, u_h^1).\end{aligned}$$

Используя леммы 1.5 и 1.6, получаем

$$\frac{1}{2\tau} \left(\|p_h^1\|^2 - \|p_h^0\|^2 + \|p_h^1 - p_h^0\|^2 \right) \leq \|u_h^1\| \|p_h^1\|, \quad (1.105)$$

$$\begin{aligned} & k_{\bar{\alpha}} \left(\Theta_1^{\bar{\alpha}} - \Theta_0^{\bar{\alpha}} - \frac{1}{2} \delta_{1,1}^{\bar{\alpha}} \|u_h^0\|^2 \right) + k_{\bar{\beta}} \left(\Theta_1^{\bar{\beta}} - \Theta_0^{\bar{\beta}} - \frac{1}{2} \delta_{1,1}^{\bar{\beta}} \|u_h^0\|^2 \right) + \\ & + \lambda \left(\Theta_1^{\bar{\gamma}} - \Theta_0^{\bar{\gamma}} - \frac{1}{2} \delta_{1,1}^{\bar{\gamma}} \|\nabla u_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \|u_h^1\|^2 \leq \mu \|p_h^0\| \|u_h^1\| + \|f_2^1\| \|u_h^1\|, \end{aligned} \quad (1.106)$$

где

$$\Theta_n = k_{\bar{\alpha}} \Theta_n^{\bar{\alpha}} + k_{\bar{\beta}} \Theta_n^{\bar{\beta}} + \lambda \Theta_n^{\bar{\gamma}}, \quad (1.107)$$

$$\Theta_n^{\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^{\nu} \|u_h^s\|^2, \quad \nu \in \{\bar{\alpha}, \bar{\beta}\}, \quad (1.108)$$

$$\Theta_n^{\bar{\gamma}} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^{\bar{\gamma}} \|\nabla u_h^s\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Объединив (1.105) и (1.106) и умножив полученное неравенство на 2τ , получим:

$$\begin{aligned} & \|p_h^1\|^2 + \|p_h^1 - p_h^0\|^2 + 2\tau \Theta_1 + 2\tau \|u_h^1\|^2 \leq 2\tau \mu \|p_h^0\| \|u_h^1\| + 2\tau \|f_2^1\| \|u_h^1\| + \|p_h^0\|^2 + 2\tau \|u_h^1\| \|p_h^1\| + \\ & + 2\tau \Theta_0 + \tau \left(k_{\bar{\alpha}} \delta_{1,1}^{\bar{\alpha}} + k_{\bar{\beta}} \delta_{1,1}^{\bar{\beta}} \right) \|u_h^0\|^2 + \tau \lambda \delta_{1,1}^{\bar{\gamma}} \|\nabla u_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Применяя неравенство Коши и ε -неравенство к слагаемым в правой части (1.109), получим, что для всех τ , удовлетворяющих условию $\tau < 1/2$:

$$\|p_h^1\|^2 + \|p_h^1 - p_h^0\|^2 + 2\tau \Theta_1 + \tau \|u_h^1\|^2 \leq C \tau \|f_2^1\| + \|p_h^0\|^2 + C \|u_h^0\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad (1.110)$$

где $C = T \max \{ k_{\bar{\alpha}} \delta_{1,1}^{\bar{\alpha}} + k_{\bar{\beta}} \delta_{1,1}^{\bar{\beta}}, \lambda \delta_{1,1}^{\bar{\gamma}} \}$.

Для $n \geq 2$ выберем $w_h = p_h^n$ в (1.102) и $v_h = u_h^n$ в (1.103):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3p_h^n - 4p_h^{n-1} + p_h^{n-2}}{2\tau}, p_h^n \right) = (u_h^n, p_h^n), \\ & k_{\bar{\alpha}} (\Delta_{0,i}^{\bar{\alpha}} u_h^n, u_h^n) + k_{\bar{\beta}} (\Delta_{0,i}^{\bar{\beta}} u_h^n, u_h^n) + \lambda (\Delta_{0,i}^{\bar{\gamma}} \nabla u_h^n, \nabla u_h^n) + (u_h^n, u_h^n) = \\ & = (2f_1(p_h^{n-1}) - f_1(p_h^{n-2}), u_h^n) + (f_2^n, u_h^n). \end{aligned}$$

Используя леммы 1.5 и 1.6, получим

$$\frac{1}{4\tau} \left(\|p_h^n\|^2 + \|2p_h^n - p_h^{n-1}\|^2 - \|p_h^{n-1}\|^2 - \right.$$

$$-\|2p_h^{n-1} - p_h^{n-2}\|^2 + \|p_h^n - 2p_h^{n-1} + p_h^{n-2}\|^2 \leq \|u_h^n\| \|p_h^n\|, \quad (1.111)$$

$$\begin{aligned} & k_{\alpha} \left(\Theta_n^{\bar{\alpha}} - \Theta_{n-1}^{\bar{\alpha}} - \frac{1}{2} \delta_{n,1}^{\bar{\alpha}} \|u_h^0\|^2 \right) + k_{\beta} \left(\Theta_n^{\bar{\beta}} - \Theta_{n-1}^{\bar{\beta}} - \frac{1}{2} \delta_{n,1}^{\bar{\beta}} \|u_h^0\|^2 \right) + \\ & + \lambda \left(\Theta_n^{\bar{\gamma}} - \Theta_{n-1}^{\bar{\gamma}} - \frac{1}{2} \delta_{n,1}^{\bar{\gamma}} \|\nabla u_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \|u_h^n\|^2 \leq \|2f_1(p_h^{n-1}) - f_1(p_h^{n-2})\| \|u_h^n\| + \|f_2\| \|u_h^n\|. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Объединяя неравенства (1.111) и (1.112) и умножая полученное неравенство на 4τ , получим

$$\begin{aligned} & \|p_h^n\|^2 + \|2p_h^n - p_h^{n-1}\|^2 + \|p_h^n - 2p_h^{n-1} + p_h^{n-2}\|^2 + 4\tau\Theta_n + 4\tau\|u_h^n\|^2 \leq \\ & \leq 4\tau\|2f_1(p_h^{n-1}) - f_1(p_h^{n-2})\| \|u_h^n\| + 4\tau\|f_2\| \|u_h^n\| + \\ & + \|p_h^{n-1}\|^2 + \|2p_h^{n-1} - p_h^{n-2}\|^2 + 4\tau\|u_h^n\| \|p_h^n\| + \\ & + 4\tau\Theta_{n-1} + 2\tau(k_{\alpha}\delta_{n,1}^{\bar{\alpha}} + k_{\beta}\delta_{n,1}^{\bar{\beta}}) \|u_h^0\|^2 + 2\tau\lambda\delta_{n,1}^{\bar{\gamma}} \|\nabla u_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Просуммируем последнее неравенство по n от 2 до n :

$$\begin{aligned} & \|p_h^n\|^2 + 4\tau\Theta_n + 4\tau\|u_h^n\|^2 \leq 4\tau\|2f_1(p_h^{n-1}) - f_1(p_h^{n-2})\| \|u_h^n\| + \\ & + 4\tau \sum_{i=2}^{n-1} \|2f_1(p_h^{i-1}) - f_1(p_h^{i-2})\| \|u_h^i\| + 4\tau\|f_2\| \|u_h^n\| + 4\tau \sum_{i=2}^{n-1} \|f_2^i\| \|u_h^i\| + \\ & + \|p_h^1\|^2 + \|2p_h^1 - p_h^0\|^2 + 4\tau\|u_h^n\| \|p_h^n\| + 4\tau \sum_{i=2}^{n-1} \|u_h^i\| \|p_h^i\| + \\ & + 4\tau\Theta_1 + 2\tau \sum_{i=2}^n (k_{\alpha}\delta_{i,1}^{\bar{\alpha}} + k_{\beta}\delta_{i,1}^{\bar{\beta}}) \|u_h^0\|^2 + 2\tau\lambda \sum_{i=2}^n \delta_{i,1}^{\bar{\gamma}} \|\nabla u_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши и ε -неравенство к первому слагаемому в правой части, получим, что для всех τ таких, что $\tau < 1/4$:

$$\begin{aligned} & \|p_h^n\|^2 + 4\tau\Theta_n + \tau\|u_h^n\|^2 \leq C\tau \sum_{i=0}^{n-1} \|p_h^i\|^2 + C\tau \sum_{i=2}^n \|f_2^i\|^2 + \\ & + C\tau \sum_{i=2}^{n-1} (\|u_h^i\|^2 + \|p_h^i\|^2) + \|p_h^1\|^2 + \|2p_h^1 - p_h^0\|^2 + \\ & + 4\tau\Theta_1 + 2\tau \sum_{i=2}^n (k_{\alpha}\delta_{i,1}^{\bar{\alpha}} + k_{\beta}\delta_{i,1}^{\bar{\beta}}) \|u_h^0\|^2 + 2\tau\lambda \sum_{i=2}^n \delta_{i,1}^{\bar{\gamma}} \|\nabla u_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Применяя лемму 1.7 к последнему неравенству, получим

$$\|p_h^n\|^2 + 4\tau\Theta_n + \tau\|u_h^n\|^2 \leq C \left(\tau \sum_{i=2}^n \|f_2^i\|^2 + \|p_h^1\|^2 + \|2p_h^1 - p_h^0\|^2 + \right.$$

$$+ 2\tau\Theta_1 + 2\tau \sum_{i=2}^n \left(k_{\alpha}^{-} \delta_{i,1}^{\bar{\alpha}} + k_{\beta}^{-} \delta_{i,1}^{\bar{\beta}} \right) \|u_h^0\|^2 + 2\tau\lambda \sum_{i=2}^n \delta_{i,1}^{\bar{\gamma}} \|\nabla u_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \Big). \quad (1.113)$$

Объединяя неравенства (1.110) и (1.113), приходим к утверждению теоремы.

1.4.6 Сходимость полудискретной схемы

Теорема 1.11. Пусть $\{(p^i, u^i)\}_{i=0}^N$, $(p^i, u^i) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ – решение задачи 1.13. Тогда для $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \in (0,1)$, для всех $(p^n, u^n) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ и $\tau < 1/4$ справедливы оценки

$$\|p(t_n) - p^n\| \leq C(\tau^{2-\bar{\alpha}} + \tau^{2-\bar{\beta}} + \tau^{2-\bar{\gamma}}), \quad (1.114)$$

$$\|u(t_n) - u^n\|_{H^1(\Omega)} \leq C\tau. \quad (1.115)$$

Доказательство. Обозначим $\sigma^n = u(t_n) - u^n$, $\pi^n = p(t_n) - p^n$. Рассматривая разность (1.97)–(1.98) и (1.99)–(1.100) из (1.89)–(1.90) при $t = t_n$ и выбирая $w = \pi^n$, $v = \sigma^n$, получим, что:

при $n = 1$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\pi^1 - \pi^0}{\tau}, \pi^1 \right) + \frac{\tau}{2} (\partial_t^2 p(\zeta_1), \pi^1) = (\sigma^1, \pi^1), \\ & k_{\alpha}^{-} (r_n^{\bar{\alpha}}, \sigma^1) + k_{\alpha}^{-} (\Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}} \sigma^1, \sigma^1) + k_{\beta}^{-} (r_n^{\bar{\beta}}, \sigma^1) + k_{\beta}^{-} (\Delta_{0,t}^{\bar{\beta}} \sigma^1, \sigma^1) + \\ & + \lambda (r_n^{\bar{\gamma}}, \nabla \sigma^1) + \lambda (\Delta_{0,t}^{\bar{\gamma}} \nabla \sigma^1, \nabla \sigma^1) + (\sigma^1, \sigma^1) = (f_1(p(t_0)) - f_1(p^0), \sigma^1), \end{aligned}$$

при $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3\pi^n - 4\pi^{n-1} + \pi^{n-2}}{2\tau}, \pi^n \right) + \frac{\tau^2}{3} (\partial_t^3 p(\zeta_n), \pi^n) = (\sigma^n, \pi^n), \\ & k_{\alpha}^{-} (r_n^{\bar{\alpha}}, \sigma^n) + k_{\alpha}^{-} (\Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}} \sigma^n, \sigma^n) + k_{\beta}^{-} (r_n^{\bar{\beta}}, \sigma^n) + k_{\beta}^{-} (\Delta_{0,t}^{\bar{\beta}} \sigma^n, \sigma^n) + \\ & + \lambda (r_n^{\bar{\gamma}}, \nabla \sigma^n) + \lambda (\Delta_{0,t}^{\bar{\gamma}} \nabla \sigma^n, \nabla \sigma^n) + (\sigma^n, \sigma^n) = \\ & = 2(f_1(p(t_{n-1})) - f_1(p^{n-1}), \sigma^n) - (f_1(p(t_{n-2})) - f_1(p^{n-2}), \sigma^n), \end{aligned}$$

где $t_{i-1} \leq \zeta_i \leq t_i$.

Используя лемму 1.5, имеем:

при $n = 1$:

$$\begin{aligned} & \|\pi^1\|^2 \leq 2\tau \|\sigma^1\| \|\pi^1\| + \tau^2 \|\partial_t^2 p(\zeta_1)\| \|\pi^1\|, \quad (1.116) \\ & \Theta_1 + \|\sigma^1\|^2 \leq \Theta_0 + k_{\alpha}^{-} \|r_1^{\bar{\alpha}}\| \|\sigma^1\| + k_{\beta}^{-} \|r_1^{\bar{\beta}}\| \|\sigma^1\| + \lambda \|r_1^{\bar{\gamma}}\| \|\nabla \sigma^1\|_{L^2(\Omega)} + C \|\pi^0\| \|\sigma^1\|, \end{aligned}$$

при $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} & \|\pi^n\|^2 + \|2\pi^n - \pi^{n-1}\|^2 - \|\pi^{n-1}\|^2 - \|2\pi^{n-1} - \pi^{n-2}\|^2 + \\ & + \|\pi^n - 2\pi^{n-1} + \pi^{n-2}\|^2 + \frac{4\tau^3}{3} \|\partial_t^3 p(\zeta_n)\| \|\pi^n\| \leq 4\tau \|\sigma^n\| \|\pi^n\|, \end{aligned} \quad (1.117)$$

$$\begin{aligned} & \Theta_n + \|\sigma^n\|^2 \leq \Theta_{n-1} + k_{\bar{\alpha}} \|r_n^{\bar{\alpha}}\| \|\sigma^n\| + \\ & + k_{\bar{\beta}} \|r_n^{\bar{\beta}}\| \|\sigma^n\| + \lambda \|r_n^{\bar{\gamma}}\| \|\nabla \sigma^n\|_{L^2(\Omega)} + C \|\pi^{n-1}\| \|\sigma^n\| + C \|\pi^{n-2}\| \|\sigma^n\|, \end{aligned} \quad (1.118)$$

где

$$\Theta_n = k_{\bar{\alpha}} \Theta_n^{\bar{\alpha}} + k_{\bar{\beta}} \Theta_n^{\bar{\beta}} + \lambda \Theta_n^{\bar{\gamma}},$$

$$\begin{aligned} \Theta_n^{\bar{\alpha}} &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^{\bar{\alpha}} \|\sigma^s\|^2, & r_n^{\bar{\alpha}} &= \partial_{0,t}^{\bar{\alpha}} u(t_n) - \Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}} u(t_n), \\ \Theta_n^{\bar{\beta}} &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^{\bar{\beta}} \|\sigma^s\|^2, & r_n^{\bar{\beta}} &= \partial_{0,t}^{\bar{\beta}} u(t_n) - \Delta_{0,t}^{\bar{\beta}} u(t_n), \\ \Theta_n^{\bar{\gamma}} &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^{\bar{\gamma}} \|\nabla \sigma^s\|_{L^2(\Omega)}^2, & r_n^{\bar{\gamma}} &= \partial_{0,t}^{\bar{\gamma}} \nabla u(t_n) - \Delta_{0,t}^{\bar{\gamma}} \nabla u(t_n). \end{aligned}$$

Складывая неравенства (1.117) и (1.118), умноженное на τ , получаем:

$$\begin{aligned} & \|\pi^n\|^2 + \|2\pi^n - \pi^{n-1}\|^2 + \|\pi^n - 2\pi^{n-1} + \pi^{n-2}\|^2 + \tau \Theta_n + \frac{\tau}{2} \|\sigma^n\|^2 \leq \\ & \leq \|\pi^{n-1}\|^2 + \|2\pi^{n-1} - \pi^{n-2}\|^2 + \tau \Theta_{n-1} + 2\tau \|\pi^n\|^2 + \\ & + C\tau \left(\|r_n^{\bar{\alpha}}\| + \|r_n^{\bar{\beta}}\| \right) \|\sigma^n\| + \lambda \tau \|r_n^{\bar{\gamma}}\| \|\nabla \sigma^n\|_{L^2(\Omega)} + \\ & + \frac{4\tau^3}{3} \|\partial_t^3 p(\zeta_n)\| \|\pi^n\| + C\tau \|\pi^{n-1}\|^2 + C\tau \|\pi^{n-2}\|^2. \end{aligned} \quad (1.119)$$

Просуммируем (1.119) относительно n от 2 до n :

$$\begin{aligned} & \|\pi^n\|^2 + \tau \Theta_n + \frac{\tau}{2} \sum_{i=2}^n \|\sigma^i\|^2 \leq 5\|\pi^1\|^2 + \tau \Theta_1 + \\ & + C\tau \|\pi^n\|^2 + C\tau \sum_{i=0}^{n-1} \|\pi^i\|^2 + \frac{\tau}{4} \left((k_{\bar{\alpha}} + k_{\bar{\beta}}) \|\sigma^n\|^2 + \lambda \|\nabla \sigma^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \\ & + \frac{\tau^2}{2} \sum_{i=2}^{n-1} \left((k_{\bar{\alpha}} + k_{\bar{\beta}}) \|\sigma^i\|^2 + \lambda \|\nabla \sigma^i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + C \left(\tau^{4-2\bar{\alpha}} + \tau^{4-2\bar{\beta}} + \tau^{4-2\bar{\gamma}} \right), \end{aligned}$$

и учитывая, что $\frac{1}{2} (k_{\bar{\alpha}} + k_{\bar{\beta}}) \|\sigma^i\|^2 + \frac{\lambda}{2} \|\nabla \sigma^i\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \Theta_i$, а также выбирая τ_1 так, чтобы выполнялось условие $1 - C\tau_1 > 0$, заключаем, что для всех $\tau < \tau_1$:

$$\begin{aligned} & \|\pi^n\|^2 + \tau\Theta_n + \tau\|\sigma^n\|^2 \leq 10\|\pi^1\|^2 + \\ & + 2\tau\Theta_1 + 6\tau \sum_{i=2}^{n-1} \|\pi^i\|^2 + 6\tau^2 \sum_{i=2}^{n-1} \Theta_i + C\left(\tau^{4-2\bar{\alpha}} + \tau^{4-2\bar{\beta}} + \tau^{4-2\bar{\gamma}}\right) \end{aligned}$$

Используя лемму 1.7, имеем

$$\|\pi^n\|^2 + \tau\Theta_n + \tau\|\sigma^n\|^2 \leq C\left(\|\pi^1\|^2 + \tau\Theta_1 + \tau^{4-2\bar{\alpha}} + \tau^{4-2\bar{\beta}} + \tau^{4-2\bar{\gamma}}\right). \quad (1.120)$$

Суммируя неравенства (1.116) и (1.118), умноженное на τ и применяя ε -неравенство, приходим к неравенству

$$\|\pi^1\|^2 + \tau\Theta_1 \leq C\left(\tau^4 + \tau^{5-2\bar{\alpha}} + \tau^{5-2\bar{\beta}} + \tau^{5-2\bar{\gamma}}\right) \quad (1.121)$$

Объединяя неравенства (1.120) и (1.121), получим

$$\|\pi^n\|^2 + \tau\Theta_n \leq C\left(\tau^{4-2\bar{\alpha}} + \tau^{4-2\bar{\beta}} + \tau^{4-2\bar{\gamma}}\right)$$

откуда следует неравенство (1.114).

Чтобы получить неравенство (1.115), получим из (1.119) следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \|\pi^n\|^2 + \tau\Theta_n + \frac{\tau}{2} \sum_{i=2}^n \|\sigma^i\|^2 \leq 5\|\pi^1\|^2 + \tau\Theta_1 + 3\tau\|\pi^n\|^2 + \\ & + 3\tau \sum_{i=0}^{n-1} \|\pi^i\|^2 + \frac{\tau}{4} \left((k_{\bar{\alpha}} + k_{\bar{\beta}}) \|\sigma^n\|^2 + \lambda \|\nabla \sigma^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \\ & + \frac{1}{2} \tau^{2-\max\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}\}} \sum_{i=2}^{n-1} \left((k_{\bar{\alpha}} + k_{\bar{\beta}}) \|\sigma^i\|^2 + \lambda \|\nabla \sigma^i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + C\left(\tau^{4-2\bar{\alpha}} + \tau^{4-2\bar{\beta}} + \tau^{4-2\bar{\gamma}}\right) \end{aligned}$$

Используя методику, примененную при получении неравенства (1.120), и применяя лемму Гронуолла, приходим к неравенству

$$\|\pi^n\|^2 + \tau\Theta_n + \tau\|\sigma^n\|^2 \leq C\left(\|\pi^1\|^2 + \tau\Theta_1 + \tau^{4-2\bar{\alpha}} + \tau^{4-2\bar{\beta}} + \tau^{4-2\bar{\gamma}}\right). \quad (1.122)$$

Кроме того, проводя аналогичные рассуждения для случая $n = 1$, получаем следующую оценку вместо (1.121):

$$\|\pi^1\|^2 + \tau\Theta_1 \leq C\tau^4. \quad (1.123)$$

Объединяя неравенства (1.122) и (1.123) и используя определение Θ_n , приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \|\mathcal{I}^n\|^2 + \sum_{s=1}^n \left(\frac{\tau^{1-\bar{\alpha}}}{2} \|\sigma^s\|^2 + \frac{\tau^{1-\bar{\beta}}}{2} \|\sigma^s\|^2 + \frac{\tau^{1-\bar{\gamma}}}{2} \|\nabla \sigma^s\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq \\ \leq C \left(\tau^{4-\bar{\alpha}} + \tau^{4-\bar{\beta}} + \tau^{4-\bar{\gamma}} \right) \end{aligned} \quad (1.124)$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства (1.124), получим неравенство

$$\tau^{1-\frac{1}{2}\max\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}\}} \left(\|\sigma^n\| + \|\nabla \sigma^n\|_{L^2(\Omega)} \right) \leq C \tau^{2-\frac{1}{2}\max\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}\}},$$

из которого следует неравенство (1.115).

1.4.7 Сходимость полностью дискретной схемы

Теорема 1.12. Пусть $\{(p_h^i, u_h^i)\}_{i=0}^N$, $p_h^i \in W_h$, $u_h^i \in V_h$ – решение задачи 1.14. Тогда для $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \in (0,1)$, для всех $(p_h^n, u_h^n) \in W_h \times V_h$ и достаточно малых τ справедливы неравенства

$$\|p(t_n) - p_h^n\| \leq C \left(h^2 + \tau^{1/2} h^2 + \tau^{2-\bar{\alpha}} + \tau^{2-\bar{\beta}} + \tau^{2-\bar{\gamma}} \right), \quad (1.125)$$

$$\|u(t_n) - u_h^n\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\tau + \tau^{-1} h^2 \right). \quad (1.126)$$

Доказательство. Обозначим

$$\begin{aligned} p^n - p_h^n &= (p^n - \Pi_h p^n) + (\Pi_h p^n - p_h^n) = \psi_p^n + \xi_p^n, \\ u^n - u_h^n &= (u^n - Q_h u^n) + (Q_h u^n - u_h^n) = \psi_u^n + \xi_u^n. \end{aligned}$$

Рассмотрим разность тождеств (1.97)–(1.100) и (1.101)–(1.104): при $n=1$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\xi_p^1 - \xi_p^0}{\tau}, w_h \right) &= (\psi_u^1 + \xi_u^1, w_h), \\ k_{\bar{\alpha}} \left(\Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}} (\psi_u^1 + \xi_u^1), v_h \right) &+ k_{\bar{\beta}} \left(\Delta_{0,t}^{\bar{\beta}} (\psi_u^1 + \xi_u^1), v_h \right) + \\ + \lambda \left(\Delta_{0,t}^{\bar{\gamma}} \nabla \xi_u^1, \nabla v_h \right) &+ (\psi_u^1 + \xi_u^1, v_h) = (f_1(p^0) - f_1(p_h^0), \sigma^1), \end{aligned} \quad (1.127)$$

при $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3\xi_p^n - 4\xi_p^{n-1} + \xi_p^{n-2}}{2\tau}, w_h \right) &= (\psi_u^n + \xi_u^n, w_h), \\ k_{\bar{\alpha}} \left(\Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}} (\psi_u^n + \xi_u^n), v_h \right) &+ k_{\bar{\beta}} \left(\Delta_{0,t}^{\bar{\beta}} (\psi_u^n + \xi_u^n), v_h \right) + \\ + \lambda \left(\Delta_{0,t}^{\bar{\gamma}} \nabla \xi_u^n, \nabla v_h \right) &+ (\psi_u^n + \xi_u^n, v_h) = \end{aligned} \quad (1.128)$$

$$= 2(f_1(p^{n-1}) - f_1(p_h^{n-1}), v_h) - (f_1(p^{n-2}) - f_1(p_h^{n-2}), v_h). \quad (1.129)$$

Выберем $(w_h, v_h) = (\xi_p^n, \xi_u^n)$ в (1.128), (1.129) и сложим полученные тождества, умноженные на 4τ :

$$\begin{aligned} & \|\xi_p^n\|^2 + \|2\xi_p^n - \xi_p^{n-1}\|^2 - \|\xi_p^{n-1}\|^2 - \|2\xi_p^{n-1} - \xi_p^{n-2}\|^2 + \\ & \quad + \|\xi_p^n - 2\xi_p^{n-1} + \xi_p^{n-2}\|^2 + 4\tau\|\xi_u^n\|^2 + \\ & \quad + 4\tau\left[k_{\alpha}^{\bar{\alpha}}(\Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}}\xi_u^n, \xi_u^n) + k_{\beta}^{\bar{\beta}}(\Delta_{0,t}^{\bar{\beta}}\xi_u^n, \xi_u^n) + \lambda(\Delta_{0,t}^{\bar{\gamma}}\nabla\xi_u^n, \nabla\xi_u^n)\right] + \\ & \quad + 4\tau k_{\alpha}^{\bar{\alpha}}(\Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}}\psi_u^n, \xi_u^n) + 4\tau k_{\beta}^{\bar{\beta}}(\Delta_{0,t}^{\bar{\beta}}\psi_u^n, \xi_u^n) + 4\tau\left[(\psi_u^n, \xi_u^n) - (\psi_u^n, \xi_p^n) - (\xi_u^n, \xi_p^n)\right] \leq \\ & \leq C\tau\|\psi_p^{n-1} + \xi_p^{n-1}\|\|\xi_u^n\| + C\tau\|\psi_p^{n-2} + \xi_p^{n-2}\|\|\xi_u^n\|. \end{aligned} \quad (1.130)$$

Применяя лемму 1.6, получим:

$$\begin{aligned} & 4\tau k_{\alpha}^{\bar{\alpha}}(\Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}}\xi_u^n, \xi_u^n) + 4\tau k_{\beta}^{\bar{\beta}}(\Delta_{0,t}^{\bar{\beta}}\xi_u^n, \xi_u^n) + 4\tau\lambda(\Delta_{0,t}^{\bar{\gamma}}\nabla\xi_u^n, \nabla\xi_u^n) \geq \\ & \geq 4\tau(\Theta_n - \Theta_{n-1}) - 2\tau\left[k_{\alpha}^{\bar{\alpha}}\delta_{n,1}^{\bar{\alpha}}\|\xi_u^0\|^2 + \right. \\ & \quad \left. + k_{\beta}^{\bar{\beta}}\delta_{n,1}^{\bar{\beta}}\|\xi_u^0\|^2 + \lambda\delta_{n,1}^{\bar{\gamma}}\|\nabla\xi_u^0\|_{L^2(\Omega)}^2\right], \end{aligned} \quad (1.131)$$

где $\Theta_n = k_{\alpha}^{\bar{\alpha}}\Theta_n^{\bar{\alpha}} + k_{\beta}^{\bar{\beta}}\Theta_n^{\bar{\beta}} + \lambda\Theta_n^{\bar{\gamma}}$ и

$$\Theta_n^{\bar{\nu}} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^{\bar{\nu}}\|\xi_u^s\|^2, \quad \bar{\nu} \in \{\bar{\alpha}, \bar{\beta}\}, \quad \Theta_n^{\bar{\gamma}} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^{\bar{\gamma}}\|\nabla\xi_u^s\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Далее, из (1.130) следует, что

$$\begin{aligned} & 4\tau k_{\alpha}^{\bar{\alpha}}(\Delta_{0,t}^{\bar{\alpha}}\psi_u^n, \xi_u^n) + 4\tau k_{\beta}^{\bar{\beta}}(\Delta_{0,t}^{\bar{\beta}}\psi_u^n, \xi_u^n) \leq \\ & \leq 4\tau\left[\left(\frac{k_{\alpha}^{\bar{\alpha}}T^{1-\bar{\alpha}}}{\Gamma(2-\bar{\alpha})}\right)^2 + \left(\frac{k_{\beta}^{\bar{\beta}}T^{1-\bar{\beta}}}{\Gamma(2-\bar{\beta})}\right)^2\right]\max_{1 \leq s \leq n}\|\partial_t\psi_u(\zeta_s)\|^2 + \tau\|\xi_u^n\|^2. \end{aligned}$$

Чтобы оценить остальные слагаемые в левой части (1.130), используем неравенство Коши и ε -неравенство:

$$\begin{aligned} & 4\tau(\psi_u^n, \xi_u^n) - 4\tau(\psi_u^n, \xi_p^n) - 4\tau(\xi_u^n, \xi_p^n) \leq \\ & \leq C\tau h^2\|\xi_u^n\| + C\tau h^2\|\xi_p^n\| + \tau\|\xi_u^n\|^2 + C\tau\|\xi_p^n\|^2. \end{aligned} \quad (1.132)$$

Затем, учитывая неравенства (1.131)–(1.132), мы получим из (1.130) что

$$\begin{aligned} & \|\xi_p^n\|^2 + \|2\xi_p^n - \xi_p^{n-1}\|^2 + 4\tau\Theta_n \leq \|\xi_p^{n-1}\|^2 + \|2\xi_p^{n-1} - \xi_p^{n-2}\|^2 + \\ & + 4\tau\Theta_{n-1} + C\tau h^2 \|\xi_u^n\| + C\tau h^2 \|\xi_p^n\| + C\tau \|\xi_p^n\|^2 + C\tau \|\xi_p^{n-1}\|^2 + C\tau \|\xi_p^{n-2}\|^2 + C\tau h^4. \end{aligned} \quad (1.133)$$

Просуммируем неравенство (1.133) по n от 2 до n , применим неравенство Коши и ε -неравенство и заметим, что $\|\xi_u^i\|^2 \leq 2\Theta_i$. Тогда

$$\begin{aligned} (1-C\tau)\|\xi_p^n\|^2 + (4-C\tau)\tau\Theta_n & \leq 5\|\xi_p^1\|^2 + 4\tau\Theta_1 + \\ & + C\tau^2 \sum_{i=2}^{n-1} \|\xi_u^i\|^2 + C\tau \sum_{i=2}^{n-1} \|\xi_p^i\|^2 + Ch^4 + C\tau h^4. \end{aligned}$$

Таким образом, для достаточно малых τ , применяя лемму 1.7, получим

$$\|\xi_p^n\|^2 + \tau\Theta_n \leq C\left(\|\xi_p^1\|^2 + \tau\Theta_1 + h^4 + \tau h^4\right). \quad (1.134)$$

Проводя аналогичные рассуждения к (1.127), (1.129), что и при получении неравенства (1.134), приходим к неравенству

$$\|\xi_p^1\|^2 + \tau\Theta_1 \leq C(h^4 + \tau h^4) \quad (1.135)$$

Комбинируя (1.134) и (1.135), мы получим

$$\|\xi_p^n\|^2 + \tau\Theta_n \leq C(h^4 + \tau h^4) \quad (1.136)$$

Принимая во внимание результаты теоремы 1.11, приходим к неравенству (1.125). Наконец, объединяя неравенство (1.136) с оценкой (1.115) в теореме 1.11, получаем неравенство

$$\|u(t_n) - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\tau^{-1}h^2 + \tau^{-1/2}h^2 + \tau),$$

откуда следует неравенство (1.126). Теорема доказана.

1.4.8 Верификация порядка сходимости на основе вычислительных экспериментов

Для проверки теоретических оценок сходимости, полученных в теореме 1.12 для полностью дискретной схемы (1.101)–(1.104), проведен ряд вычислительных экспериментов на примере модельной задачи для уравнения, описывающего течение жидкости в трещиновато-пористых средах.

Цель вычислительных экспериментов состоит в определении зависимости фактического порядка сходимости от порядков дробных производных и его сравнении с теоретическим порядком сходимости, полученным в теореме 1.12 в

случае $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \in (0,1)$. Для удобства введем обозначения $\alpha = \bar{\alpha} + 1$, $\beta = \bar{\beta} + 1$, $\gamma = \bar{\gamma} + 1$.

Пример 1.3. В $Q_T = \bar{\Omega} \times \bar{J}$, где $\Omega = (0,1)^2$, $J = (0,1]$, рассмотрим дифференциального уравнения дробного порядка

$$\begin{aligned} \partial_t p + \partial_{0,t}^\alpha p + \partial_{0,t}^\beta p - \partial_{0,t}^\gamma \nabla^2 p = p^2 - \frac{12t^3 t^{-\gamma} (x_1^2 - x_1 + x_2^2 - x_2)}{\Gamma(2-\gamma)(\gamma^2 - 5\gamma + 6)} + \\ + \frac{6t^{3-\alpha} x_1 x_2 (1-x_1)(1-x_2)}{\Gamma(2-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)} + \frac{6t^{3-\beta} x_1 x_2 (1-x_1)(1-x_2)}{\Gamma(2-\beta)(2-\beta)(3-\beta)} - \\ - t^6 x_1^2 x_2^2 (1-x_1)^2 (1-x_2)^2 + 3t^2 x_1 x_2 (1-x_1)(1-x_2), \quad (x,t) \in \Omega \times J, \end{aligned}$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} p(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \\ p(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in J, \end{aligned}$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in (1,2)$, $x = (x_1, x_2)$. Точное решение задачи: $p(x,t) = t^3 x_1 x_2 (1-x_1)(1-x_2)$.

Предполагая, что $h = C\tau$ для некоторого положительного действительного числа C , из теоремы 1.12 следуют следующие порядки сходимости по временному шагу:

$$E_N^1 \equiv \max_{n \in \{0,1,\dots,N\}} \|p(t_n) - p_h^n\| = O(\tau^{3-\nu}), \quad (1.137)$$

$$E_N^2 \equiv \max_{n \in \{0,1,\dots,N\}} \|u(t_n) - u_h^n\|_{H^1(\Omega)} = O(\tau), \quad (1.138)$$

где $\nu = \max\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Аналогичные рассуждения справедливы для порядков пространственной сходимости в случае, когда $\tau = C_1 h$, $C_1 > 0$. Поэтому рассмотрен набор временных шагов в диапазоне от $\tau_1 = 1/7$ до $\tau_7 = 1/448$, показанный в первом столбце таблиц 1.4 и 1.5. Затем для каждого τ_i сгенерирована триангуляция $\bar{\Omega}$ с диаметром h_i такая, что $|h_i - \tau_i| < 5 \times 10^{-4}$. Для каждого τ_i , $N_i = 1/\tau_i$, $i \geq 1$ рассчитаны соответствующие погрешности $E_{N_i}^1$ и $E_{N_i}^2$ и порядки сходимости по формуле

$$R_i^m = \frac{\log E_{N_i}^m - \log E_{N_{i-1}}^m}{\log \tau_i - \log \tau_{i-1}}, \quad m = 1,2, \quad i \geq 2. \quad (1.139)$$

В экспериментах использовалось несколько комбинаций порядков дробной производной α , β и γ из набора $\{1.1, 1.5, 1.9\}$, а значения α и β для простоты приняты равными. Результаты расчета показаны, соответственно, в таблицах 1.4 и 1.5. В столбце «Порядок» в скобках указаны теоретические порядки сходимости. Соответствующие графики погрешностей показаны на

рисунках 1.4 и 1.5.

Таблица 1.4 – L^2 -погрешности, $E_{N_i}^1$, $i \geq 1$, рассчитанные по формуле (1.137), а также порядки сходимости, R_i^1 , $i \geq 2$, рассчитанные по формуле (1.139) для различных значений $\tau_i \approx h_i$, $N_i = 1/\tau_i$. В скобках указан теоретический порядок сходимости

$\tau \approx h$	$\alpha = \beta = 1.1$		$\alpha = \beta = 1.5$		$\alpha = \beta = 1.9$	
	L^2 -погрешность	Порядок	L^2 -погрешность	Порядок	L^2 -погрешность	Порядок
$\gamma = 1.1$						
1/7	7.1923×10^{-4}	-	8.4733×10^{-4}	-	1.4621×10^{-3}	-
1/14	1.8335×10^{-4}	1.97 (≈ 1.90)	2.4162×10^{-4}	1.81 (≈ 1.50)	5.6768×10^{-4}	1.36 (≈ 1.10)
1/28	4.7978×10^{-5}	1.93 (≈ 1.90)	6.9894×10^{-5}	1.79 (≈ 1.50)	2.2887×10^{-4}	1.31 (≈ 1.10)
1/56	1.2550×10^{-5}	1.93 (≈ 1.90)	2.0544×10^{-5}	1.77 (≈ 1.50)	9.6903×10^{-5}	1.24 (≈ 1.10)
1/112	3.2735×10^{-6}	1.94 (≈ 1.90)	6.1861×10^{-6}	1.73 (≈ 1.50)	4.3006×10^{-5}	1.17 (≈ 1.10)
1/224	8.5643×10^{-7}	1.93 (≈ 1.90)	1.9090×10^{-6}	1.70 (≈ 1.50)	1.9399×10^{-5}	1.15 (≈ 1.10)
1/448	2.2434×10^{-7}	1.93 (≈ 1.90)	6.0342×10^{-7}	1.66 (≈ 1.50)	8.8776×10^{-6}	1.13 (≈ 1.10)
$\gamma = 1.5$						
1/7	1.8809×10^{-3}	-	2.0215×10^{-3}	-	2.5844×10^{-3}	-
1/14	6.5152×10^{-4}	1.53 (≈ 1.50)	6.9763×10^{-4}	1.53 (≈ 1.50)	9.6132×10^{-4}	1.43 (≈ 1.10)
1/28	2.2333×10^{-4}	1.54 (≈ 1.50)	3.892×10^{-4}	1.55 (≈ 1.50)	3.6367×10^{-4}	1.40 (≈ 1.10)
1/56	7.7119×10^{-5}	1.53 (≈ 1.50)	8.2526×10^{-5}	1.53 (≈ 1.50)	1.4199×10^{-4}	1.36 (≈ 1.10)
1/112	2.7128×10^{-5}	1.51 (≈ 1.50)	2.9060×10^{-5}	1.51 (≈ 1.50)	5.7823×10^{-5}	1.30 (≈ 1.10)
1/224	9.5040×10^{-6}	1.51 (≈ 1.50)	1.0187×10^{-5}	1.51 (≈ 1.50)	2.3874×10^{-5}	1.28 (≈ 1.10)
1/448	3.3411×10^{-6}	1.51 (≈ 1.50)	3.5833×10^{-6}	1.51 (≈ 1.50)	1.0074×10^{-5}	1.24 (≈ 1.10)
$\gamma = 1.9$						
1/7	6.3612×10^{-3}	-	6.3824×10^{-3}	-	6.7604×10^{-3}	-
1/14	2.7133×10^{-3}	1.23 (≈ 1.10)	2.7023×10^{-3}	1.24 (≈ 1.10)	2.8581×10^{-3}	1.24 (≈ 1.10)
1/28	1.1950×10^{-3}	1.18 (≈ 1.10)	1.1844×10^{-3}	1.19 (≈ 1.10)	1.2537×10^{-3}	1.19 (≈ 1.10)
1/56	5.4010×10^{-4}	1.15 (≈ 1.10)	5.3351×10^{-4}	1.15 (≈ 1.10)	5.6562×10^{-4}	1.15 (≈ 1.10)
1/112	2.5186×10^{-4}	1.10 (≈ 1.10)	2.4818×10^{-4}	1.10 (≈ 1.10)	2.6363×10^{-4}	1.10 (≈ 1.10)
1/224	1.1655×10^{-4}	1.11 (≈ 1.10)	1.1463×10^{-4}	1.11 (≈ 1.10)	1.2194×10^{-4}	1.11 (≈ 1.10)
1/448	5.4151×10^{-5}	1.11 (≈ 1.10)	5.3182×10^{-5}	1.11 (≈ 1.10)	5.6646×10^{-5}	1.11 (≈ 1.10)

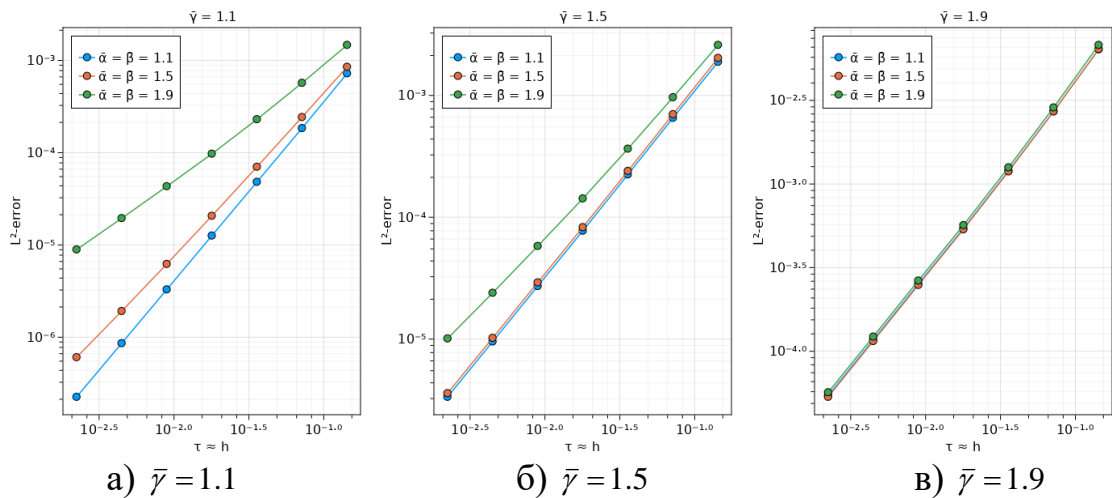


Рисунок 1.4 – Графики погрешностей для E_N^1 , рассчитанные по формуле (1.137) относительно $\tau \approx h$, полученные для различных порядков дробных производных: $\alpha \in \{1.1, 1.5, 1.9\}$; $\beta = \alpha$

Таблица 1.5 - H^1 -погрешности, $E_{N_i}^2$, $i \geq 1$, рассчитанные по формуле (1.138), а также порядки сходимости, R_i^2 , $i \geq 2$, рассчитанные по формуле (1.139) для различных значений $\tau_i \approx h_i$, $N_i = 1/\tau_i$. В скобках указан теоретический порядок сходимости

$\tau \approx h$	$\alpha = \beta = 1.1$		$\alpha = \beta = 1.5$		$\alpha = \beta = 1.9$	
	H^1 - погрешность	Порядок	H^1 - погрешность	Порядок	H^1 - погрешность	Порядок
$\gamma = 1.1$						
1/7	9.2985×10^{-2}	-	9.3026×10^{-2}	-	9.3255×10^{-2}	-
1/14	4.1026×10^{-2}	1.18 (≈ 1.00)	4.1034×10^{-2}	1.18 (≈ 1.00)	4.1122×10^{-2}	1.18 (≈ 1.00)
1/28	1.9187×10^{-2}	1.10 (≈ 1.00)	1.9189×10^{-2}	1.10 (≈ 1.00)	1.9223×10^{-2}	1.10 (≈ 1.00)
1/56	9.2678×10^{-3}	1.05 (≈ 1.00)	9.2681×10^{-3}	1.05 (≈ 1.00)	9.2818×10^{-3}	1.05 (≈ 1.00)
1/112	4.6342×10^{-3}	1.00 (≈ 1.00)	4.6342×10^{-3}	1.00 (≈ 1.00)	4.6398×10^{-3}	1.00 (≈ 1.00)
1/224	2.2968×10^{-3}	1.01 (≈ 1.00)	2.2968×10^{-3}	1.01 (≈ 1.00)	2.2992×10^{-3}	1.01 (≈ 1.00)
1/448	1.1434×10^{-3}	1.01 (≈ 1.00)	1.1434×10^{-3}	1.01 (≈ 1.00)	1.1444×10^{-3}	1.01 (≈ 1.00)
$\gamma = 1.5$						
1/7	9.3673×10^{-2}	-	9.3833×10^{-2}	-	9.4468×10^{-2}	-
1/14	4.1217×10^{-2}	1.18 (≈ 1.00)	4.1258×10^{-2}	1.19 (≈ 1.00)	4.1506×10^{-2}	1.19 (≈ 1.00)
1/28	1.9238×10^{-2}	1.10 (≈ 1.00)	1.9248×10^{-2}	1.10 (≈ 1.00)	1.9342×10^{-2}	1.10 (≈ 1.00)
1/56	9.2809×10^{-3}	1.05 (≈ 1.00)	9.2836×10^{-3}	1.05 (≈ 1.00)	9.3187×10^{-3}	1.05 (≈ 1.00)
1/112	4.6375×10^{-3}	1.00 (≈ 1.00)	4.6382×10^{-3}	1.00 (≈ 1.00)	4.6512×10^{-3}	1.00 (≈ 1.00)
1/224	2.2977×10^{-3}	1.01 (≈ 1.00)	2.2978×10^{-3}	1.01 (≈ 1.00)	2.3028×10^{-3}	1.01 (≈ 1.00)
1/448	1.1436×10^{-3}	1.01 (≈ 1.00)	1.1436×10^{-3}	1.01 (≈ 1.00)	1.1455×10^{-3}	1.01 (≈ 1.00)
$\gamma = 1.9$						
1/7	1.0462×10^{-1}	-	1.0487×10^{-1}	-	1.0654×10^{-1}	-
1/14	4.6312×10^{-2}	1.18 (≈ 1.00)	4.6339×10^{-2}	1.18 (≈ 1.00)	4.7081×10^{-2}	1.18 (≈ 1.00)
1/28	2.1550×10^{-2}	1.10 (≈ 1.00)	2.1536×10^{-2}	1.11 (≈ 1.00)	2.1869×10^{-2}	1.11 (≈ 1.00)
1/56	1.0314×10^{-2}	1.06 (≈ 1.00)	1.0301×10^{-2}	1.06 (≈ 1.00)	1.0451×10^{-2}	1.07 (≈ 1.00)
1/112	5.0944×10^{-3}	1.02 (≈ 1.00)	5.0861×10^{-3}	1.02 (≈ 1.00)	5.1542×10^{-3}	1.02 (≈ 1.00)
1/224	2.4989×10^{-3}	1.03 (≈ 1.00)	2.4945×10^{-3}	1.03 (≈ 1.00)	2.5251×10^{-3}	1.03 (≈ 1.00)
1/448	1.2319×10^{-3}	1.02 (≈ 1.00)	1.2297×10^{-3}	1.02 (≈ 1.00)	1.2434×10^{-3}	1.02 (≈ 1.00)

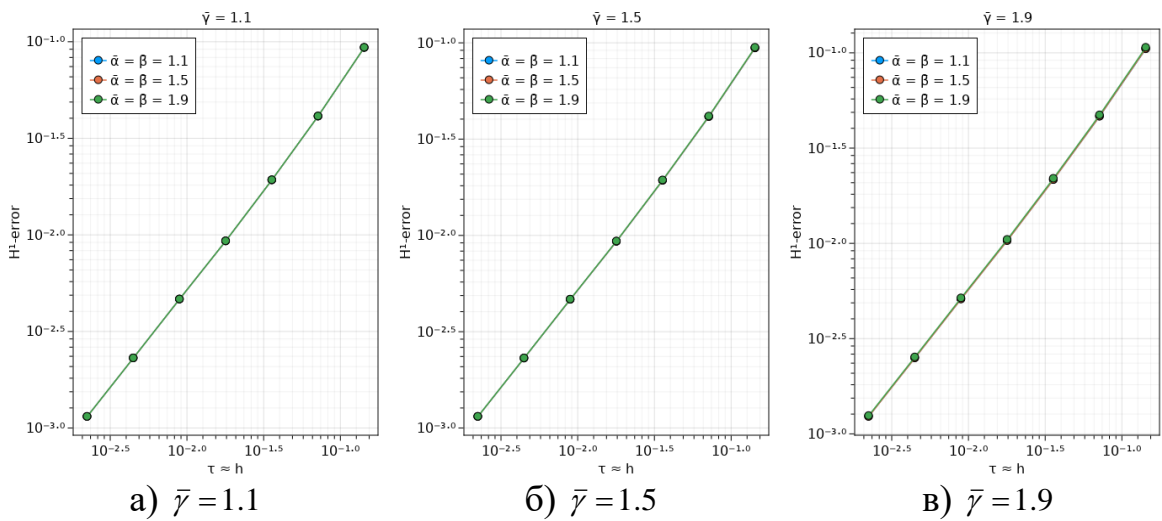


Рисунок 1.5 – Графики погрешностей для E_N^2 , рассчитанные по формуле (1.138) относительно $\tau \approx h$, полученные для различных порядков дробных производных: $\alpha \in \{1.1, 1.5, 1.9\}$; $\beta = \alpha$

Из таблицы 1.4 следует, что порядок сходимости существенно зависит от порядков дробных производных. А именно, эмпирический порядок сходимости E_N^1 был около 1,90 в случае $\alpha = \beta = \gamma = 1.1$, и он значительно уменьшается с увеличением порядка дробных производных. Порядок сходимости был близок к 1,10, когда любое из α, β или γ было равно 1,90. Такое поведение подтверждает теоретический порядок $O(t^{3-\nu})$, $\nu = \max\{\alpha, \beta, \gamma\}$, спрогнозированный в теореме 1.12.

Аналогично, результаты, представленные в таблице 1.5, демонстрируют, что эмпирический порядок сходимости E_N^2 приближается к 1,00 по мере уменьшения параметра дискретизации. Таким образом, можно сделать вывод, что численные результаты, проведенные для примера 1.3, полностью подтверждают теоретически спрогнозированный порядок сходимости, полученный в теореме 1.12.

1.5 Применение предлагаемого метода к исследованию течения жидкости в трещиновато-пористой среде

В данном подразделе исследуется применение предложенного численного метода (1.23), (1.24) к решению более реалистичного примера – задачи течения нефти в трещиновато-пористой среде. Для простоты рассматривается случай, когда влиянием изменения пористости на процесс течения жидкости можно пренебречь, т. е. $\phi = \text{const}$ [24]. Кроме того, константа μ в предположении 1.2 выбрана равной $\mu = \frac{k}{\tilde{\mu}}$. Ограничимся случаем $\bar{\beta} \in (-1, 0)$.

В этом случае уравнение (1.9) приводится к виду

$$\phi c_{f1} \partial_t p + \phi c_{f\bar{\beta}} \partial_{0,t}^{\bar{\beta}+1} p - \frac{k}{\tilde{\mu}} \partial_{0,t}^{\gamma} p_{xx} = \bar{f}, \quad x \in \Omega \equiv (0, l_0), \quad t > 0. \quad (1.140)$$

Дополним уравнение (1.140) начальным условием $p(x, 0) = p_0(x)$, $x \in \bar{\Omega}$ и однородными граничными условиями, что соответствует случаю, когда две добывающие скважины размещены на концах отрезка $\bar{\Omega}$. Выберем правую часть \bar{f} в виде

$$\bar{f} = \frac{2\pi k H}{\tilde{\mu} \ln r} (p_{bh} - p) \delta(x - x_0),$$

где p_{bh} – заданное значение давления, H – толщина пласта, $p_{bh} > p$, $x_0 \in \Omega$, $\delta(x)$ – дельта-функция, а значение r определяется радиусом скважины. Введем безразмерные параметры

$$\bar{t} = \frac{t}{\lambda}, \lambda = \frac{k_0(p_{bh} - p_0)}{\phi \mu_0 l_0^2}, \bar{x} = \frac{x}{l_0}, \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0},$$

$$\bar{\mu} = \frac{\tilde{\mu}}{\mu_0}, \bar{p} = \frac{p - p_0}{p_{bh} - p_0}, \bar{k} = \frac{k}{k_0}.$$

Используя тот факт, что

$$\partial_{0,\bar{t}}^\gamma p(\bar{t}) = \lambda^\gamma \partial_{0,t}^\gamma p(t),$$

уравнение (1.140) приводится к виду

$$\bar{c}_{f1} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \bar{c}_{f\bar{\beta}} \partial_{0,\bar{t}}^{\bar{\beta}+1} \bar{p} - \frac{\bar{k} \lambda^\gamma}{\bar{\mu}} \partial_{0,\bar{t}}^\gamma \bar{p}_{xx} = c_0 \bar{f}, \quad x \in \Omega_1 \equiv (0,1), \quad \bar{t} > 0, \quad (1.141)$$

где $\bar{c}_{f1} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{p}}$, $\bar{c}_{f\bar{\beta}} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial (\partial_{0,\bar{t}}^{\bar{\beta}} \bar{p})}$, $\bar{c}_0 = \frac{\mu_0 l_0^2}{k_0(p_{bh} - p_c)}$ и дополняется начальными и граничными условиями

$$\bar{p}(x,0) = \bar{p}_0(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \bar{\Omega}_1, \quad (1.142)$$

$$\bar{p}(0,\bar{t}) = \bar{p}(1,\bar{t}) = 0, \quad \bar{t} > 0. \quad (1.143)$$

Далее, используя уравнения (1.1) и (1.2) и классическое уравнение состояния $\rho = \rho(p)$, получим следующее классическое уравнение фильтрации, описывающее течение жидкости в сплошной пористой среде:

$$\bar{c}_{f1} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} - \frac{\bar{k}}{\bar{\mu}} \bar{p}_{xx} = c_0 \bar{f}. \quad (1.144)$$

Цель численных экспериментов состояла в сравнении решений уравнений (1.141) и (1.144) с учетом начальных и граничных условий (1.142), (1.143) для проверки модели фильтрации в трещиноватой пористой среде (1.9). Численные тесты проводились при следующих значениях безразмерных параметров: $\bar{p}_{bh} = 1$, $\bar{p}_0(x) = 0$, $\bar{k} = 2 \cdot 10^{-6}$, $\bar{\mu} = 0.0895$, $\bar{c}_{f1} = 0.0019$, $\bar{c}_{f\bar{\beta}} = 4 \cdot 10^{-6}$. Результаты численных тестов представлены на рисунке 1.6.

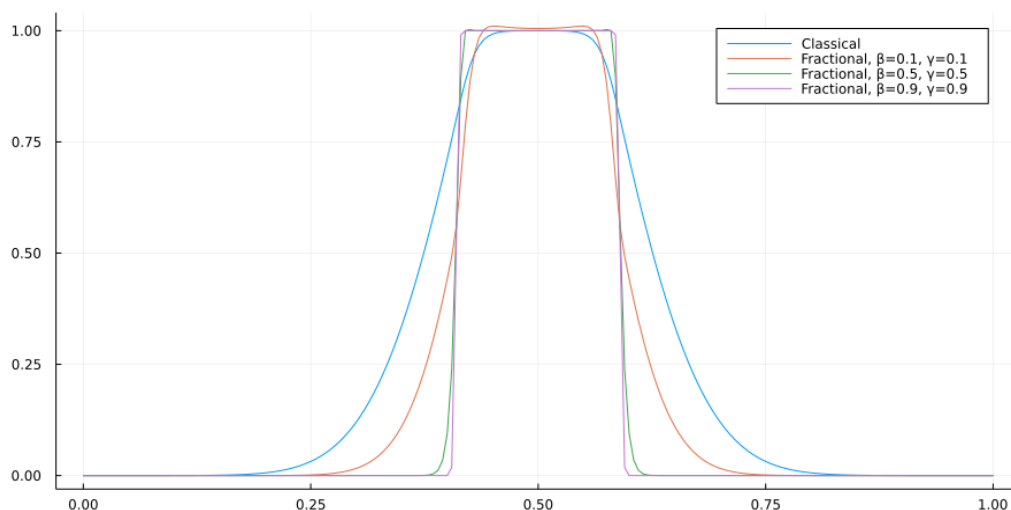


Рисунок 1.6 – Результат сравнения классической модели фильтрации с дробно-дифференциальной моделью фильтрации (1.9) для различных порядков дробных производных при $\bar{t} = 0.5$

Напомним, что закон движения (1.7) подходит для описания процесса течения жидкости в трещиновато-пористых средах с равномерно распределенными по объему трещинами [24]. На рисунке 1.6 показано замедление процесса течения жидкости, и хорошо видно, что увеличение порядков дробной производной приводит к большему замедлению. Такое поведение подтверждает тот факт, что пористая среда оказывает тормозящее влияние на процесс течения, а порядки дробных производных определяют степень влияния памяти на поведение течения.

1.6 Выводы по первому разделу

Таким образом, проведя теоретический анализ численных методов для решения задачи 1.1 в нескольких частных случаях, и проанализировав результаты вычислительных экспериментов, можно сделать следующие выводы:

1) На основании теорем 1.1, 1.5 и 1.9 можно сделать вывод, что решение задачи 1.1 во всех рассмотренных частных случаях единственно и непрерывно зависит от входных данных.

2) Вычислительные методы, построенные в подразделах 1.2.4 и 1.3.4, позволяют получить приближенное решение задачи 1.1 во всех рассмотренных частных случаях со вторым порядком точности в пространственном направлении и с порядком $(2-\nu)$ по временной переменной, где $\nu \in (0,1)$ – наибольший из порядков дробной производной. Результаты вычислительных экспериментов, проведенных для различных порядков дробных производных и конфигураций сеток, полностью подтверждают результаты теоретического анализа.

3) Вычислительный метод, построенный в подразделе 1.4.4 на основе введения замены переменных u , позволяет получить приближенное решение

задачи 1.11 с порядком точности $O(h^2 + h^2\tau^{1/2} + \tau^{3-\bar{\alpha}} + \tau^{3-\bar{\beta}} + \tau^{3-\bar{\gamma}})$, а для промежуточной переменной u порядок сходимости равен $O(\tau + \tau^{-1}h^2)$. Результаты вычислительных экспериментов, проведенных для различных порядков дробных производных и конфигураций сеток, полностью подтверждают результаты теоретического анализа.

4) На основании результатов численных тестов, представленных в разделе 1.5, можно сделать вывод, что рассматриваемая модель воспроизводит характерные особенности процесса течения жидкости в трещиновато-пористой среде. В частности, численный эксперимент, проведенный в рамках исследуемой модели, показал, что процесс течения жидкости в трещиновато-пористой среде протекает медленнее, чем в сплошной среде. Это наблюдение также согласуется с выводами статьи [26].

2 ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИИ С ПЕРЕХОДНЫМ ЗАКОНОМ ФИЛЬТРАЦИИ

Закон Дарси (1.2), на основе которого поставлена дробно-дифференциальная задача 1.1, описывает прямую взаимосвязь между градиентом давления и скоростью потока. Однако во многих реальных приложениях может происходить нарушение закона Дарси, и поток жидкости через пористую среду проявляет так называемый переходный (нестационарный) режим [93, 95, 135]. Примером таких течений является течение в горизонтальной скважине, пробуренной в плотном и трещиноватом сланцевом пласте.

В данном разделе диссертационной работы рассматривается начально-краевая задача для дробно-дифференциального обобщения уравнения фильтрации с переходным (нестационарным) законом фильтрации. Для решения задачи построен вычислительный метод повышенного порядка $O(\tau^{4-\alpha} + h^{k+1})$, $\alpha \in (0,1)$ на основе аппроксимационной формулы дробной производной повышенного порядка $O(\tau^{4-\alpha})$ и техники подшаговой схемы. Кроме того, в отличие от задачи, рассмотренной в разделе 1, данное уравнение является нелинейным, поэтому для его линеаризации построен итерационный метод Ньютона. Исследована сходимость итерационного процесса и найдены достаточные условия его квадратичной сходимости.

2.1 Постановка задачи

В классической теории фильтрации переходный поток жидкости через пористую среду описывается следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных [93, 95, 135]:

$$\frac{\mu}{k} \bar{u} + \nabla p = 0, \quad (2.1)$$

$$S \partial_t p + \nabla \cdot \bar{u} = q(x, t, p), \quad (2.2)$$

где k – абсолютная проницаемость пласта, μ – вязкость жидкости, S – коэффициент упругой ёмкости пласта, p – давление, \bar{u} – скорость фильтрации. Предположим, что правую часть уравнения (2.2) можно представить в виде

$$q(x, t, p) = \varphi(p) + f(x, t),$$

где $\varphi(p)$ учитывает возможный нелинейный массовый перенос из других континуумов.

Подставляя \bar{u} из (2.1) в уравнение (2.2) и формально заменяя временную производную дробной производной в смысле Капуто (1.4), получим следующее дробно-дифференциальное обобщение задачи фильтрации с переходным законом фильтрации.

Задача 2.1. В области $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times \bar{J}$, где $\Omega \subset R^2$, $J = (0, T]$, найти p , удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} \partial_{0,t}^\alpha p - \lambda \nabla^2 p = \varphi(p) + f(x, t), & x \in \Omega, \quad t \in J, \\ p(x, 0) = p_0(x), & x \in \bar{\Omega}, \\ p(0, t) = p(1, t) = 0, & t \in J, \end{cases}$$

где $\alpha \in (0; 1)$, λ – некоторая положительная постоянная.

2.2 Исследование единственности решения и непрерывной зависимости от входных данных. Построение и исследование численного метода решения задачи

2.2.1 Слабая вариационная постановка задачи

Определим слабую вариационную постановку задачи 2.1.

Задача 2.2. Найти $p \in H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$, такое что для любого $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$(\partial_{0,t}^\alpha p, v) + (\lambda \nabla p, \nabla v) = (\varphi(p), v) + (f, v), \quad (2.3)$$

$$p(x, 0) = p_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (2.4)$$

где $\alpha \in (0; 1)$.

Определим следующие предположения.

Предположение 2.1. Существует решение задачи 2.1, имеющее количество производных, необходимое для проведения анализа.

Предположение 2.2. Существуют конечное положительное действительное число λ_* , такое что для всех $x \in R$ выполняются условия $0 < \lambda_* \leq \lambda(x)$.

Предположение 2.3. Для функции $\varphi(p)$ выполнены условия

- а) Существует постоянная c_1 , такая что $|\varphi(p)| \leq c_1 |p|$;
- б) Существует постоянная c_2 , такая что $|\varphi(p_1) - \varphi(p_2)| \leq c_2 |p_1 - p_2|$;
- в) $|\varphi'(p)| \leq \varphi^{**}$.
- г) φ' – Липшиц непрерывна, т.е. $\exists L_{\varphi'} > 0$:

$$|\varphi'(p_1) - \varphi'(p_2)| \leq L_{\varphi'} |p_1 - p_2|.$$

2.2.2 Единственность решения и его непрерывная зависимость от входных данных

Докажем следующий результат.

Теорема 2.1. Для решения задачи 2.1 выполняется следующее неравенство:

$$\|p\|^2 + \lambda \partial_{0,t}^{-\alpha} \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\|p_0\|^2 + \partial_{0,t}^{-\alpha} \|f\|^2 \right), \quad C > 0, \quad (2.5)$$

из которого следует единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных.

Доказательство. Выберем $v = p$ в (2.3):

$$(\partial_{0,t}^\alpha p, p) + (\lambda \nabla p, \nabla p) = (\varphi(p), p) + (f, p). \quad (2.6)$$

Оценивая условия в (2.6), применяя неравенство Коши и лемму 1.1, легко получить, что

$$\partial_{0,t}^\alpha \|p\|^2 + \lambda \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C (\|f\|^2 + \|p\|^2) \quad (2.7)$$

В силу неравенства $\|p\|^2 \leq \frac{1}{2} \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2$ получим

$$\partial_{0,t}^\alpha \|p\|^2 + \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|f\|^2. \quad (2.8)$$

Применяя оператор дробного интегрирования (1.5) к обеим частям (2.7), получим оценку (2.5).

2.2.3 Построение полудискретной схемы

Для построения численного метода введем равномерное разбиение временного отрезка \bar{J} точками $t_n = n\tau$, $\tau > 0$, $n = 0, 1, \dots, N$, такое, что $N\tau = T$. Обозначим через p^n полудискретную аппроксимацию функции p относительно времени в точке $t = t_n$.

В отличие от аппроксимационной формулы порядка $O(\tau^{2-\alpha})$, использованной при построении численных методов в разделе 1, будем использовать следующую аппроксимационную формулу дробной производной в смысле Капуто повышенного порядка $O(\tau^{4-\alpha})$ из работы [76].

Лемма 2.1 [76]. Дискретный аналог $\Delta_{0,t}^\alpha p(t_n)$ дробной производной в смысле Капуто $\partial_{0,t}^\alpha p(t_n)$ порядка $0 < \alpha < 1$ можно представить в виде

$$\Delta_{0,t}^\alpha p^n = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^n g_{n,s} p^{n-s}, \quad (2.9)$$

где коэффициенты $g_{n,s}$ определяются в виде

$$\begin{cases} g_{n,0} = a_0, \\ g_{n,1} = -a_0, \end{cases} \quad n = 1,$$

$$\begin{cases} g_{n,0} = a_0 + b_0, \\ g_{n,1} = a_1 - a_0 - 2b_0, \\ g_{n,2} = b_0 - a_1, \end{cases} \quad n = 2,$$

$$\begin{cases} g_{n,0} = w_{1,0}, \\ g_{n,1} = w_{2,0} + a_1 + b_1, \\ g_{n,2} = w_{3,0} + a_2 - a_1 - 2b_1, \\ g_{n,3} = w_{4,0} - a_2 + b_1, \end{cases} \quad n = 3,$$

$$\begin{cases} g_{n,0} = w_{1,0}, \\ g_{n,1} = w_{1,1} + w_{2,0}, \\ g_{n,2} = w_{2,1} + w_{3,0} + a_2 + b_2, \\ g_{n,3} = w_{3,1} + w_{4,0} + a_3 - a_2 - 2b_2, \\ g_{n,4} = w_{4,1} - a_3 + b_2, \end{cases} \quad n = 4,$$

$$\begin{cases} g_{n,0} = w_{1,0}, \\ g_{n,1} = w_{1,1} + w_{2,0}, \\ g_{n,2} = w_{1,2} + w_{2,1} + w_{3,0}, \\ g_{n,3} = w_{2,2} + w_{3,1} + w_{4,0} + a_3 + b_3, \\ g_{n,4} = w_{3,2} + w_{4,1} + a_4 - a_3 - 2b_3, \\ g_{n,5} = w_{4,2} - a_4 + b_3, \end{cases} \quad n = 5,$$

$$\begin{cases} g_{n,0} = w_{1,0}, \\ g_{n,1} = w_{1,1} + w_{2,0}, \\ g_{n,2} = w_{1,2} + w_{2,1} + w_{3,0}, \\ g_{n,s} = w_{1,s} + w_{2,s-1} + w_{3,s-2} + w_{4,s-3} \quad (3 \leq s \leq n-3), \\ g_{n,n-2} = a_{n-2} + b_{n-2} + w_{2,n-3} + w_{3,n-4} + w_{4,n-5}, \\ g_{n,n-1} = w_{3,n-3} + w_{4,n-4} + a_{n-1} - a_{n-2} - 2b_{n-2}, \\ g_{n,n} = w_{4,n-3} - a_{n-1} + b_{n-2}, \end{cases} \quad n \geq 6,$$

В КОТОРЫХ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ a_k , b_k , $w_{k,n-s}$ ОПРЕДЕЛЯЮТСЯ СООТНОШЕНИЯМИ

$$\begin{aligned} a_n &= (n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}, \\ b_n &= \frac{(n+1)^{2-\alpha} - n^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \frac{(n+1)^{1-\alpha} + n^{1-\alpha}}{2}, \\ w_{1,n-s} &= \frac{1}{6} \left[2(n-s+1)^{1-\alpha} - 11(n-s)^{1-\alpha} \right] - \frac{1}{2-\alpha} \left[2(n-s)^{2-\alpha} - (n-s+1)^{2-\alpha} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{(2-\alpha)(3-\alpha)} \left[(n-s)^{3-\alpha} - (n-s+1)^{3-\alpha} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{2,n-s} &= \frac{1}{2} [6(n-s)^{1-\alpha} + (n-s+1)^{1-\alpha}] + \frac{1}{2-\alpha} [5(n-s)^{2-\alpha} - 2(n-s+1)^{2-\alpha}] + \\
&\quad + \frac{3}{(2-\alpha)(3-\alpha)} [(n-s)^{3-\alpha} - (n-s+1)^{3-\alpha}] \\
w_{3,n-s} &= -\frac{1}{2} [3(n-s)^{1-\alpha} + 2(n-s+1)^{1-\alpha}] - \frac{1}{2-\alpha} [4(n-s)^{2-\alpha} - (n-s+1)^{2-\alpha}] - \\
&\quad - \frac{3}{(2-\alpha)(3-\alpha)} [(n-s)^{3-\alpha} - (n-s+1)^{3-\alpha}] \\
w_{4,n-s} &= \frac{1}{6} [2(n-s)^{1-\alpha} + 2(n-s+1)^{1-\alpha}] + \frac{1}{2-\alpha} (n-s)^{2-\alpha} + \\
&\quad + \frac{3}{(2-\alpha)(3-\alpha)} [(n-s)^{3-\alpha} - (n-s+1)^{3-\alpha}] \quad 3 \leq s \leq n,
\end{aligned}$$

причем для величины $r_n^\alpha = \partial_{0,t}^\alpha p(t_n) - \Delta_{0,t}^\alpha p(t_n)$ справедливы оценки

$$|r_1^\alpha| \leq c_1 \max_{t_0 \leq t \leq t_1} |p''| \tau^{2-\alpha}, \quad c_1 > 0, \quad (2.10)$$

$$|r_2^\alpha| \leq c_2 \max_{t_0 \leq t \leq t_2} |p'''| \tau^{3-\alpha}, \quad c_2 > 0, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}
|r_n^\alpha| &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{2\alpha}{3} \max_{t_0 \leq t \leq t_2} |p'''(t)| (t_n - t_2)^{-\alpha-1} \tau^4 + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{12} + \frac{3\alpha^2}{2(1-\alpha)(2-\alpha)} \right) \max_{t_0 \leq t \leq t_n} |p^{(4)}(t)| \tau^{4-\alpha} \right], \quad n \geq 3.
\end{aligned} \quad (2.12)$$

Коэффициенты $g_{n,s}$ имеют следующие свойства:

- а) $g_{n,0} > 0$, $g_{n,2} > 0$;
- б) $g_{n,s} < 0$, $s \geq 1$, $s \neq 2$;
- в) $\sum_{i=0}^n g_{n,i} = 0$.

Определим полудискретную постановку задачи:

Задача 2.3. Пусть известны $\{p^i\}_{i=0}^{n-1}$, $p^i \in H_0^1(\Omega)$, в частности, $p^0 = p_0(x)$. Найти $p^n \in H_0^1(\Omega)$ такое, что для всех $v \in H_0^1(\Omega)$ справедливо тождество:

$$(\Delta_{0,t}^\alpha p^n, v) + (\lambda \nabla p^n, \nabla v) = (\varphi(p^n), v) + (f, v), \quad (2.13)$$

где $\alpha \in (0,1)$.

2.2.4 Построение полностью дискретной схемы

Пусть K_h – квазиравномерная триангуляция на $\bar{\Omega}$. Для $l \in N$ обозначим через $P_l(e)$ пространство многочленов степени не выше l на $e \in K_h$.

Определим дискретное пространство $V_h \subset H_0^1(\Omega)$:

$$V_h = \{v_h \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \mid v_h|_e \in P_1(e), \forall e \in K_h\}$$

Задача 2.4. Пусть известны $\{p_h^i\}_{i=0}^{n-1}$, $p_h^i \in V_h$, в частности p_h^0 – L^2 -проекция функции p_0 . Найти $p_h^n \in V_h$, $n=1,2,\dots,N$, удовлетворяющее следующим тождествам для любого $v_h \in V_h$:

$$(\Delta_{0,t}^\alpha p_h^n, v_h) + (\lambda \nabla p_h^n, \nabla v_h) = (\varphi(p_h^n), v_h) + (f, v_h) \quad (2.14)$$

где $\alpha \in (0,1)$.

Тождество (2.14) является нелинейным. Для его линеаризации будем использовать метод Ньютона. Для этого определенная выше конечно-элементная процедура повторяется для итерационного параметра $i=1,2,\dots$. Обозначим значение функции p_h^n на i -ой итерации через $p_h^{n,i}$. Составим следующий итерационный метод.

Задача 2.5. Пусть известны $p_h^j \in V_h$, $j=0,1,\dots,n-1$, в частности p_h^0 – L^2 -проекция функции p_0 . Пусть, кроме того, известны $p_h^{n,k} \in V_h$, $k=0,1,\dots,i-1$, и, в частности, $p_h^{n,0} = p_h^{n-1}$. Найти $p_h^{n,i} \in V_h$, $i=1,2,\dots$, удовлетворяющее следующему тождеству для всех $v_h \in V_h$:

$$\begin{aligned} & \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(g_{n,0}^\alpha(p_h^{n,i}, v_h) + \sum_{s=1}^n g_{n,s}^\alpha(p_h^{n-s}, v_h) \right) + (\lambda \nabla p_h^{n,i}, \nabla v_h) = \\ & = \left(\varphi(p_h^{n,i-1}) + \frac{d\varphi}{dp}(p_h^{n,i-1})(p_h^{n,i} - p_h^{n,i-1}), v_h \right) + (f, v_h), \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $\alpha \in (0,1)$.

2.2.5 Устойчивость численной схемы

При получении основных результатов будет неоднократно использоваться следующая известная лемма.

Лемма 2.2. Пусть для неотрицательных последовательностей $\{y_n\}$, $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ выполняются неравенства

$$y_n \leq f_n + \sum_{k=0}^{n-1} g_k y_k.$$

Тогда справедливо неравенство

$$y_n \leq f_n + \sum_{k=0}^{n-1} f_k g_k \exp\left(\sum_{j=k+1}^{n-1} g_j\right).$$

Докажем следующую теорему об устойчивости построенного метода.

Теорема 2.2. При выполнении предположения 2.3 (а) дискретная задача 2.4 устойчива при достаточно малых $\tau > 0$, и справедлива следующая оценка:

$$\|p_h^n\|^2 + \frac{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}{g_{n,0}^\alpha} \|\nabla p_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\|p_h^0\|^2 + \|f\|^2 \right). \quad (2.16)$$

Доказательство. В (2.14) выберем $v_h = p_h^n$, отделим слагаемое, соответствующее $s = 0$, и умножим обе части тождества на $\frac{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}{g_{n,0}^\alpha}$:

$$\begin{aligned} (p_h^n, p_h^n) + \frac{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}{g_{n,0}^\alpha} (\lambda \nabla p_h^n, \nabla p_h^n) = & -\frac{1}{g_{n,0}^\alpha} \sum_{s=1}^n g_{n,s}^\alpha (p_h^{n-s}, p_h^n) + \\ & + \frac{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}{g_{n,0}^\alpha} \left[(\varphi(p_h^n), p_h^n) + (f, p_h^n) \right] \end{aligned}$$

Применим неравенство Коши-Буняковского и ε -неравенство в правой части, учитывая предположение 2.3 (а), получим:

$$\begin{aligned} \|p_h^n\|^2 + \frac{\Gamma(2-\alpha)\lambda\tau^\alpha}{g_{n,0}^\alpha} \|\nabla p_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq & \frac{1}{4\varepsilon g_{n,0}^\alpha} \sum_{s=1}^n |g_{n,s}^\alpha| \|p_h^{n-s}\|^2 + \\ & + \frac{\varepsilon}{g_{n,0}^\alpha} \|p_h^n\|^2 \sum_{s=0}^n |g_{n,s}^\alpha| + C\tau^\alpha \|p_h^n\|^2 + C\tau^\alpha \left(\frac{1}{4\varepsilon} \|f\|^2 + \varepsilon \|p_h^n\|^2 \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Учитывая, свойства коэффициентов $g_{n,s}$ в лемме 2.1, нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^n |g_{n,s}^\alpha| &= g_{n,0}^\alpha - g_{n,1}^\alpha + g_{n,2}^\alpha - g_{n,3}^\alpha - \dots - g_{n,n}^\alpha = \\ &= -\sum_{s=0}^n g_{n,s}^\alpha + 2(g_{n,0}^\alpha + g_{n,2}^\alpha), \end{aligned}$$

откуда с учетом свойства в) коэффициентов $g_{n,s}$ из леммы 2.1 получим следующее полезное соотношение:

$$\sum_{s=0}^n |g_{n,s}^\alpha| = 2(g_{n,0}^\alpha + g_{n,2}^\alpha) \quad (2.18)$$

Поэтому из (2.17) следует, что

$$\|p_h^n\|^2 + \frac{\Gamma(2-\alpha)\lambda\tau^\alpha}{g_{n,0}^\alpha} \|\nabla p_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{4\varepsilon g_{n,0}^\alpha} \sum_{s=1}^n |g_{n,s}^\alpha| \|p_h^{n-s}\|^2 +$$

$$+ \frac{2\varepsilon(g_{n,0}^\alpha + g_{n,2}^\alpha)}{g_{n,0}^\alpha} \|p_h^n\|^2 + C\tau^\alpha \|p_h^n\|^2 + C\tau^\alpha \left(\frac{1}{4\varepsilon} \|f\|^2 + \varepsilon \|p_h^n\|^2 \right).$$

Выберем $\varepsilon = \frac{g_{n,0}^\alpha}{4(g_{n,0}^\alpha + g_{n,2}^\alpha)}$ и заметим, что

$$\sum_{s=1}^n |g_{n,s}^\alpha| \|p_h^{n-s}\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |g_{n,n-k}^\alpha| \|p_h^k\|^2.$$

Тогда при достаточно малом τ получим

$$\|p_h^n\|^2 + \frac{\Gamma(2-\alpha)\lambda\tau^\alpha}{g_{n,0}^\alpha} \|\nabla p_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{g_{n,0}^\alpha + g_{n,2}^\alpha}{(g_{n,0}^\alpha)^2} \sum_{k=0}^{n-1} |g_{n,n-k}^\alpha| \|p_h^{n-s}\|^2 + C\tau^\alpha \|f\|^2.$$

Применим лемму 2.2 к данному неравенству, получим

$$\begin{aligned} & \|p_h^n\|^2 + \frac{\Gamma(2-\alpha)\lambda\tau^\alpha}{g_{n,0}^\alpha} \|\nabla p_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|p_h^0\|^2 + C\tau^\alpha \|f\|^2 + \\ & + \sum_{k=0}^{n-1} \|p_h^0\|^2 \cdot \frac{g_{n,0}^\alpha + g_{n,2}^\alpha}{(g_{n,0}^\alpha)^2} |g_{n,n-k}^\alpha| \exp\left(\sum_{j=k+1}^{n-1} \frac{(g_{n,0}^\alpha + g_{n,2}^\alpha)}{(g_{n,0}^\alpha)^2} |g_{n,n-j}^\alpha| \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{j=k+1}^{n-1} \frac{(g_{n,0}^\alpha + g_{n,2}^\alpha)}{(g_{n,0}^\alpha)^2} |g_{n,n-j}^\alpha| = \frac{g_{n,0}^\alpha + g_{n,2}^\alpha}{(g_{n,0}^\alpha)^2} \sum_{s=1}^{n-k-1} |g_{n,s}^\alpha| \leq \\ & \leq \frac{g_{n,0}^\alpha + g_{n,2}^\alpha}{(g_{n,0}^\alpha)^2} \sum_{s=0}^n |g_{n,s}^\alpha| = \frac{g_{n,0}^\alpha + g_{n,2}^\alpha}{(g_{n,0}^\alpha)^2} \cdot 2(g_{n,0}^\alpha + g_{n,2}^\alpha) = 2 \left(\frac{g_{n,0}^\alpha + g_{n,2}^\alpha}{g_{n,0}^\alpha} \right)^2, \end{aligned}$$

поэтому из (2.19) получим неравенство (2.16).

2.2.6 Сходимость полудискретной схемы

Введем оператор проекции $Q_h: H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h$, удовлетворяющий условию

$$(\nabla(Q_h p - p), \nabla p_h) = 0 \quad \forall p \in H_0^1(\Omega), p_h \in V_h, \quad (2.20)$$

который имеет следующее свойство:

$$\|p - Q_h p\| + h \|p - Q_h p\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{k+1} \|p\|_{H^{k+1}(\Omega)} \quad (2.21)$$

для всех $p \in H_0^1(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega)$. Пусть

$$p(t_n) - p_h^n = (p(t_n) - Q_h p^n) + (Q_h p^n - p_h^n) = \psi^n + \xi^n. \quad (2.22)$$

Чтобы достичь глобального порядка сходимости $O(\tau^{4-\alpha} + h^{k+1})$, используем технику подшаговой схемы [125] на интервалах $(0, t_1)$ и (t_1, t_2) . Пусть l_1 и l_2 – наименьшие целые числа, такие что $l_1 \geq \frac{1}{\tau}$, $l_2 \geq \tau^{\frac{2-\alpha}{6-\alpha}}$. Введем соответствующие длины подшагов:

$$\tau_1 = \frac{\tau}{l_1}, \quad \tau_2 = \frac{\tau}{l_2}.$$

Лемма 2.3. Пусть p^n – решение задачи 2.3, а p – решение задачи 2.2. Тогда существует $\tau_0 > 0$, такое что при выполнении предположений 2.1, 2.2, 2.3, при всех $\tau \leq \tau_0$ выполняется неравенство

$$\|p(t_n) - p^n\|^2 + \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{n,0}^\alpha} \|\nabla(p(t_n) - p^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \tau^{8-2\alpha}, \quad (2.23)$$

где C – константа, зависящая от норм решения, но не зависящая от параметров сетки.

Доказательство. Рассмотрим разность тождеств (2.3) и (2.13):

$$(\partial_{0,t}^\alpha p(t_n) - \Delta_{0,t}^\alpha p^n, v) + (\lambda(\nabla p(t_n) - \nabla p^n), \nabla v) = (\varphi(p(t_n)) - \varphi(p^n), v). \quad (2.24)$$

Обозначим $\pi^n = p(t_n) - p^n$ и заметим, что

$$\partial_{0,t}^\alpha p(t_n) - \Delta_{0,t}^\alpha p^n = \Delta_{0,t}^\alpha \pi^n + r_n^\alpha,$$

где $r_n^\alpha = \partial_{0,t}^\alpha p(t_n) - \Delta_{0,t}^\alpha p(t_n)$. Выбирая $v = \pi^n$ в (2.24), и учитывая предположения 2.2 и 2.3, получим

$$(\Delta_{0,t}^\alpha \pi^n, \pi^n) + \lambda \|\nabla \pi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c_2 \|\pi^n\|^2 + (r_n^\alpha, \pi^n)$$

Используя соотношение (2.9), перепишем это неравенство в виде

$$\begin{aligned} & \frac{g_{n,0}^\alpha \tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \|\pi^n\|^2 + \lambda \|\nabla \pi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq -\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^n g_{n,s}^\alpha (\pi^{n-s}, \pi^n) + c_2 \|\pi^n\|^2 + (r_n^\alpha, \pi^n). \end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши к первому и третьему слагаемым в правой части данного неравенства, затем используя соотношение (2.18), и умножая полученное неравенство на $\frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{n,0}^\alpha}$, заключаем, что

$$\begin{aligned} & \|\pi^n\|^2 + \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha) \lambda}{g_{n,0}^\alpha} \|\nabla \pi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq \frac{1}{4\varepsilon_1 g_{n,0}^\alpha} \sum_{s=1}^n |g_{n,s}^\alpha| \|\pi^{n-s}\|_0^2 + \frac{2\varepsilon_1}{g_{n,0}^\alpha} (g_{n,0}^\alpha + g_{n,2}^\alpha) \|\pi^n\|^2 + \\ & + \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{4g_{n,0}^\alpha \varepsilon_2} \|r_n^\alpha\|^2 + \frac{\varepsilon_2 \tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{n,0}^\alpha} \|\pi^n\|^2 + \frac{c_2 \tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{n,0}^\alpha} \|\pi^n\|^2. \end{aligned}$$

Выберем ε_1 и ε_2 равными

$$\varepsilon_1 = \frac{g_{n,0}^\alpha}{8(g_{n,0}^\alpha + g_{n,2}^\alpha)}, \quad \varepsilon_2 = \frac{g_{n,0}^\alpha}{4\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}.$$

Тогда при достаточно малом τ получим

$$\|\pi^n\|^2 + \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{n,0}^\alpha} \|\nabla \pi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{s=1}^n |g_{n,s}^\alpha| \|\pi^{n-s}\|^2 + C \tau^{2\alpha} \|r_n^\alpha\|^2. \quad (2.25)$$

Рассматривая схему (2.13) в случае $n=1$ с подшагом τ_1 , мы приходим к неравенству, аналогичному (2.25):

$$\|\pi^1\|^2 + \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{1,0}^\alpha} \|\nabla \pi^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C |g_{1,1}^\alpha| \|\pi^0\|^2 + C \tau_1^{2\alpha} \|r_1^\alpha\|^2, \quad (2.26)$$

где первое слагаемое в правой части равно нулю в силу $\pi^0 = 0$. Учитывая, что $r_1^\alpha = O(\tau_1^{2-\alpha})$ и $\tau_1 = \frac{\tau}{l_1} \leq \frac{\tau}{\left(\frac{\alpha-2}{\tau^{\frac{4-\alpha}{2}}}\right)} = \tau^{\frac{4-\alpha}{2}}$, получим

$$\|\pi^1\|^2 + \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{1,0}^\alpha} \|\nabla \pi^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\tau^{\frac{4-\alpha}{2}}\right)^{2\alpha} \left(\tau^{\left(\frac{4-\alpha}{2}\right)(2-\alpha)}\right)^2 \leq C \left(\tau^{4\alpha-\alpha^2} \tau^{8-4\alpha-2\alpha+\alpha^2}\right),$$

и, таким образом,

$$\|\pi^1\|^2 + \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{1,0}^\alpha} \|\nabla \pi^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \tau^{8-2\alpha}. \quad (2.27)$$

Аналогично, рассматривая схему (2.13) в случае $n = 2$, получим

$$\|\pi^2\|^2 + \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{2,0}^\alpha} \|\nabla \pi^2\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(|g_{2,1}^\alpha| \|\pi^1\|^2 + |g_{2,2}^\alpha| \|\pi^0\|^2 \right) + C \tau^{2\alpha} \|r_2^\alpha\|^2,$$

и, учитывая, что $r_2^\alpha = O(\tau_2^{3-\alpha})$ и $\tau_2 = \frac{\tau}{l_2} \leq \frac{\tau}{\left(\tau^{\frac{\alpha-1}{3}}\right)} = \tau^{\frac{4-\alpha}{3}}$, а также учитывая неравенство

(2.27), получим

$$\|\pi^2\|^2 + \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{2,0}^\alpha} \|\nabla \pi^2\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \tau^{8-2\alpha} + C \left(\tau^{\frac{4-\alpha}{3}} \right)^{2\alpha} \left(\tau^{\frac{4-\alpha}{3}} \right)^{(3-\alpha) \cdot 2},$$

или

$$\|\pi^2\|^2 + \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{2,0}^\alpha} \|\nabla \pi^2\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \tau^{8-2\alpha}. \quad (2.28)$$

Рассматривая таким же образом схему (2.13) в случае $n = 3$, получим

$$\|\pi^3\|^2 + \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{3,0}^\alpha} \|\nabla \pi^3\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{s=1}^3 |g_{3,s}^\alpha| \|\pi^{3-s}\|^2 + C \tau^{2\alpha} \|r_3^\alpha\|^2$$

откуда учитывая неравенства (2.27) и (2.28), получим

$$\|\pi^3\|^2 + \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{3,0}^\alpha} \|\nabla \pi^3\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C (\tau^{8-2\alpha} + \tau^{8-2\alpha}) + C \tau^{2\alpha} \tau^{8-2\alpha}$$

или

$$\|\pi^3\|^2 + \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{3,0}^\alpha} \|\nabla \pi^3\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \tau^{8-2\alpha}. \quad (2.29)$$

Повторяя данный процесс для $n \geq 4$, можно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} \|\pi^n\|^2 + \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{n,0}^\alpha} \|\nabla \pi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \sum_{s=1}^{n-4} |g_{n,s}^\alpha| \|\pi^{n-s}\|^2 + \\ &+ C \left[|g_{n,n-3}^\alpha| \|\pi^3\|^2 + |g_{n,n-2}^\alpha| \|\pi^2\|^2 + |g_{n,n-1}^\alpha| \|\pi^1\|^2 \right] + C \tau^{2\alpha} \|r_n^\alpha\|^2, \end{aligned}$$

откуда, используя неравенства (2.27), (2.28) и (2.29), получим

$$\|\pi^n\|^2 + \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{n,0}^\alpha} \|\nabla \pi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{s=1}^{n-4} \tau^{8-2\alpha} + C[\tau^{8-2\alpha} + \tau^{8-2\alpha}] + C\tau^{2\alpha} \cdot \tau^{8-2\alpha},$$

откуда следует неравенство (2.23).

2.2.7 Сходимость полностью дискретной схемы

Лемма 2.4. Пусть p_h^n – решение задачи 2.4, а p^n – решение задачи 2.3. Тогда при выполнении предположений 2.1, 2.2, 2.3 справедливо неравенство

$$\|Q_h p^n - p_h^n\|^2 + \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{n,0}^\alpha} \|\nabla(Q_h p^n - p_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq Ch^{2k+2},$$

где C – постоянная, зависящая от норм решения задачи 2.2, но не зависящая от параметров сетки.

Доказательство. Рассмотрим разность тождеств (2.13) и (2.14):

$$(\Delta_{0,t}^\alpha (p^n - p_h^n), v_h) + (\lambda \nabla (p^n - p_h^n), \nabla v_h) = (\varphi(p^n) - \varphi(p_h^n), v_h).$$

Используя предположение 2.3 и обозначения (2.22) и выбирая $v_h = \xi^n$, приходим к следующему неравенству:

$$(\Delta_{0,t}^\alpha \xi^n, \xi^n) + \lambda \|\nabla \xi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\Delta_{0,t}^\alpha \psi^n, \xi^n) + (\lambda \nabla \psi^n, \nabla \xi^n) \leq C \|\xi^n\|^2 + C(\psi^n, \xi^n)$$

Используя разложение (2.9) и свойство (2.20) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\tau^{-\alpha} g_{n,0}^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} \|\xi^n\|^2 + \lambda \|\nabla \xi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq -\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^n g_{n,s}^\alpha (\xi^{n-s}, \xi^n) - \\ &- \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^n g_{n,s}^\alpha (\psi^{n-s}, \xi^n) + C \|\xi^n\|^2 + C(\psi^n, \xi^n). \end{aligned}$$

Оценивая правую часть данного неравенства с помощью неравенства Коши, используя соотношение (2.18), и умножая полученное неравенство на $\frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{n,0}^\alpha}$ получим

$$\begin{aligned} &\|\xi^n\|^2 + \frac{\tau^\alpha \lambda \Gamma(2-\alpha)}{g_{n,0}^\alpha} \|\nabla \xi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{4\varepsilon_1 g_{n,0}^\alpha} \sum_{s=1}^n g_{n,s}^\alpha \|\xi^{n-s}\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1 g_{n,0}^\alpha} \sum_{s=0}^n g_{n,s}^\alpha \|\psi^{n-s}\|^2 + \frac{4\varepsilon_1 (g_{n,0}^\alpha + g_{n,2}^\alpha)}{g_{n,0}^\alpha} \|\xi^n\|^2 + \\ &+ \frac{C\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{n,0}^\alpha} \|\xi^n\|^2 + C \left(\frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{4\varepsilon_2 g_{n,0}^\alpha} \|\psi^n\|^2 + \frac{\varepsilon_2 \tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{n,0}^\alpha} \|\xi^n\|^2 \right). \end{aligned}$$

Выберем $\varepsilon_1 = \frac{g_{n,0}^\alpha}{16(g_{n,0}^\alpha + g_{n,2}^\alpha)}$, $\varepsilon_2 = \frac{g_{n,0}^\alpha}{4C\tau^\alpha\Gamma(2-\alpha)}$. Тогда при достаточно малом τ с учетом неравенства (2.21) получим:

$$\begin{aligned} & \|\xi^n\|^2 + \frac{\tau^\alpha \lambda \Gamma(2-\alpha)}{g_{n,0}^\alpha} \|\nabla \xi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq C \left(\sum_{s=1}^n \|\xi^{n-s}\|^2 + \sum_{s=0}^n h^{2k+2} \|p\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \right) + Ch^{2k+2} \|p\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Используя неравенство (2.30), докажем неравенство

$$\|\xi^n\|^2 + \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{n,0}^\alpha} \|\nabla \xi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq Ch^{2k+2} \quad (2.31)$$

методом математической индукции. При $n=1$ с учетом $\|\xi^0\|^2 = 0$ неравенство (2.30) принимает вид

$$\|\xi^1\|^2 + \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{1,0}^\alpha} \|\nabla \xi^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq Ch^{2k+2}.$$

Предположим, что неравенство (2.31) выполняется для всех $i = 2, 3, \dots, n-1$. Докажем выполнение неравенства (2.31) для $i = n$. В этом случае из (2.30) следует, что

$$\begin{aligned} & \|\xi^n\|^2 + \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{n,0}^\alpha} \|\nabla \xi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq C \left(\sum_{s=1}^n \|\xi^{n-s}\|^2 + \sum_{s=0}^n h^{2k+2} \|p\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \right) + Ch^{2k+2} \|p\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \leq Ch^{2k+2}, \end{aligned}$$

откуда следует неравенство (2.31). Теорема доказана.

Теорема 2.3. Пусть p_h^n – решение задачи 2.4, а p – решение задачи 2.2. Тогда существует $\tau_0 > 0$ такое, что при выполнении предположений 2.1, 2.2, 2.3 и всех $\tau \leq \tau_0$ справедливо неравенство

$$\|p(t_n) - p_h^n\| + \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{g_{n,0}^\alpha} \|\nabla(p(t_n) - p_h^n)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\tau^{4-\alpha} + h^{k+1}),$$

где C – постоянная, зависящая от норм решения задачи 2.2, но не зависящая от параметров сетки.

Доказательство. Доказательство теоремы следует из неравенства

$$\|p(t_n) - p_h^n\| \leq \|p(t_n) - p^n\| + \|p^n - Q_h p\| + \|Q_h p - p_h^n\|,$$

из лемм 2.3, 2.4 и неравенства (2.21).

2.2.8 Сходимость итерационного процесса

Теперь докажем сходимость итерационного процесса (задачи 2.5) и определим условия его квадратичной сходимости. При получении данного результата будет использоваться следующая известная лемма.

Лемма 2.5 [136]. Пусть $f: R \rightarrow R$ – дифференцируемая функция, а $f'(\cdot)$ – Липшиц непрерывна. Тогда

$$|f(x) - f(y) - f'(y)(x - y)| \leq \frac{L_f}{2} |x - y|^2, \forall x, y \in R,$$

где L_f – константа Липшица.

Теорема 2.4. При выполнении условия $\tau < \tau_0$, $\tau_0 = \left(\frac{2g_{n,0}^\alpha}{\varphi^{**} \Gamma(2-\alpha)} \right)^{1/\alpha}$

справедливо неравенство

$$\|p_h^n - p_h^{n,i}\|^2 + \tau^\alpha \|\nabla(p_h^n - p_h^{n,i})\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \tau^\alpha h^{-d} \|p_h^n - p_h^{n,i-1}\|^4.$$

Доказательство. Введем обозначение $\mathcal{G}^{n,i} = p_h^n - p_h^{n,i}$. Вычитая (2.15) из (2.14), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{g_{n,0}^\alpha \tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} (\mathcal{G}^{n,i}, v_h) + (\lambda \nabla \mathcal{G}^{n,i}, \nabla v_h) - \\ & - \left(\varphi(p_h^n) - \varphi(p_h^{n,i-1}) - \frac{d\varphi}{dp}(p_h^{n,i-1})(p_h^{n,i} - p_h^{n,i-1}), v_h \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Выберем $v_h = \mathcal{G}^{n,i}$ и оценим слагаемые в (2.32). Для первых двух слагаемых в левой части (2.32) имеем

$$\begin{aligned} T_1 & \equiv \frac{g_{n,0}^\alpha \tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} (\mathcal{G}^{n,i}, \mathcal{G}^{n,i}) = \frac{g_{n,0}^\alpha \tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \|\mathcal{G}^{n,i}\|^2, \\ T_2 & \equiv (\lambda \nabla \mathcal{G}^{n,i}, \nabla \mathcal{G}^{n,i}) = \lambda \|\nabla \mathcal{G}^{n,i}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Представим третье слагаемое следующим образом:

$$T_3 \equiv \left(\varphi(p_h^n) - \varphi(p_h^{n,i-1}) - \frac{d\varphi}{dp}(p_h^{n,i-1})(p_h^{n,i} - p_h^{n,i-1}), \mathcal{G}^{n,i} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\varphi(p_h^n) - \varphi(p_h^{n,i-1}) + \frac{d\varphi}{dp}(p_h^{n,i-1})(p_h^n - p_h^{n,i} - p_h^n + p_h^{n,i-1}), \mathcal{G}^{n,i} \right) = \\
&= \left(\frac{d\varphi}{dp}(p_h^{n,i-1})\mathcal{G}^{n,i}, \mathcal{G}^{n,i} \right) + (\varphi(p_h^n) - \varphi(p_h^{n,i-1}), \mathcal{G}^{n,i}) - \\
&\quad - \left(\frac{d\varphi}{dp}(p_h^{n,i-1})(p_h^n - p_h^{n,i-1}), \mathcal{G}^{n,i} \right) = T_{31} + T_{32},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
|T_{31}| &= \left| \left(\frac{d\varphi}{dp}(p_h^{n,i-1})\mathcal{G}^{n,i}, \mathcal{G}^{n,i} \right) \right| \leq \varphi^{**} \|\mathcal{G}^{n,i}\|^2, \\
|T_{32}| &\equiv \left| \left(\varphi(p_h^n) - \varphi(p_h^{n,i-1}) - \frac{d\varphi}{dp}(p_h^{n,i-1})(p_h^n - p_h^{n,i-1}), \mathcal{G}^{n,i} \right) \right| = \\
&= \left| \int_{\Omega} \left[\varphi(p_h^n) - \varphi(p_h^{n,i-1}) - \frac{d\varphi}{dp}(p_h^{n,i-1})(p_h^n - p_h^{n,i-1}) \right] \cdot \mathcal{G}^{n,i} dx \right| \leq \\
&\leq L_{\varphi'} \int_{\Omega} |p_h^n - p_h^{n,i-1}|^2 |\mathcal{G}^{n,i}| dx \leq \frac{L_{F'}^2}{4\varepsilon} \|\mathcal{G}^{n,i-1}\|_{L^4(\Omega)}^4 + \varepsilon \|\mathcal{G}^{n,i}\|^2.
\end{aligned}$$

Используя обратное неравенство $\|\mathcal{G}^{n,i-1}\|_{L^4(\Omega)} \leq Ch^{-d/4} \|\mathcal{G}^{n,i-1}\|$, отсюда получим

$$|T_{32}| \leq Ch^{-d} \|\mathcal{G}^{n,i-1}\|^4 + \varepsilon \|\mathcal{G}^{n,i}\|^2.$$

Принимая $\varepsilon = \frac{\varphi^{**}}{2}$, из (2.32) получим:

$$\frac{g_{n,0}^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} \|\mathcal{G}^{n,i}\|^2 + \tau^\alpha \lambda \|\nabla \mathcal{G}^{n,i}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \tau^\alpha \frac{\varphi^{**}}{2} \|\mathcal{G}^{n,i}\|^2 + \tau^\alpha Ch^{-d} \|\mathcal{G}^{n,i-1}\|^4.$$

Выбирая $\tau \leq \tau_0$, где τ_0 определено в условии теоремы, получим

$$\|\mathcal{G}^{n,i}\|^2 + \tau^\alpha \|\nabla \mathcal{G}^{n,i}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\tau^\alpha h^{-d} \|\mathcal{G}^{n,i-1}\|^4,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Из доказанной теоремы следует достаточное условие квадратичной сходимости итерационного метода Ньютона:

$$C\tau^\alpha h^{-d} \|p_h^n - p_h^{n,i-1}\|^2 \leq 1.$$

2.2.9 Верификация порядка сходимости на основе вычислительных экспериментов

Рассмотрим следующий пример для верификации теоретического порядка сходимости, спрогнозированного в теореме 2.3.

Пример 2.1. В области $Q_T = \bar{\Omega} \times \bar{J}$, где $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $J = (0,1]$, рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \partial_{0,t}^\alpha p - 2\nabla^2 p &= p^2 + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times J, \\ f(x,t) &= \frac{24t^{4-\alpha} x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(2-\alpha)\Gamma(3-\alpha)\Gamma(4-\alpha)} + \\ &+ 4t^4(x_1(1-x_1) + x_2(1-x_2)) - t^8 x_1^2(1-x_1)^2 x_2^2(1-x_2)^2, \\ p(x,0) &= 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \\ p(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times J. \end{aligned}$$

Точное решение задачи $p(x,t) = t^4 x_1 x_2 (1-x_1)(1-x_2)$.

Вычислительные эксперименты проведены согласно методике, описанной в подразделе 1.2.8. Итерационный процесс, описанный в задаче 2.5, выполнялся до достижения условия $\|p_h^{n,i} - p_h^{n,i-1}\| < 10^{-9}$. Во всех вычислительных экспериментах данное условие достигалось за 2-3 итерации.

Величины погрешности и эмпирические порядки сходимости, соответствующие различным значениям порядков дробной производной $\alpha \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$, представлены в таблице 2.1. В последней строке таблицы указаны теоретические порядки сходимости, полученные в теореме 2.3. Результаты вычислительных экспериментов полностью подтверждают результаты теоретического анализа.

Таблица 2.1 – L^2 -погрешности и порядки сходимости для примера 2.1 для различных порядков дробной производной α . В последней строке таблицы указаны теоретические порядки сходимости

τ	$\alpha = 0.1$		$\alpha = 0.2$		$\alpha = 0.3$	
	L^2 - погрешность	Порядок	L^2 - погрешность	Порядок	L^2 - погрешность	Порядок
1/10	7.4187×10^{-8}	-	1.9246×10^{-7}	-	3.7971×10^{-7}	-
1/20	5.5046×10^{-9}	3.75	1.4866×10^{-8}	3.69	3.0620×10^{-8}	3.63
1/30	1.1875×10^{-9}	3.78	3.2904×10^{-9}	3.72	6.9802×10^{-9}	3.65
1/40	3.9815×10^{-10}	3.80	1.1248×10^{-9}	3.73	2.4386×10^{-9}	3.66
1/50	1.7014×10^{-10}	3.81	4.8846×10^{-10}	3.74	1.0774×10^{-9}	3.66
1/60	8.4683×10^{-11}	3.83	2.4673×10^{-10}	3.75	5.5230×10^{-10}	3.67
1/70	4.6780×10^{-11}	3.85	1.3830×10^{-10}	3.76	3.1367×10^{-10}	3.67
1/80	2.7939×10^{-11}	3.86	8.3626×10^{-11}	3.77	1.9200×10^{-10}	3.68
Теор.		3.9		3.8		3.7

Продолжение таблицы 2.1

τ	$\alpha = 0.4$		$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.6$	
	L^2 - погрешность	Порядок	L^2 - погрешность	Порядок	L^2 - погрешность	Порядок
1/10	6.6852×10^{-7}	-	1.1124×10^{-6}	-	1.7888×10^{-6}	-
1/20	5.6895×10^{-8}	3.55	1.0035×10^{-7}	3.47	1.7163×10^{-7}	3.38
1/30	1.3401×10^{-8}	3.57	2.4485×10^{-8}	3.48	4.3459×10^{-8}	3.39
1/40	4.7955×10^{-9}	3.57	8.9882×10^{-9}	3.48	1.6386×10^{-8}	3.39
1/50	2.1589×10^{-9}	3.58	4.1288×10^{-9}	3.49	7.6864×10^{-9}	3.39
1/60	1.1242×10^{-9}	3.58	2.1858×10^{-9}	3.49	4.1402×10^{-9}	3.39
1/70	6.4720×10^{-10}	3.58	1.2764×10^{-9}	3.49	2.4534×10^{-9}	3.39
1/80	4.0101×10^{-10}	3.58	8.0083×10^{-10}	3.49	1.5591×10^{-9}	3.40
Теор.		3.6		3.5		3.4
τ	$\alpha = 0.7$		$\alpha = 0.8$		$\alpha = 0.9$	
	L^2 - погрешность	Порядок	L^2 - погрешность	Порядок	L^2 - погрешность	Порядок
1/10	2.8113×10^{-6}	-	4.3448×10^{-6}	-	6.6895×10^{-6}	-
1/20	2.8761×10^{-7}	3.29	4.7486×10^{-7}	3.19	7.7435×10^{-7}	3.11
1/30	7.5674×10^{-8}	3.29	1.2991×10^{-7}	3.20	2.2045×10^{-7}	3.10
1/40	2.9329×10^{-8}	3.29	5.1780×10^{-8}	3.20	9.0395×10^{-8}	3.10
1/50	1.4057×10^{-8}	3.30	2.5366×10^{-8}	3.20	4.5270×10^{-8}	3.10
1/60	7.7066×10^{-9}	3.30	1.4158×10^{-8}	3.20	2.5728×10^{-8}	3.10
1/70	4.6359×10^{-9}	3.30	8.6472×10^{-9}	3.20	1.5956×10^{-8}	3.10
1/80	2.9847×10^{-9}	3.30	5.6412×10^{-9}	3.20	1.0548×10^{-8}	3.10
Теор.		3.3		3.2		3.1

2.3 Выводы по второму разделу

Таким образом, на основе проведенного теоретического анализа и результатов вычислительных экспериментов можно сделать следующие выводы:

1) На основании теоремы 2.1 можно заключить, что решение задачи 2.1 единственно и непрерывно зависит от входных данных.

2) Вычислительный метод, построенный в подразделе 2.2.4, позволяет получить приближенное решение повышенного порядка $O(\tau^{4-\alpha} + h^{k+1})$, $\alpha \in (0,1)$. Результаты вычислительных экспериментов, проведенные для различных конфигураций сетки и различных порядков дробных производных, хорошо согласуются с результатами теоретического анализа.

3 ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ ДВУХ КОНТИНУУМОВ

В данном разделе диссертационной работы рассматривается задача фильтрации в трещиновато-пористых средах. Однако в отличие от задачи, рассмотренной в разделе 1, предполагается, что пористая среда состоит из двух континуумов – системы трещин и матрицы. Чтобы учесть эффекты памяти среды, следуя известной работе [25], временные дробные производные в классических уравнениях модели дискретных трещин [5] заменены дробными производными порядка $\alpha \in (0,1)$ в смысле Капуто. В результате получено дробно-дифференциальное уравнение четвертого порядка по пространственной переменной. Для понижения порядка уравнения введена замена переменных, в результате которой получена система уравнений второго порядка. Предлагается вычислительный метод повышенного порядка $O(\tau^{4-\alpha} + h^{k+1})$ с использованием методики, примененной в разделе 2.

3.1 Постановка задачи

Предположим, что пористая среда состоит из двух континуумов, наложенных друг на друга – непрерывной системы трещин и прерывистой системы матричных блоков среднего размера. Предположим, что движение в обоих континуумах описывается линейным законом Дарси:

$$\frac{\tilde{\mu}}{k_f} \bar{u}_f + \nabla p_f = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\tilde{\mu}}{k_m} \bar{u}_m + \nabla p_m = 0, \quad (3.2)$$

где p_f – давление в трещинах, p_m – давление в матрице, $\tilde{\mu}$ – вязкость жидкости, k_f и k_m – проницаемость в трещинах и в матрице.

Уравнение неразрывности в обоих континуумах имеет вид

$$S_f \partial_t p_f + \nabla \cdot \bar{u}_f = q, \quad (3.3)$$

$$S_m \partial_t p_m + \nabla \cdot \bar{u}_m = -q + f(x, t). \quad (3.4)$$

Определим следующие предположения.

Предположение 3.1. Предположим, что величина S_m постоянна, а $S_f \ll S_m$. В силу этого предположения будем считать S_f достаточно малой величиной, влиянием которой можно пренебречь.

Предположение 3.2. Пусть $q = a(p_m - p_f)$, где a – некоторая положительная постоянная.

При выполнении предположений 3.1–3.2 уравнения (3.1)–(3.4) принимают вид

$$-\frac{k_f}{\tilde{\mu}} \nabla^2 p_f = a(p_m - p_f), \quad (3.5)$$

$$S_m \partial_t p_m - \frac{k_m}{\tilde{\mu}} \nabla^2 p_m = -a(p_m - p_f) + f(x, t). \quad (3.6)$$

Выражая p_m из уравнения (3.5) и подставляя в (3.6), получим следующее уравнение

$$\partial_t p_f - \frac{k_f}{a\tilde{\mu}} \partial_t (\nabla^2 p_f) - \frac{k_f + k_m}{\tilde{\mu} S_m} \nabla^2 p_f + \frac{k_f k_m}{a S_m \tilde{\mu}^2} \nabla^2 (\nabla^2 p_f) = f(x, t).$$

Для построения дробно-дифференциального обобщения уравнений фильтрации в трещиновато-пористых средах формально заменим целочисленные временные производные ∂_t дробной производной в смысле Капуто $\partial_{0,t}^\alpha$, определенной формулой (1.4). Таким образом, приходим к следующей задаче.

Задача 3.1. В $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times \bar{J}$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $J = (0, T]$, $T > 0$, найти p , удовлетворяющее следующим условиям:

$$\partial_{0,t}^\alpha (p - \mu \nabla^2 p) - \lambda \nabla^2 p + \chi \nabla^2 (\nabla^2 p) = f(x, t), \quad x \in \Omega, t \in J, \quad (3.7)$$

$$p(x, 0) = p_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (3.8)$$

$$p(x, t) = \nabla^2 p(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t \in J, \quad (3.9)$$

где $\alpha \in (0, 1)$, $\mu = \frac{k_f}{a\tilde{\mu}}$, $\lambda = \frac{k_f + k_m}{\tilde{\mu} S_m}$, $\chi = \frac{k_f k_m}{a S_m \tilde{\mu}^2}$.

Предположение 3.3. Предположим, что существует решение задачи (3.7)–(3.9), имеющее достаточное количество производных для проведения анализа.

3.2 Исследование единственности решения и непрерывной зависимости от входных данных. Построение и исследование численного метода решения задачи

3.2.1 Понижение порядка уравнения и слабая вариационная постановка задачи

Уравнение (3.7) является уравнением четвертого порядка. Чтобы понизить его порядок, введем замену $\sigma = \nabla^2 p_f$ и представим уравнение (3.7) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\partial_{0,t}^\alpha(p - \mu \nabla^2 p) - \lambda \nabla^2 p + \chi \nabla^2 \sigma &= f(x, t), \\ \sigma - \nabla^2 p &= 0.\end{aligned}$$

Определение 3.1. Слабым решением задачи 3.1 назовем пару $\{p, \sigma\}: J \mapsto H_0^1 \times H_0^1$, удовлетворяющую тождествам

$$(\partial_{0,t}^\alpha p, v) + \mu (\partial_{0,t}^\alpha \nabla p, \nabla v) + \lambda (\nabla p, \nabla v) - \chi (\nabla \sigma, \nabla v) = (f, v), \quad (3.10)$$

$$(\sigma, w) + (\nabla p, \nabla w) = 0 \quad (3.11)$$

для всех $(v, w) \in H_0^1 \times H_0^1$, где $\alpha \in (0, 1)$.

3.2.2 Единственность решения и его непрерывная зависимость от входных данных

Докажем следующий результат.

Теорема 3.1. Для решения задачи 3.1 выполняется следующее неравенство:

$$\|p\|^2 + \mu \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2 + \chi \partial_{0,t}^{-\alpha} \|\sigma\|^2 \leq C (\|p_0\|^2 + \partial_{0,t}^{-\alpha} \|f\|^2), \quad C > 0, \quad (3.12)$$

из которого следует единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных.

Доказательство. Выберем $v = p$ в (3.10) и $w = \chi \sigma$ в (3.11), и сложим полученные тождества:

$$(\partial_{0,t}^\alpha p, p) + \mu (\partial_{0,t}^\alpha \nabla p, \nabla p) + \lambda (\nabla p, \nabla p) + \chi (\sigma, \sigma) = (f, p). \quad (3.13)$$

Оценивая слагаемые в (3.13) с помощью неравенства Коши и леммы 1.1, легко получить, что

$$\partial_{0,t}^\alpha \|p\|^2 + \mu \partial_{0,t}^\alpha \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2 + \chi \|\sigma\|^2 \leq C (\|f\|^2 + \|p\|^2) \quad (3.14)$$

В силу неравенства $\|p\|^2 \leq \frac{1}{2} \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2$ получим

$$\partial_{0,t}^\alpha \|p\|^2 + \mu \partial_{0,t}^\alpha \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda_1 \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2 + \chi \|\sigma\|^2 \leq C \|f\|^2. \quad (3.15)$$

Применяя оператор дробного интегрирования (1.5) к обеим частям (3.14), получим оценку (3.12).

3.2.3 Постановка полудискретной схемы

Для $\tau > 0$ определим множество $\{t_n \in R: t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N, N\tau = T\}$, и

обозначим через p^n полудискретную аппроксимацию функции p относительно временной переменной при $t = t_n$.

При аппроксимации дробной производной воспользуемся формулой повышенного порядка $O(\tau^{4-\alpha})$, определенной в лемме 2.1.

Определим смешанную полудискретную постановку задачи.

Задача 3.2. Пусть известны $(p^j, \sigma^j) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, и, в частности, $p^0 = p_0(x)$, $\sigma^0 = \nabla^2 p_0(x)$. Найти $(p^n, \sigma^n) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющие следующим тождествам для всех $(v, w) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} & (\Delta_{0,t}^\alpha p^n, v) + \mu(\Delta_{0,t}^\alpha \nabla p^n, \nabla v) + \lambda(\nabla p^n, \nabla v) - \chi(\nabla \sigma^n, \nabla v) + \\ & + (\sigma^n, w) + (\nabla p^n, \nabla w) = (f^n, v), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $\alpha \in (0, 1)$ и $f^n(x) = f(x, t_n)$.

3.2.4 Постановка полностью дискретной схемы

Пусть K_h – квазиравномерная триангуляция, введенная на $\bar{\Omega}$ с параметром дискретизации h , и $V_h \subset H_0^1(\Omega)$. Определим следующую смешанную полностью дискретную постановку задачи.

Задача 3.3. Пусть известны $(p_h^j, \sigma_h^j) \in V_h \times V_h$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, и, в частности, p_h^0 и σ_h^0 – L^2 -проекции функций $p_0(x)$ и $\nabla^2 p_0(x)$. Найти $(p_h^n, \sigma_h^n) \in V_h \times V_h$, удовлетворяющие следующим тождествам для всех $(v_h, w_h) \in V_h \times V_h$:

$$\begin{aligned} & (\Delta_{0,t}^\alpha p_h^n, v_h) + \mu(\Delta_{0,t}^\alpha \nabla p_h^n, \nabla v_h) + \lambda(\nabla p_h^n, \nabla v_h) - \\ & - \chi(\nabla \sigma_h^n, \nabla v_h) + (\sigma_h^n, w_h) + (\nabla p_h^n, \nabla w_h) = (f^n, v_h), \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $\alpha \in (0, 1)$.

3.2.5 Устойчивость численной схемы

Теорема 3.2. Пусть $\{(p_h^n, \sigma_h^n)\}_{n=0}^N$, $p_h^n \in V_h$, $\sigma_h^n \in V_h$ — решение задачи 3.3. Тогда справедливо неравенство

$$\|p_h^n\|_{H^1(\Omega)} + \tau^{\alpha/2} \|\sigma_h^n\| \leq C \left(\|p_h^0\|_{H^1(\Omega)} + \|f^n\| \right)$$

из которого следует устойчивость схемы (3.17) по начальным данным и правой части.

Доказательство. Используем аппроксимационную формулу (2.9) в (3.17), затем выбирая $v_h = p_h^n$ и $w_h = \chi \sigma_h^n$ в (3.17), приходим к следующему неравенству:

$$\|p_h^n\|^2 + \mu \|\nabla p_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda \Gamma(2-\alpha) \tau^\alpha}{\delta_{n,0}^\alpha} \|\nabla p_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\chi \Gamma(2-\alpha) \tau^\alpha}{\delta_{n,0}^\alpha} \|\sigma_h^n\|^2 =$$

$$= -\frac{1}{\delta_{n,0}^\alpha} \sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^\alpha \left[(p_h^{n-s}, p_h^n) + \mu (\nabla p_h^{n-s}, \nabla p_h^n) \right] + (f^n, p_h^n) \quad (3.18)$$

Отбрасывая третье слагаемое в левой части (3.18) и оценивая слагаемые в правой части с помощью неравенства Коши и известного неравенства

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2, \quad a, b, \varepsilon > 0, \quad (3.19)$$

получим

$$\begin{aligned} E^n + \frac{\chi \Gamma(2-\alpha) \tau^\alpha}{\delta_{n,0}^\alpha} \|\sigma_h^n\|^2 &\leq \frac{1}{4\varepsilon_1 \delta_{n,0}^\alpha} \sum_{s=1}^n |\delta_{n,s}^\alpha| E^{n-s} + \\ &+ \frac{\varepsilon_1}{\delta_{n,0}^\alpha} E^n \sum_{s=0}^n |\delta_{n,s}^\alpha| + \frac{1}{4\varepsilon_2} \|f^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon_2 \|p_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

где $E^n = \|p_h^n\|^2 + \mu \|\nabla p_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2$. Используя соотношение (2.18), из (3.20) получим

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2\varepsilon_1 (\delta_{n,0}^\alpha + \delta_{n,2}^\alpha)}{\delta_{n,0}^\alpha} \right) E^n + \frac{\chi \Gamma(2-\alpha) \tau^\alpha}{\delta_{n,0}^\alpha} \|\sigma_h^n\|^2 &\leq \\ &\leq \frac{1}{4\varepsilon_1 \delta_{n,0}^\alpha} \sum_{s=1}^n |\delta_{n,s}^\alpha| E^{n-s} + \frac{1}{4\varepsilon_2} \|f^n\|^2 + \varepsilon_2 \|p_h^n\|^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Выберем $\varepsilon_1 = \frac{\delta_{n,0}^\alpha}{8(\delta_{n,0}^\alpha + \delta_{n,2}^\alpha)}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{4}$ и, замечая, что для последнего слагаемого в правой части справедлива оценка $\|p_h^n\|^2 \leq E^n$, получим

$$E^n + \frac{2\chi \Gamma(2-\alpha) \tau^\alpha}{\delta_{n,0}^\alpha} \|\sigma_h^n\|^2 \leq \frac{4(\delta_{n,0}^\alpha + \delta_{n,2}^\alpha)}{(\delta_{n,0}^\alpha)^2} \sum_{s=0}^{n-1} |\delta_{n,n-s}^\alpha| E^s + 2\|f^n\|^2.$$

Применяя лемму 2.2, получим

$$\begin{aligned} E^n + \frac{2\chi \Gamma(2-\alpha) \tau^\alpha}{\delta_{n,0}^\alpha} \|\sigma_h^n\|^2 &\leq E^0 + 2\|f^n\|^2 + \\ &+ \sum_{s=0}^{n-1} \left(E^0 + 2\|f^n\|^2 \right) \cdot \frac{4(\delta_{n,0}^\alpha + \delta_{n,2}^\alpha)}{(\delta_{n,0}^\alpha)^2} |\delta_{n,n-s}^\alpha| \exp \left(\frac{4(\delta_{n,0}^\alpha + \delta_{n,2}^\alpha)}{(\delta_{n,0}^\alpha)^2} \sum_{j=s+1}^{n-1} |\delta_{n,n-j}^\alpha| \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Поскольку из (2.18) следует, что

$$\sum_{j=i+1}^{n-1} |\delta_{n,n-j}^\alpha| = \sum_{s=1}^{n-i-1} |\delta_{n,s}^\alpha| = 2(\delta_{n,0}^\alpha + \delta_{n,2}^\alpha),$$

то из (3.22) получим, что

$$E^n + \frac{2\chi\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}{\delta_{n,0}^\alpha} \|\sigma_h^n\|^2 \leq \left(E^0 + 2\|f^n\|^2 \right) \left(1 + C \sum_{s=0}^{n-1} \delta_{n,n-s}^\alpha \right). \quad (3.23)$$

Значение во второй скобке справа от (3.23) является конечным числом в силу (2.18). Следовательно, из (3.23) мы заключаем, что

$$E^n + \tau^\alpha \|\sigma_h^n\|^2 \leq C \left(E^0 + \|f^n\|^2 \right),$$

что эквивалентно неравенству

$$\|p_h^n\|^2 + \mu \|\nabla p_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^\alpha \|\sigma_h^n\|^2 \leq C \left(\|p_h^0\|^2 + \mu \|\nabla p_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f^n\|^2 \right),$$

из которого следует утверждение теоремы.

3.2.6 Сходимость полудискретной схемы

Чтобы достичь глобального порядка сходимости $O(\tau^{4-\alpha} + h^{k+1})$, воспользуемся техникой подшаговой схемы, примененной в разделе 2.2.6. Для этого обозначим через l_1 и l_2 наименьшие целые числа такие, что $l_1 \geq \frac{1}{\tau}$, $l_2 \geq \tau^{\frac{2-\alpha}{6-\alpha}}$. Пусть τ_1 и τ_2 – соответствующие длины подшагов:

$$\tau_1 = \frac{\tau}{l_1}, \quad \tau_2 = \frac{\tau}{l_2}.$$

Определим оператор проекции $Q_h: H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h$ такой, что

$$(\nabla(Q_h p - p), \nabla p_h) = 0 \quad \forall p \in H_0^1(\Omega), p_h \in V_h,$$

удовлетворяющий свойству аппроксимации

$$\|p - Q_h p\| + h \|p - Q_h p\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{k+1} \|p\|_{H^{k+1}(\Omega)} \quad (3.24)$$

для всех $p \in H_0^1(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega)$.

Представим погрешности $p(t_n) - p_h^n$ и $\sigma(t_n) - \sigma_h^n$ как показано ниже:

$$\begin{aligned} p(t_n) - p_h^n &= (p(t_n) - p^n) + (p^n - Q_h p^n) + (Q_h p^n - p_h^n) \equiv I_1 + I_2 + I_3, \\ \sigma(t_n) - \sigma_h^n &= (\sigma(t_n) - \sigma^n) + (\sigma^n - Q_h \sigma^n) + (Q_h \sigma^n - \sigma_h^n) \equiv I_1' + I_2' + I_3'. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Оценка слагаемого I_2 известна благодаря неравенству (3.24). Поэтому сходимость решения аппроксимационной задачи к решению вариационной задачи докажем в два этапа: оценку для I_1 будет доказана в лемме 3.1, а оценка для I_3 – в лемме 3.2. Та же идея будет применена к ошибке $\sigma(t_n) - \sigma_h^n$.

Лемма 3.1. Пусть $\{(p^n, \sigma^n)\}_{n=0}^N$, $p^n \in H_0^1(\Omega)$, $\sigma^n \in H_0^1(\Omega)$ – решение задачи 3.2, а p, σ – решение задачи 3.1. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\|p(t_n) - p^n\|_{H^1(\Omega)} + \tau^{\alpha/2} \|\sigma(t_n) - \sigma^n\| \leq C \tau^{4-\alpha}.$$

Доказательство. Обозначим $\pi^n = p(t_n) - p^n$, $\zeta^n = \sigma(t_n) - \sigma^n$. Вычитая тождество (3.16) из суммы тождеств (3.10) и (3.11), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} &(\partial_{0,t}^\alpha p(t_n) - \Delta_{0,t}^\alpha p^n, v) + \mu(\nabla(\partial_{0,t}^\alpha p(t_n) - \Delta_{0,t}^\alpha p^n), \nabla v) + \\ &+ \lambda(\nabla(p(t_n) - p^n), \nabla v) - \chi(\nabla(\sigma(t_n) - \sigma^n), \nabla v) + \\ &+ (\sigma(t_n) - \sigma^n, w) + (\nabla(p(t_n) - p^n), \nabla w) = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Заметим, что

$$\partial_{0,t}^\alpha p(t_n) - \Delta_{0,t}^\alpha p^n = r_n^\alpha + \Delta_{0,t}^\alpha \pi^n,$$

где $r_n^\alpha = \partial_{0,t}^\alpha p(t_n) - \Delta_{0,t}^\alpha p(t_n)$. Выберем $v = \pi^n$ и $w = \chi \zeta^n$ в (3.26):

$$\begin{aligned} &(\Delta_{0,t}^\alpha \pi^n, \pi^n) + \mu(\Delta_{0,t}^\alpha \nabla \pi^n, \nabla \pi^n) + \lambda \|\nabla \pi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \chi \|\zeta^n\|^2 = \\ &= -(r_n^\alpha, \pi^n) - \mu(r_n^\alpha, \nabla \pi^n), \end{aligned}$$

или, используя формулу (2.9), имеем

$$\begin{aligned} &\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \delta_{n,0}^\alpha \left(\|\pi^n\|^2 + \mu \|\nabla \pi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \lambda \|\nabla \pi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ &+ \chi \|\zeta^n\|^2 - \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^n \delta_{n,s}^\alpha \left[(\pi^{n-s}, \pi^n) + \mu(\nabla \pi^{n-s}, \nabla \pi^n) \right] - (r_n^\alpha, \pi^n) - \mu(r_n^\alpha, \nabla \pi^n) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Применяя неравенство Коши и неравенство (3.19) к членам в правой части (3.27), мы получим

$$\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \delta_{n,0}^\alpha \left[\|\pi^n\|^2 + \mu \|\nabla \pi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \lambda \|\nabla \pi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \chi \|\zeta^n\|^2 \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^n |\delta_{n,s}^\alpha| \left[\frac{1}{4\varepsilon_1} \|\pi^{n-s}\|^2 + \varepsilon_1 \|\pi^n\|^2 + \frac{\mu}{4\varepsilon_1} \|\nabla \pi^{n-s}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \varepsilon_1 \|\nabla \pi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \\ &\quad + \frac{1}{4\varepsilon_2} \|r_n^\alpha\|^2 + \varepsilon_2 \|\pi^n\|^2 + \frac{\mu}{4\varepsilon_3} \|r_n^\alpha\|^2 + \mu \varepsilon_3 \|\nabla \pi^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Используя тот же подход, что и при выводе неравенства (3.21), получим

$$\begin{aligned} &\|\pi^n\|^2 + \|\nabla \pi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^\alpha \|\zeta^n\|^2 \leq \\ &\leq C \left(\sum_{s=1}^n |\delta_{n,s}^\alpha| \left[\|\pi^{n-s}\|^2 + \mu \|\nabla \pi^{n-s}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \tau^{2\alpha} \|r_n^\alpha\|^2 + \tau^\alpha \|r_n^\alpha\|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Докажем теорему методом математической индукции. Рассматривая задачу 3.2 в случае $n=1$ с подшагом τ_1 , приходим к неравенству, аналогичному (3.29), т. е.

$$\begin{aligned} &\|\pi^1\|^2 + \|\nabla \pi^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^\alpha \|\zeta^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq C \left(|\delta_{1,1}^\alpha| \left[\|\pi^0\|^2 + \mu \|\nabla \pi^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \tau_1^{2\alpha} \|r_1^\alpha\|^2 + \tau_1^\alpha \|r_1^\alpha\|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Из (2.10) следует, что $r_1^\alpha = O(\tau_1^{2-\alpha})$ и $\tau_1 = \frac{\tau}{l_1} \leq \frac{\tau}{\left(\frac{1}{\tau}\right)} = \tau^2$. Тогда, учитывая, что

$\pi^0 = 0$, из (3.30) получаем, что

$$\|\pi^1\|^2 + \|\nabla \pi^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^\alpha \|\zeta^1\|^2 \leq C \tau^{8-2\alpha}. \quad (3.31)$$

Аналогично, рассматривая задачу 3.2 в случае $n=2$, имеем

$$\begin{aligned} &\|\pi^2\|^2 + \|\nabla \pi^2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^\alpha \|\zeta^2\|^2 \leq C |\delta_{2,1}^\alpha| \left(\|\pi^1\|^2 + \mu \|\nabla \pi^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \\ &\quad + C |\delta_{2,2}^\alpha| \left(\|\pi^0\|^2 + \mu \|\nabla \pi^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + C \tau_2^{2\alpha} \|r_2^\alpha\|^2 + C \tau_2^\alpha \|r_2^\alpha\|^2, \end{aligned}$$

и принимая во внимание, что $r_2^\alpha = O(\tau_2^{3-\alpha})$ и $\tau_2 = \frac{\tau}{l_2} \leq \tau^{\frac{8-2\alpha}{6-\alpha}}$, и, используя оценку (3.31), получим

$$\|\pi^2\|^2 + \|\nabla \pi^2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^\alpha \|\zeta^2\|^2 \leq C \tau^{8-2\alpha}. \quad (3.32)$$

В случае $n=3$ имеем $r_3^\alpha = O(\tau^{4-\alpha})$, поэтому

$$\|\pi^3\|^2 + \|\nabla \pi^3\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^\alpha \|\zeta^3\|^2 \leq C\tau^{8-2\alpha}. \quad (3.33)$$

Теперь предположим, что неравенство

$$\|\pi^i\|^2 + \|\nabla \pi^i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^\alpha \|\zeta^i\|^2 \leq C\tau^{8-2\alpha} \quad (3.34)$$

верно для всех $i = 4, 5, \dots, n-1$. Покажем справедливость (3.34) для случая $i = n$. Действительно, рассматривая задачу 3.2 для этого случая, получаем

$$\begin{aligned} \|\pi^n\|^2 + \|\nabla \pi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^\alpha \|\zeta^n\|^2 &\leq C \sum_{s=1}^{n-4} \left(\|\pi^{n-s}\|^2 + \mu \|\nabla \pi^{n-s}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \\ &+ C \left[\delta_{n,n-3}^\alpha \left(\|\pi^3\|^2 + \mu \|\nabla \pi^3\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \delta_{n,n-2}^\alpha \left(\|\pi^2\|^2 + \mu \|\nabla \pi^2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \right. \\ &\left. + \delta_{n,n-1}^\alpha \left(\|\pi^1\|^2 + \mu \|\nabla \pi^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right] + C\tau^{2\alpha} \|r_n^\alpha\|^2 + C\tau^\alpha \|r_n^\alpha\|^2. \end{aligned}$$

Используя оценки (2.10)–(2.12) и (3.31)–(3.33), приходим к неравенству (3.34) для случая $i = n$. Таким образом, теорема доказана.

3.2.7 Сходимость полностью дискретной схемы

Перейдем к исследованию сходимости решения задачи 3.3 к решению задачи 3.2.

Лемма 3.2. Пусть $\{(p_h^n, \sigma_h^n)\}_{n=0}^N$, $p_h^n \in V_h$, $\sigma_h^n \in V_h$ – решение задачи 3.3, а $\{(p^n, \sigma^n)\}_{n=0}^N$, $p^n \in H_0^1(\Omega)$, $\sigma^n \in H_0^1(\Omega)$ – решение задачи 3.2. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\|Q_h p^n - p_h^n\|_{H^1(\Omega)} + \tau^{\alpha/2} \|Q_h \sigma^n - \sigma_h^n\| \leq Ch^{k+1}.$$

Доказательство. Обозначим

$$p^n - p_h^n = (p^n - Q_h p^n) + (Q_h p^n - p_h^n) = \psi_p^n + \xi_p^n, \quad (3.35)$$

$$\sigma^n - \sigma_h^n = (\sigma^n - Q_h \sigma^n) + (Q_h \sigma^n - \sigma_h^n) = \psi_\sigma^n + \xi_\sigma^n. \quad (3.36)$$

Вычитая (3.17) из (3.16) и используя обозначения (3.35) и (3.36), получим

$$\begin{aligned} (\Delta_{0,t}^\alpha \xi_p^n, v_h) + \mu (\Delta_{0,t}^\alpha \nabla \xi_p^n, \nabla v_h) + \lambda (\nabla \xi_p^n, \nabla v_h) - \chi (\nabla \xi_\sigma^n, \nabla v_h) + \\ + (\xi_\sigma^n, w_h) + (\nabla \xi_p^n, \nabla w_h) + (\Delta_{0,t}^\alpha \psi_p^n, v_h) + (\psi_\sigma^n, w_h) = 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Выберем $v_h = \xi_p^n$, $w_h = \chi \xi_\sigma^n$ в (3.37) и используем (2.9):

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau^{-\alpha} \delta_{n,0}}{\Gamma(2-\alpha)} \|\xi_p^n\|^2 + \frac{\mu \tau^{-\alpha} \delta_{n,0}}{\Gamma(2-\alpha)} \|\nabla \xi_p^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\nabla \xi_p^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \chi \|\xi_\sigma^n\|^2 = \\
& = -\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^n \delta_{n,s} (\xi_p^{n-s}, \xi_p^n) - \frac{\mu \tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^n \delta_{n,s} (\nabla \xi_p^{n-s}, \nabla \xi_p^n) - \\
& \quad - \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^n \delta_{n,s} (\psi_p^{n-s}, \xi_p^n) - \chi (\psi_\sigma^n, \xi_\sigma^n). \tag{3.38}
\end{aligned}$$

Оценим слагаемые в правой части (3.38), используя неравенство Коши, неравенство (3.19) и соотношение (2.18), а также методику, примененную при получении неравенства (3.21):

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} (\delta_{n,0} - 4(\delta_{n,0} + \delta_{n,2}) \varepsilon_1) \|\xi_p^n\|^2 + \frac{\mu \tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} (\delta_{n,0} - 2(\delta_{n,0} + \delta_{n,2}) \varepsilon_2) \|\nabla \xi_p^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\
& + \lambda \|\nabla \xi_p^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \chi (1 - \varepsilon_3) \|\xi_\sigma^n\|^2 \leq \frac{\tau^{-\alpha}}{4\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^n \delta_{n,s} \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \|\xi_p^{n-s}\|^2 + \frac{\mu}{\varepsilon_2} \|\nabla \xi_p^{n-s}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\varepsilon_1} \|\psi_p^{n-s}\|^2 \right] + \frac{\chi}{4\varepsilon_3} \|\psi_\sigma^n\|^2.
\end{aligned}$$

Принимая $\varepsilon_1 = \frac{\delta_{n,0}}{8(\delta_{n,0} + \delta_{n,2})}$, $\varepsilon_2 = \frac{\delta_{n,0}}{4(\delta_{n,0} + \delta_{n,2})}$, $\varepsilon_3 = \frac{1}{2}$, и, используя свойство аппроксимации (3.24), получим

$$\begin{aligned}
& \|\xi_p^n\|^2 + \mu \|\nabla \xi_p^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^\alpha \chi \Gamma(2-\alpha) \|\xi_\sigma^n\|^2 \leq \\
& \leq C \sum_{s=1}^n \left[2 \|\xi_p^{n-s}\|^2 + \mu \|\nabla \xi_p^{n-s}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + Ch^{2k+2}. \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Теперь докажем неравенство

$$\|\xi_p^n\|^2 + \mu \|\nabla \xi_p^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^\alpha \chi \Gamma(2-\alpha) \|\xi_\sigma^n\|^2 \leq Ch^{2k+2}, \tag{3.40}$$

используя метод математической индукции. Принимая во внимание, что $\xi_p^0 = 0$, неравенство (3.39) для $n=1$ принимает вид

$$\|\xi_p^1\|^2 + \mu \|\nabla \xi_p^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^\alpha \chi \Gamma(2-\alpha) \|\xi_\sigma^1\|^2 \leq Ch^{2k+2}.$$

Предположим, что (3.40) выполняется для всех $i=2,3,\dots,n-1$. Докажем выполнение неравенства (3.40) для случая $i=n$. Представим (3.39) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \|\xi_p^n\|^2 + \mu \|\nabla \xi_p^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^\alpha \chi \Gamma(2-\alpha) \|\xi_\sigma^n\|^2 \leq \\ & \leq C \sum_{s=1}^n \left(2 \|\xi_p^{n-s}\|^2 + \mu \|\nabla \xi_p^{n-s}\|_{L^2(\Omega)}^2 + h^{2k+2} \|p\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \right) + Ch^{2k+2} \|\sigma\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 \leq Ch^{2k+2}, \end{aligned}$$

где использованы неравенства (3.40) при $i = 1, 2, \dots, n-1$. Таким образом, доказано неравенство (3.40), из которого следует утверждение леммы.

Теперь сформулируем основной результат сходимости.

Теорема 3.3. Пусть $\{(p_h^n, \sigma_h^n)\}_{n=0}^N$, $p_h^n \in V_h$, $\sigma_h^n \in V_h$ – решение задачи 3.3, а $\{(p^n, \sigma^n)\}_{n=0}^N$, $p^n \in H_0^1(\Omega)$, $\sigma^n \in H_0^1(\Omega)$ – решение задачи 3.1. Тогда

$$\|p(t_n) - p_h^n\| + \tau^{\alpha/2} \|\sigma(t_n) - \sigma_h^n\| \leq C(\tau^{4-\alpha} + h^{k+1}).$$

Доказательство. Утверждение этой теоремы непосредственно следует из (3.24), (3.25), неравенства треугольника, леммы 3.1 и леммы 3.2.

3.2.8 Верификация порядка сходимости на основе вычислительных экспериментов

Пример 3.1. В области $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times \bar{J}$, где $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $J = (0,1]$ рассматривается задача

$$\begin{aligned} & \partial_{0,t}^\alpha (p - \mu \nabla^2 p) - \lambda \nabla^2 p + \chi \nabla^2 (\nabla^2 p) = f(x, t), \\ & f(x, t) = \left[64 \chi \pi^2 t^4 + \frac{t^{4-\alpha} (192 \mu \pi^2 + 24)}{\Gamma(1-\alpha) (\alpha^4 - 10\alpha^3 + 35\alpha^2 - 50\alpha + 24)} + \right. \\ & \left. + 8 \lambda \pi^2 t^4 \right] \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2), \quad (x, t) \in \Omega \times J, \\ & p(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \\ & p(x, t) = \nabla^2 p(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times J, \end{aligned}$$

где $\chi = \mu = \lambda = 1$. Точное решение задачи $p(x, t) = t^4 \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2)$.

Вычислительные эксперименты проведены согласно методике, описанной в подразделе 1.2.8. Величины погрешности и эмпирические порядки сходимости, соответствующие различным значениям порядков дробной производной $\alpha = \{0.25, 0.5, 0.9\}$, представлены в таблице 3.1. В последней строке таблицы указаны теоретические порядки сходимости, полученные в теореме 3.3. Результаты вычислительных экспериментов полностью подтверждают результаты теоретического анализа.

Таблица 3.1 – L^2 -погрешности и порядки сходимости для примера 3.1 для различных порядков дробной производной α . В последней строке таблицы указаны теоретические порядки сходимости

τ	$\alpha = 0.25$		$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.9$	
	L^2 - погрешность	Порядок	L^2 - погрешность	Порядок	L^2 - погрешность	Порядок
1/10	1.0769×10^{-6}	–	4.2962×10^{-6}	–	2.5353×10^{-5}	–
1/20	8.2671×10^{-8}	3.70	3.8407×10^{-7}	3.48	2.9734×10^{-6}	3.09
1/30	1.8081×10^{-8}	3.75	9.2911×10^{-8}	3.50	8.4351×10^{-7}	3.11
1/40	6.1492×10^{-9}	3.75	3.3929×10^{-8}	3.50	3.4348×10^{-7}	3.12
1/50	2.6638×10^{-9}	3.75	1.5530×10^{-8}	3.50	1.7192×10^{-7}	3.10
1/60	1.3447×10^{-9}	3.75	8.2000×10^{-9}	3.50	9.7666×10^{-8}	3.10
Теор.		3.75		3.50		3.10

3.3 Выводы по третьему разделу

Таким образом, на основе проведенного теоретического анализа и результатов вычислительных экспериментов можно сделать следующие выводы:

1) На основании теоремы 3.1 можно заключить, что решение задачи 3.1 единственно и непрерывно зависит от входных данных.

2) Вычислительный метод, построенный в подразделе 3.2.4, позволяет получить приближенное решение повышенного порядка $O(\tau^{4-\alpha} + h^{k+1})$, $\alpha \in (0,1)$. Результаты вычислительных экспериментов, проведенные для различных конфигураций сетки и различных порядков дробных производных, хорошо согласуются с результатами теоретического анализа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в диссертационной работе получены следующие результаты.

1. Рассмотрена начально-краевая задача для дробно-дифференциального уравнения фильтрации в трещиновато-пористых средах в предположении, что трещины распределены в среднем равномерно по объему. Рассмотрено четыре частных случая задачи в зависимости от порядков дробных производных. Доказана единственность решения и его непрерывная зависимость от входных данных. Построены конечно-элементные методы решения задачи. Методом априорных оценок строго доказаны их устойчивость по начальным данным и правой части уравнения, сходимость приближенного решения к решению исходной дифференциальной задачи, определен порядок сходимости построенных вычислительных схем. Проведены многочисленные вычислительные эксперименты для подтверждения теоретического порядка сходимости схем. Один из предлагаемых вычислительных методов применен к исследованию процесса фильтрации в трещиновато-пористой среде. Из результатов вычислительных экспериментов сделан вывод о том, что пористая среда оказывает тормозящее влияние на процесс течения, а порядки дробных производных определяют степень влияния памяти на поведение течения.

2. Рассмотрена начально-краевая задача для нелинейного дробно-дифференциального уравнения фильтрации, описывающего переходный (нестационарный) режим. Доказана единственность решения и его непрерывная зависимость от входных данных. Построен итерационный метод Ньютона для решения задачи на основе конечно-элементной аппроксимации в пространственном направлении и конечно-разностного метода повышенного порядка. Методом априорных оценок строго доказана устойчивость метода по начальным данным и правой части уравнения, сходимость приближенного решения к решению исходной дифференциальной задачи, определен порядок сходимости построенных вычислительных схем. Исследована сходимость итерационного метода Ньютона, определены достаточные условия его квадратичной сходимости. Проведены вычислительные эксперименты для подтверждения теоретического порядка сходимости предлагаемой схемы.

3. Рассмотрена начально-краевая задача для дробно-дифференциального уравнения фильтрации четвертого порядка по пространственной переменной в трещиновато-пористых средах в предположении существования двух континуумов – системы трещин и матрицы. Доказана единственность решения и его непрерывная зависимость от входных данных. Построен конечно-элементный метод решения задачи повышенного порядка. Методом априорных оценок строго доказаны его устойчивость по начальным данным и правой части уравнения, сходимость приближенного решения к решению исходной дифференциальной задачи, определен порядок сходимости построенных вычислительных схем. Проведены многочисленные вычислительные эксперименты для подтверждения теоретического порядка сходимости

предлагаемой схемы.

Выводы, полученные в данной работе, могут быть использованы при решении других классов дифференциальных уравнений дробного порядка порядка, принадлежащего интервалу $(0,2)$ и содержащие производные четвертого порядка по пространственной переменной. Результаты представленной работы могут быть положены в основу дальнейших исследований в этом направлении. Например, естественным продолжением диссертационного исследования является исследование многомерных моделей течения жидкости в трещиновато-пористой среде с фрактальной геометрией трещин и моделей течения многофазной жидкости с пространственными дробными производными.

Диссертационное исследование выполнено при поддержке грантового финансирования молодых ученых на 2020-2022 годы в рамках научно-исследовательской работы «Разработка и исследование параллельных конечно-элементных методов решения нелинейных задач многофазной фильтрации» (ИРН АР08053189).

Кроме того, исследование будет продолжено в научно-исследовательской работе «Проекционные методы решения нелинейных дробно-дифференциальных уравнений фильтрации с переменным порядком дробной производной» (ИРН АР14972807) в рамках программы грантового финансирования исследований молодых ученых по проекту «Жас ғалым» на 2022-2024 годы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Muskat M., Meres M. W. The flow of heterogeneous fluids through porous media // *Physics*. – 1936. – № 7. – P. 346–363.
- 2 Leverett V. C. Flow of oil-water mixtures through unconsolidated sands // *Trans AIME*. – 1939. – № 132. – P. 381–401.
- 3 Darcy H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions. – Paris: V. Dalmont, 1856. – P. 647.
- 4 Berkowitz B. Characterizing flow and transport in fractured geological media: A review // *Advances in Water Resources*. – 2002. – Vol. 25, № 8-12. – P. 861–884.
- 5 Hoteit H., Firoozabadi A. An efficient numerical model for incompressible two-phase flow in fractured media // *Advances in Water Resources*. – 2008. – Vol. 31. – P. 891–905.
- 6 Ma J. Review of permeability evolution model for fractured porous media // *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*. – 2015. – Vol. 7, № 3. – P. 351–357.
- 7 De Borst R. Fluid flow in fractured and fracturing porous media: A unified view // *Mechanics Research Communications*. – 2017. – Vol. 80. – P. 47–57.
- 8 Berre I., Doster F., Keilegavlen E. Flow in fractured porous media: A review of conceptual models and discretization approaches // *Transport in Porous Media*. – 2019. – Vol. 130. – P. 215–236.
- 9 Lee J., Choi S.-U., Cho W. A comparative study of dual-porosity model and discrete fracture network model // *Water Engineering*. – 1999. – Vol. 3. – P. 171–180.
- 10 Moinfar A., Narr W., Hui M.-H., Mallison B., Lee S. H. Comparison of discrete-fracture and dual-permeability models for multiphase flow in naturally fractured reservoirs // *SPE Reservoir Simulation Symposium*. – 2011. – № SPE 142295. – P. 1–17.
- 11 Torres F., Xavier M., Ailin J., Wei Yu., Yunsheng W., Junlei W., Xie H., Li N., Miao J. Comparison of dual porosity dual permeability with embedded discrete fracture model for simulation fluid flow in naturally fractured reservoirs // *54th U.S. Rock Mechanics/Geomechanics Symposium*, 2020. – № ARMA-2020-1462.
- 12 Moës N., Dolbow J., Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing // *International journal for numerical methods in engineering*. – 1999. – Vol. 46, № 1. – P. 131–150.
- 13 Rabczuk T., Belytschko T. Cracking particles: a simplified meshfree method for arbitrary evolving cracks // *International journal for numerical methods in engineering*. – 2004. – Vol. 61, № 13. – P. 2316–2343.

- 14 Zhang Y., Zhuang X. Cracking elements: A self-propagating Strong Discontinuity embedded Approach for quasi-brittle fracture // *Finite Elements in Analysis and Design*. – 2018. – Vol. 144. – P. 84–100.
- 15 Bourdin B., Francfort G. A., Marigo J. The variational approach to fracture // *Journal of Elasticity*. – 2008. – Vol. 91. – P. 5-148.
- 16 Mikelić A., Wheeler M. F., Wick T. Phase-field modeling of a fluid-driven fracture in a poroelastic medium // *Computers & Geosciences*. – 2015. – Vol. 19, № 6. – P. 1171–1195.
- 17 Santillán D., Juanes R., Cueto-Felgueroso L. Phase field model of hydraulic fracturing in poroelastic media: Fracture propagation, arrest, and branching under fluid injection and extraction // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. – 2018. – Vol. 123, № 3. – P. 2127–2155.
- 18 Zhou S., Zhuang X., Rabczuk T. Phase-field modeling of fluid-driven dynamic cracking in porous media // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2019. – Vol. 350. – P. 169–198.
- 19 Teichtmeister S., Kienle D., Aldakheel F., Keip M.-A. Phase field modeling of fracture in anisotropic brittle solids // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2017. – Vol. 97. – P. 1–21.
- 20 Nguyen T., Réthoré J., Baietto M. Phase field modelling of anisotropic crack propagation // *European Journal of Mechanics - A/Solids*. – 2017. – Vol. 65. – P. 279–288.
- 21 Noii N., Fan M., Wick T., Jin Y. A quasi-monolithic phase-field description for orthotropic anisotropic fracture with adaptive mesh refinement and primal-dual active set method // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2021. – Vol. 258, № 108060. – P. 1-61.
- 22 Neitzel I., Wick T., Wollner W. An optimal control problem governed by a regularized phase-field fracture propagation model // *SIAM Journal on Control and Optimization*. — 2017. — Vol. 55, № 4. — P. 2271–2288.
- 23 Lee S., Min B., Wheeler M. Optimal design of hydraulic fracturing in porous media using the phase field fracture model coupled with genetic algorithm// *Computers & Geosciences*. – 2018. – Vol. 22, № 3. – P. 833–849.
- 24 Газизов Р. К., Лукашук С. Ю. Дробно-дифференциальный подход к моделированию процессов фильтрации в сложных неоднородных пористых средах // *Вестник УГАТУ*. – 2017. – Т. 21, № 4. – С. 104–112.
- 25 Zhong W., Li C., Kou J. Numerical Fractional-Calculus Model for Two Phase Flow in fractured media // *Advances in Mathematical Physics*. – 2013. – Vol. 2013, № 429835. – P. 1–7.
- 26 Beybalaev V. D., Abduragimov E. I., Yakubov A. Z., Meilanov R. R., Aliverdiev A. A. Numerical research of non-isothermal filtration process in fractal medium with non-locality in time // *Thermal Science*. – 2021. – Vol. 25, № 1B. – P. 465–475.

- 27 Peszynska M. Analysis of an integro-differential equation arising from modelling of flows with fading memory through fissured media // *Journal of Partial Differential Equations*. – 1995. – Vol. 8, № 2. – P. 195–173.
- 28 Caputo M. Models of flux in porous media with memory // *Water Resources Research*. – 2000. – Vol. 36, № 3. – P. 693–705.
- 29 Di Giuseppe E., Moroni M., Caputo M. Flux in porous media with memory: models and experiments // *Transport in Porous Media*. – 2010. – Vol. 83, № 3. – P. 479–500.
- 30 Hossain M. E. Numerical investigation of memory-based diffusivity equation: the integro-differential equation // *Arabian Journal for Science and Engineering*. – 2016. – Vol. 41, № 7. – P. 1–15.
- 31 Caffarelli L., Vazquez J. L. Nonlinear porous medium flow with fractional potential pressure // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 2011. – Vol. 202, № 2. – P. 537–565.
- 32 Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Yu. Symmetries and exact solutions of fractional filtration equations // *AIP Conference Proceedings*. – 2017. – P. 1–9.
- 33 Meilanov R. R., Akhmedov E. N., Beybalaev V. D., Magomedov R. A., Ragimkhanov G. B., Aliverdiev A. A. To the theory of non-local non-isothermal filtration in porous medium // *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*. – 2018. – P. 1–8.
- 34 Hashan M., Jahana L. N., Zaman T. U., Imtiaz S., Hossain M. E. Modelling of fluid flow through porous media using memory approach: A review // *Mathematics and Computers in Simulation*. – 2020. – Vol. 177. – P. 643–673.
- 35 He J. H. Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media. // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 1998. – Vol. 167, № 1. – P. 57–88.
- 36 Li J., Jiang T. Q. Constitutive equation for viscoelastic fluids via fractional derivative. – *Advances in Structured and Heterogeneous Continua*. Allerton Press, 1994.
- 37 Oliveira E., Machado J. A review of definitions for fractional derivatives and integral // *Mathematical Problems in Engineering*. – 2014. – Vol. 2014, № 238459.
- 38 Teodoro G., Machado J., Oliveira E. A Review of definitions of fractional derivatives and other operators // *Journal of Computational Physics*. – 2019. – № 388. – P. 195–208.
- 39 Caputo M. Diffusion of fluids in porous media with memory // *Geothermics*. – 1999. – Vol. 23. – P. 113–130.
- 40 Bohaienko V., Bulavatsky V. Mathematical modeling of solutes migration under the conditions of groundwater filtration by the model with the Caputo fractional derivative // *Fractal and Fractional*. – 2018. – Vol. 2, № 28. – P. 1–10.

- 41 Atangana A. Fractional operators with constant and variable order with application to geo-hydrology. – London: Academic Press, Elsevier, 2018. – P. 414.
- 42 Prajapati J. C., Patel A. D., Pathak K. N., Shukla A. K. Fractional calculus approach in the study of instability phenomenon in fluid dynamics // Palestine Journal of Mathematics. – 2012. – № 1. – P. 95–103.
- 43 Obembe A. D., Al-Yousef H. Y., Hossain M. E., Abu-Khamsin S. Fractional derivatives and their applications in reservoir engineering problems: A review // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2017. – Vol. 157. – P. 312–327.
- 44 Agarwal R., Yadav M. P., Baleanu D., Purohit S. D. Existence and uniqueness of miscible flow equation through porous media with a non singular fractional derivative // AIMS Mathematics. – 2020. – Vol. 5, № 2. – P. 1062–1073.
- 45 Zhou H. W., Yang S., Zhang S. Q. Modeling of non-darcian flow and solute transport in porous media with Caputo-Fabrizio derivative // Applied Mathematical Modelling. – 2019. – Vol. 68. – P. 603–615.
- 46 Wei Q., Zhou H., Yang S. Non-Darcy flow models in porous media via Atangana-Baleanu derivative // Chaos, Solitons Fractals. – 2020. – Vol. 141, № 110335 – P. 1–8.
- 47 Bulavatsky V. M. Solutions of some problems of fractional-differential filtration dynamics based on models with ABC-fractional derivative // Cybernetics and Systems Analysis. – 2017. – Vol. 53, № 2. – P. 732–742.
- 48 Choudharya A., Kumar D., Singh J. A fractional model of fluid flow through porous media with mean capillary pressure // Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences. – 2016. – Vol. 21, № 59. – P. 59–63.
- 49 Al-Homidan S., Ghanam R. A., Tatar N. On a generalized diffusion equation arising in petroleum engineering // Advances in Continuous and Discrete Models. – 2013. – № 2013:349. – P. 1-14.
- 50 Chang A., Sun H., Zhang Y., Zheng C., Min F. Spatial fractional Darcy's law to quantify fluid flow in natural reservoirs // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2019. – № 519. – P. 119–126.
- 51 Heymans N., Podlubny I. Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives // Rheologica Acta. – 2006. – № 45. – P. 765–771.
- 52 Caputo M., Fabrizio M. A New Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel // Progress in Fractional Differentiation and Applications. – 2015. – Vol. 2. – P. 73–85.
- 53 Tarasov V. E. Caputo-Fabrizio operator in terms of integer derivatives: memory or distributed lag? // Computational and Applied Mathematics. – 2019. – № 38:113. – P. 1-15.

54 El Amin M. F., Radwan A. G., Sun S. Analytical solution for fractional derivative gas-flow equation in porous media // *Results in Physics*. – 2017. – Vol. 7. – P. 2432–2438.

55 Ray S. S. Exact solutions for time-fractional diffusion-wave equations by decomposition method // *Physica Scripta*. – 2007. – Vol. 75. – P. 53–61.

56 Zhang Y. N., Sun Z. Z., Liao H. L. Finite difference methods for the time fractional diffusion equation on non-uniform meshes // *Journal of Computational Physics*. – 2014. – Vol. 265. – P. 195–210.

57 Alikhanov A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // *Journal of Computational Physics*. – 2015. – Vol. 280. – P. 424–438.

58 Qiao H. L., Liu Z. G., Cheng A. J. Two unconditionally stable difference schemes for time distributed-order differential equation based on Caputo–Fabrizio fractional derivative // *Advances in Difference Equations*. – 2020. – Vol. 2020. – P. 1–17.

59 Du R., Cao W. R., Sun Z. Z. A compact difference scheme for the fractional diffusion-wave equation // *Applied Mathematical Modelling*. – 2010. – Vol. 34. – P. 2998–3007.

60 Huang J., Tang Y., Wang W., Yang J. A compact difference scheme for time fractional diffusion equation with Neumann boundary conditions // *Communications in Computer and Information Science*. – 2012. – Vol. 323. – P. 273–284.

61 Xu T., Lu S., Chen W., Chen H. Finite difference scheme for multiterm variable-order fractional diffusion equation // *Advances in Difference Equations*. – 2018. – Vol. 1. – P. 1–13.

62 Liu J., Zhou Z. Finite element approximation of time fractional optimal control problem with integral state constraint // *AIMS Mathematics*. – 2020. – Vol. 6, № 1. – P. 979–997.

63 Zhang C., Liu H., Zhou Z. J. A priori error analysis for time-stepping discontinuous Galerkin finite element approximation of time fractional optimal control problem // *Journal of Scientific Computing*. – 2019. – Vol. 80. – P. 993–1018.

64 Liu K., Feckan M., O’Regan D., Wang J. R. Hyers–Ulam stability and existence of solutions for differential equations with Caputo–Fabrizio fractional derivative // *Mathematics*. – 2019. – Vol. 7, № 333. – P. 1–14.

65 Liu Y., Du Y., Li H., Li J., He S. A two-grid mixed finite element method for a nonlinear fourth-order reaction-diffusion problem with time fractional derivative // *Computers and Mathematics with Application*. – 2015. – Vol. 70. – P. 2474–2492.

66 Liu F., Zhuang P., Turner I., Burrage K., Anh V. A new fractional finite volume method for solving the fractional diffusion equation // *Applied Mathematical Modelling*. – 2013. – Vol. 38. – P. 3871–3878.

67 Wang S., Zhao M. Analytical solution of the transient electro-osmotic flow of a generalized fractional Maxwell fluid in a straight pipe with a circular cross-section // *European Journal of Mechanics-B/Fluid*. – 2015. – Vol. 54. – P. 82–86.

68 Coronel-Escamilla A., Gomez-Aguilar J.F., Torres L., Escobar Jimenez R. F. A numerical solution for a variable-order reaction-diffusion model by using fractional derivatives with non-local and non-singular kernel // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. – 2017. – Vol. 491. – P. 406–424.

69 Mallawi F., Alzaidy J. F., Hafez R. M. Application of a Legendre collocation method to the space–time variable fractional-order advection–dispersion equation // *Journal of Taibah University for Science*. – 2019. – Vol. 13, № 1. – P. 324–330.

70 Oldham K. B., Spanier J. *The Fractional Calculus*. – New York: Academic Press, 1974.

71 Lin Y., Xu C. Finite difference/spectral approximations for the time fractional diffusion equation // *Journal of Computational Physics*. – 2007. – Vol. 225. – P. 1533–1552.

72 Jin B., Lazarov R., Zhou Z. An analysis of the L1 scheme for the subdiffusion equation with nonsmooth data // *IMA Journal of Numerical Analysis*. – 2016. – Vol. 36, № 1. – P. 197–221.

73 Yan Y., Khan M., Ford N. An Analysis of the Modified L1 Scheme for Time-Fractional Partial Differential Equations with Nonsmooth Data // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 2018. – Vol. 56, № 1. – P. 210–227.

74 Siddiqi S., Arshed S. Numerical solution of time-fractional fourth-order partial differential equations // *International Journal of Computer Mathematics*. – 2014. – Vol. 92, № 7. – P. 1496–1518.

75 Gao G. H., Sun Z. Z., Zhang H. W. A new fractional numerical differentiation formula to approximate the Caputo fractional derivative and its applications // *Journal of Computational Physics*. – 2014. – Vol. 259. – P. 33–50.

76 Cao J., Li C., Chen Y. High-order approximation to Caputo derivatives and Caputo-type advection-diffusion equations (II) // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. – 2015. – Vol. 18, № 3. – P. 735–761.

77 Xuhao L. Numerical methods for fractional differential equations: Ph.D. thesis; Nanyang Technological University. – Singapore, 2018.

78 Mainardi F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An introduction to mathematical models*. – Singapore: Imperial College Press, 2010. – P. 367.

79 Schneider W. R., Wyss W. Fractional diffusion and wave equations // *Journal of Mathematical Physics*. – 1989. – Vol. 30, № 1. – P. 134–144.

80 Luchko Y., Mainardi F., Povstenko Y. Propagation speed of the maximum of the fundamental solution to the fractional diffusion-wave equation // *Computers, Mathematics with Applications*. – 2013. – Vol. 66, № 5. – P. 774–784.

81 Lynch V.E., Carreras B.A., Del-Castillo-Negrete D., Ferreira Mejias K. M., Hicks H.R. Numerical methods for the solution of partial differential equations of fractional order // *Journal of Computational Physics*. – 2003. – Vol. 192, № 2. – P. 406–421.

- 82 Du R., Yan Y., Liang Z. A high-order scheme to approximate the Caputo fractional derivative and its application to solve the fractional diffusion wave equation // *Journal of Computational Physics*. – 2019. – Vol. 376. – P. 1312–1330.
- 83 Agrawal O. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain // *Nonlinear Dynamics*. – 2002. – Vol. 29, № 1. – P. 145–155.
- 84 Sun Z., Wu X. A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system // *Applied Numerical Mathematics*. – 2006. – Vol. 56, № 2. – P. 193–209.
- 85 Zeng F. Second-Order Stable Finite Difference Schemes for the Time Fractional Diffusion-Wave Equation // *Journal of Scientific Computing*. – 2014. – Vol. 65, № 1. – P. 411–430.
- 86 Delić A., Jovanović B., Živanović S. Finite difference approximation of a generalized time-fractional telegraph equation // *Computational Methods in Applied Mathematics*. – 2019. – Vol. 20, № 4. – P. 595–607.
- 87 Kumar A., Bhardwaj A., Dubey S. A local meshless method to approximate the time-fractional telegraph equation // *Engineering with Computers*. – 2020. – Vol. 37, № 4. – P. 3473–3488.
- 88 Zhang Y. D., Zhao Y. M., Wang F. L., Tang Y. F. High-accuracy finite element method for 2D time fractional diffusion-wave equation on anisotropic meshes // *International Journal of Computer Mathematics*. – 2017. – Vol. 95, № 1. – P. 218–230.
- 89 Zhao Z., Li C. Fractional difference/finite element approximations for the time–space fractional telegraph equation // *Applied Mathematics and Computation*. – 2012. – Vol. 219, № 6. – P. 2975–2988.
- 90 Wang Y., Mei L. Generalized finite difference/spectral Galerkin approximations for the time-fractional telegraph equation // *Advances in Difference Equations*. – 2017. – Vol. 2017, № 2017:281. – P. 1–16.
- 91 Tasbozan O., Esen A. Collocation solutions for the time fractional telegraph equation using cubic B-spline finite elements // *Annals of West University of Timisoara - Mathematics and Computer Science*. – 2019. – Vol. 57, № 2. – P. 131–144.
- 92 Alcántara-López F., Fuentes C., Brambila-Paz F., López-Estrada J. Quasi-analytical model of the transient behavior pressure in an oil reservoir made up of three porous media considering the fractional time derivative // *Mathematical and Computational Applications*. – 2020. – Vol. 25, № 74. – P. 1-21.
- 93 Ansari S. U., Hussain M., Rashid A., Mazhar S., Ahmad S. M. Numerical solution and analysis of three-dimensional transient Darcy flow // *transport in porous media*. – 2018. – Vol. 123. – P. 289–305.
- 94 Chueh C. Integrated adaptive numerical methods for transient twophase flow in heterogeneous porous media: Ph.D. thesis; University of Victoria. – Canada, 2010. – P. 171.
- 95 Lewis R. W., Nithiarasu P., Seetharamu K. Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow. – Hoboken: Wiley, 2004. –P. 356.

96 Liu Y., Du Y., Li H., He S., Gao W. Finite difference/finite element method for a nonlinear time-fractional fourth-order reaction–diffusion problem // *Computers, Mathematics with Applications*. – 2015. – Vol. 70, № 4. – P. 573–591.

97 Baigereyev D., Alimbekova N., Berdyshev A., Madiyarov M. Convergence analysis of a numerical method for a fractional model of fluid flow in fractured porous media // *Mathematics*. – 2021. – Vol. 9, № 2179. – P. 1–24.

98 Alimbekova N., Berdyshev A., Baigereyev D. A priori estimates for the solution of an initial boundary value problem of fluid flow through fractured porous media // *Axioms*. – 2022. – Vol. 8, № 408. – P. 1–20.

99 Baigereyev D., Berdyshev A., Alimbekova N. Galerkin approximations for an initial boundary problem of transient flow in fractured porous media // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2022. – Vol. 43, № 11. – P. 3048–3056.

100 Бердышев А. С., Байгереев Д. Р., Алимбекова Н. Б. Численное решение дифференциального уравнения дробного порядка // *Вестник КазНПУ. Физико-математические науки*. – 2019. – № 4 (68). – С. 18–25.

101 Алимбекова Н. Б., Байгереев Д. Р., Мадияров М. Н. Исследование численного метода решения краевой задачи для дифференциального уравнения с дробной производной по времени // *Известия Алтайского государственного университета*. – 2020. – Т. 114, № 4. – С. 64–69.

102 Alimbekova N. B., Oskorbin N. M. Study of the initial boundary value problem for a two-dimensional convection-diffusion equation with a fractional time derivative in the sense of Caputo-Fabrizio // *Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика*. – 2021. – № 2(110). – С. 113–127.

103 Alimbekova N. B. Numerical implementation of a nonlinear model of fluid flow in a highly fractured medium by the finite element method // *Вестник НИА РК*. – 2021. – № 3 (81). – С. 8–17.

104 Baigereyev D. R., Alimbekova N. B. Analysis of the numerical solution of the three-phase nonisothermal fluid flow problem // *Вестник НИА РК*. – 2022. – № 2 (84). – С. 145–155.

105 Baigereyev D. R., Alimbekova N. B., Oskorbin N. M. Error estimates of the numerical method for the filtration problem with Caputo-Fabrizio fractional derivatives // *Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика*. – 2022. – № 2 (114). – С. 101–116.

106 Alimbekova N. B., Baigereyev D. R., Berdyshev A. S. Finite element method for solving a fractional flow model in porous media // *Вестник КазНПУ. Серия Физико-математические науки*. – 2022. – № 1(77). – С. 7–14.

107 Alimbekova N. B., Berdyshev A. S., Baigereyev D. R. Study of initial boundary value problem for two-dimensional differential equation with fractional time derivative in the sense of Caputo // *Third International Conference on Material Science, Smart Structures and Applications (ICMSS 2020)*. – 2021. – P. 1–6.

108 Alimbekova N. B., Berdyshev A. S., Baigereyev D. R. Parallel Implementation of the Algorithm for Solving a Partial Differential Equation with a

Fractional Derivative in the Sense of Riemann-Liouville // 2021 IEEE International Conference on Smart Information Systems and Technologies (SIST). – 2021. – P. 1–6.

109 Мадияров М. Н., Ергалиев Е. К., Алимбекова Н. Б. Моделирование процесса загрязнения воздушного бассейна промышленного города // Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и техники: сб. науч. ст. междунар. конф. – 2018. – С. 620–623.

110 Бердышев А. С., Мадияров М. Н., Алимбекова Н. Б. Моделирование процессов на основе уравнений с частными производными дробного порядка // Математики - Алтайскому краю: Сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием (МАК-2019). – 2019. – С. 234–237.

111 Байгереев Д. Р., Алимбекова Н. Б. Об одном методе численного решения дифференциального уравнения дробного порядка // Сб. матер. Межд. науч.-практ. конф. «Ұлы дала ұстазы». – 2020. – С. 292–296.

112 Алимбекова Н. Б., Байгереев Д. Р., Ергалиев Е. К. Численное решение уравнений диффузии-конвекции с дробной производной по времени // Творчество молодых – инновационному развитию Казахстана: Материалы VI Междунар. науч.-техн. конф. – 2020. – С. 36–39.

113 Алимбекова Н. Б., Байгереев Д. Р., Ергалиев Е. К. Построение методов решения задачи фильтрации в сильнопористых трещиноватых пластах // Математики - Алтайскому краю: Сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием (МАК-2020). – 2020. – С. 3–7.

114 Alimbekova N., Baigereyev D., Yergaliyev Ye. Finite element method for solving a fractional flow model in porous media // Совместный выпуск журналов «Вестник НИА РК» и «Вычислительные технологии» по материалам международной конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании» (СITESH 2020). – 2020. – № 3 (1). – С. 48–53.

115 Алимбекова Н. Б., Байгереев Д. Р., Салыков Р. М. Численное решение уравнения колебания-диффузии с дробной производной Капуто // Математики - Алтайскому краю: Сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием (МАК-2021). – 2021. – С. 76–80.

116 Байгереев Д. Р., Алимбекова Н. Б. Конечно-элементный метод решения задачи трехфазной неизотермической фильтрации сжимаемой жидкости с учетом фазовых переходов // Математики - Алтайскому краю: Сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием (МАК-2022). – 2022. – С. 211–215.

117 Baigereyev D., Alimbekova N., Berdyshev A. Numerical methods for fractional models of fluid flow in fractured porous media // Abstract of the Uzbekistan-Malaysia International Conference «Computational Models and Technologies (CMT2022)». – 2022. – С. 24–25.

118 Baigereyev D., Alimbekova N. Parallel implementation of the algorithm for solving the problem of fluid flow in fractured porous media // Abstract of the Uzbekistan-Malaysia International Conference «Computational Models and Technologies (CMT2022)». – 2022. – P. 23–24.

119 Байгереев Д. Р., Алимбекова Н. Б. Теоретический анализ ускорения алгоритма решения задачи фильтрации в трещиновато-пористых средах на графических процессорах // Сб. Матер. Междун. науч.-практ. конф. «Увалиевские чтения-2022. Актуальные проблемы науки и образования в условиях современных вызовов». – 2022. – С. 38–43.

120 Алимбекова Н. Б., Байгереев Д. Р., Бердышев А. С. О дробно-дифференциальных моделях фильтрации и основных подходах к построению проекционных методов их реализации // Сб. Матер. Междун. науч. практ. конф. «Увалиевские чтения-2022. Актуальные проблемы науки и образования в условиях современных вызовов». – 2022. – С. 17–22.

121 Baigereyev D. R., Alimbekova N. B., Baishemirov Z. D. Theoretical estimation of parallel algorithms for problems of multiphase flow in porous media // Abstract book of the International Conference «Computational and Information Technologies in Science, Engineering and Education (CITech-2022)». – 2022. – P. 10.

122 Байгереев Д. Р., Алимбекова Н. Б. Фильтрация есептерін шешудің ақырлы элементті әдістері: оқу құралы. – Өскемен: С. Аманжолов атындағы ШҚУ «Берел» баспасы, 2022. – 109 б.

123 Байгереев Д. Р., Алимбекова Н. Б., Ергалиев Е. К., Омариева Д. А., Боранбек К. Программный пакет для параллельной реализации дробно-дифференциальной модели фильтрации на графических процессорах (программа для ЭВМ). Авторское свидетельство №24391 от 16.03.2022 г., выданное РГП «Национальный институт интеллектуальной собственности» МЮ РК.

124 Байгереев Д. Р., Алимбекова Н. Б. Программный комплекс для проведения вычислительных экспериментов по решению задач фильтрации методом конечных элементов (программа для ЭВМ). Авторское свидетельство №29452 от 14.10.2022 г., выданное РГП «Национальный институт интеллектуальной собственности» МЮ РК.

125 Yu F., Chen M. Finite difference/spectral approximations for the two-dimensional time Caputo-Fabrizio fractional diffusion equation // arXiv [math.NA]. – 2019. – № 1906.00328v1.

126 Chen Z. Reservoir simulation: mathematical techniques in oil recovery. – SIAM, Philadelphia, 2007. – P. 350.

127 Caputo M. Lineal model of dissipation whose Q is almost frequency independent // II. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. – 1967. – Vol. 13. – P. 529–539.

- 128 Atangana A. Extension of rate of change concept: From local to nonlocal operators with applications // *Results in Physics*. – 2020. – Vol. 19, № 103515. – P. 1–52.
- 129 Ouyang Y., Wang W. Comparison of definition of several fractional derivatives // 2016 6th International Conference on Education, Management and Computer Science (ICEMC 2016). – 2016. – P. 553–557.
- 130 Prieur F., Holm S. Nonlinear acoustic wave equations with fractional loss operators // *Journal of the Acoustic Society of America*. – 2011. – Vol. 130, № 3. – P. 1125–1132.
- 131 Adams R. Sobolev spaces. – New York : Academic Press, 1975.
- 132 Alikhanov A. A. A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations // *Differential Equations*. – 2010. – Vol. 46. – P. 660–666.
- 133 Shen J. On error estimates of the penalty method for unsteady Navier-Stokes equations // *SIAM Journal of Numerical Analysis*. – 1995. – Vol. 32. – P. 386–403.
- 134 Brezzi F., Fortin M. Mixed and hybrid finite element methods. – New-York: Springer, 1991. – P. 350.
- 135 Istok J. Groundwater modeling by the finite element method. – Wiley, 2013. – P. 495.
- 136 Radu F. A., Pop I. S. Simulation of reactive contaminant transport with non-equilibrium sorption by mixed finite elements and Newton method // *Computational Geosciences*. – 2011. – Vol. 15, № 3. – P. 431–450.
- 137 Akman T., Yıldız B., Baleanu D. New discretization of Caputo– Fabrizio derivative // *Computational and Applied Mathematics*. – 2017. – Vol.37, № 3. – P. 3307–3333.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
Выполнение диссертационного исследования в рамках госбюджетной научно-исследовательской работы

Министерство науки и высшего образования Республики Казахстан
НЕКОММЕРЧЕСКОЕ АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО «ВОСТОЧНО-КАЗАХСТАНСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ САРСЕНА АМАНЖОЛОВА»
(НАО ВКУ им. С. Аманжолова)

УДК 519.635; 519.688

МРНТИ 27.41.41, 27.41.19, 27.35.25,
27.35.21, 27.31.21

№ госрегистрации 0120РК00146

Инв. №

«УТВЕРЖДАЮ»


Председатель правления-ректор
им. С. Аманжолова, профессор
М. Ә. Төлеген
_____ 2022 г.




ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ
МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ
(Заключительный)

Заместитель председателя правления-проректор
по стратегическому развитию
и научной работе, к.п.н.


_____ И. В. Ровнякова
« 26 » _____ 2022 г.


Руководитель НИР, Ph.D.


_____ Д. Р. Байгереев
« 26 » _____ 2022 г.

Усть-Каменогорск 2022

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель НИР,
ведущий научный
сотрудник, Ph.D.


« 26 » 10 2022 г. Д. Р. Байгереев
(реферат, введение, разделы 2, 3,
4, 6, заключение)

Исполнители темы:


Ст. науч. сотр., к.ф.-м.н.


« 26 » 10 2022 г. Е. К. Ергалиев
(разделы 1, 2, 5)

Ст. науч. сотр., Ph.D.


« 26 » 10 2022 г. А. Н. Темирбеков
(раздел 4)


Науч. сотр.


« 26 » 10 2022 г. Н. Б. Алимбекова
(разделы 1, 2, 3, 4,
нормоконтроль)

Мл. науч. сотр.


« 26 » 10 2022 г. Д. А. Омариева
(раздел 2)

Инженер


« 26 » 10 2022 г. Р. М. Сальков
(раздел 4)

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Задача фильтрации в трещиновато-пористой среде с дробной производной в смысле Капуто-Фабрицио

Рассмотрим начально-краевую задачу для дробно-дифференциального уравнения фильтрации в трещиновато-пористой среде, исследованной в разделе 1, в которой вместо дробной производной в смысле Капуто используется дробная производная в смысле Капуто-Фабрицио.

Постановка задачи

В области $Q_T = \bar{\Omega} \times \bar{J}$, где $\Omega = (0,1)$, $J = (0,T]$, рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{c}_{\phi\alpha} \frac{\partial^{\alpha+1} u}{\partial t^{\alpha+1}} + \bar{c}_{f\beta} \frac{\partial^{\beta+1} u}{\partial t^{\beta+1}} - \left(F \left(\frac{\partial^\gamma u_x}{\partial t^\gamma} \right) \right)_x = \bar{f}_0, \quad (x,t) \in \Omega \times J, \quad (\text{Б.1})$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in J, \quad (\text{Б.2})$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (\text{Б.3})$$

где $\alpha, \beta \in (-1,0)$, $\gamma \in (0,1)$, $\bar{c}_{\phi\alpha}$, $\bar{c}_{f\beta}$, \bar{f}_0 — некоторые положительные константы, а оператор дробного дифференцирования $\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}$, $0 < \nu < 1$, определен в виде

$$\frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu} = \frac{M(\nu)}{1-\nu} \int_0^t \frac{\partial u}{\partial \theta} \exp\left(-\frac{\nu}{1-\nu}(t-\theta)\right) d\theta, \quad t > 0,$$

функция $M(\nu)$ удовлетворяет условиям $M(0) = M(1) = 1$.

Определим следующие предположения.

Предположение Б.1. Предположим, что задача (Б.1)-(Б.3) имеет единственное решение, имеющее достаточное количество производных, необходимых для проведения теоретического анализа.

Предположение Б.2. F — дифференцируемая функция, определенная на Ω , такая, что

$$F(u) = \mu u, \quad (\text{Б.4})$$

где μ — положительная константа.

Слабым решением задачи (Б.1)-(Б.3) назовем функцию $u \in H^1(0,T; H_0^1(\Omega))$, $u(x,0) = u_0(x)$, удовлетворяющую тождеству

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \nu \right) + \bar{c}_{\phi\alpha} \left(\frac{\partial^{\alpha+1} u}{\partial t^{\alpha+1}}, \nu \right) + \bar{c}_{f\beta} \left(\frac{\partial^{\beta+1} u}{\partial t^{\beta+1}}, \nu \right) +$$

$$+ \left(F \left(\frac{\partial^\gamma u_x}{\partial t^\gamma} \right), v_x \right) = (\bar{f}_0, v) \quad (\text{Б.5})$$

для любого $v \in H_0^1(\Omega)$, где $\alpha, \beta \in (-1, 0)$, $\gamma \in (0, 1)$.

Построение полудискретной схемы

Для построения вычислительной схемы сначала произведем дискретизацию задачи (Б.1)-(Б.3) относительно временной переменной. Для этого разобьем временной интервал \bar{J} точками $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N_t$, так что $N_t\tau = T$. Обозначим через u^n полудискретную аппроксимацию функции u относительно временной переменной.

Рассмотрим следующую аппроксимационную формулу для дробной производной Капуто-Фабрицио.

Лемма Б.1. Дробная производная Капуто-Фабрицио $\frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu}$ порядка ν , $0 < \nu < 1$ при $t = t_n$ аппроксимируется [137]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu} \Big|_{t=t_n} &= \Delta^\nu u^n + r_n^\nu, \\ \Delta^\nu u^n &= \sum_{s=1}^n d_{n,s}^\nu (u^s - u^{s-1}), \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

где

$$d_{n,s}^\nu = \frac{M(\nu)}{\tau^\nu} (\exp(-\sigma_\nu(t_n - t_s)) - \exp(-\sigma_\nu(t_n - t_{s-1}))), \quad \sigma_\nu = \frac{\nu}{1-\nu},$$

причем для погрешности аппроксимации $r_n^\nu = \Delta^\nu u^n - \frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu} \Big|_{t=t_n}$ справедливо

неравенство

$$|r_n^\nu| \leq \frac{(1-\nu)M(\nu)}{2\nu^2} \max_{0 \leq t \leq t_n} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right| \tau^2.$$

Далее для простоты примем $M(\nu) \equiv 1$. Легко показать, что коэффициенты $d_{n,s}^\nu$ удовлетворяют следующим свойствам:

- а) $d_{n,s}^\nu$ строго положительны для всех $1 \leq s \leq n$;
- б) последовательность $\{d_{n,s}^\nu\}_{s=1}^n$ является возрастающей;
- в) $d_{n,n}^\nu = O(1)$.

Аппроксимируем производную целого порядка при $t = t_n$ в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n) = \begin{cases} \frac{1}{2\tau}(3u^n - 4u^{n-1} + u^{n-2}) + O(\tau^2), & n \geq 2 \\ \frac{1}{\tau}(u^1 - u^0) + O(\tau), & n = 1. \end{cases}$$

Теперь определим полудискретную формулировку задачи (Б.1)-(Б.3).

Задача Б.1. Пусть известны $u^i \in H_0^1(\Omega)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $u^0 = u_0(x)$. Найти $u^n \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющее следующим тождествам для всех $v \in H_0^1(\Omega)$:

а) при $n = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}(u^1 - u^0, v) + \bar{c}_{\phi\alpha}(\Delta^{\alpha+1}u^1, v) + \bar{c}_{\beta\beta}(\Delta^{\beta+1}u^1, v) + \\ + (F(\Delta^\gamma u_x^1), v_x) = (\bar{f}_0, v); \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

б) при $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau}(3u^n - 4u^{n-1} + u^{n-2}, v) + \bar{c}_{\phi\alpha}(\Delta^{\alpha+1}u^n, v) + \bar{c}_{\beta\beta}(\Delta^{\beta+1}u^n, v) + \\ + (F(\Delta^\gamma u_x^n), v_x) = (\bar{f}_0, v), \end{aligned} \quad (\text{Б.8})$$

где $\alpha, \beta \in (-1, 0)$, $\gamma \in (0, 1)$.

Построение полностью дискретной схемы

Чтобы сформулировать полностью дискретную схему, определим дискретное пространство $V_h \subset H_0^1$:

$$V_h = \{v_h \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \mid v_h|_e \in P_1(e), \forall e \in K_h\},$$

где K_h — равномерное разбиение отрезка Ω . Определим оператор проекции $Q_h: H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h$, удовлетворяющий условию

$$((Q_h u - u), u_{h,x}) = 0 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), u_h \in V_h,$$

который обладает следующим свойством:

$$\|u - Q_h u\| + h \|u - Q_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^2 \|u\|_{H^2(\Omega)} \quad (\text{Б.9})$$

для всех $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Определим полностью дискретную схему для задачи (Б.1)-(Б.3) следующим образом.

Задача Б.2. Пусть известны $u_h^i \in V_h$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, в частности, $u_h^0 = Q_h u_0$. Найти $u_h^n \in V_h$, удовлетворяющее следующим тождествам для всех $v_h \in V_h$:

а) при $n = 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} (u_h^1 - u_h^0, v_h) + \bar{c}_{\phi\alpha} (\Delta^{\alpha+1} u_h^1, v_h) + \bar{c}_{f\beta} (\Delta^{\beta+1} u_h^1, v_h) + \\ & + (F(\Delta^\gamma u_{h,x}^1), v_{h,x}) = (\bar{f}_0, v_h); \end{aligned} \quad (\text{Б.10})$$

б) при $n \geq 2$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\tau} (3u_h^n - 4u_h^{n-1} + u_h^{n-2}, v_h) + \bar{c}_{\phi\alpha} (\Delta^{\alpha+1} u_h^n, v_h) + \bar{c}_{f\beta} (\Delta^{\beta+1} u_h^n, v_h) + \\ & + (F(\Delta^\gamma u_{h,x}^n), v_{h,x}) = (\bar{f}_0, v_h) \end{aligned} \quad (\text{Б.11})$$

где $\alpha, \beta \in (-1, 0)$, $\gamma \in (0, 1)$.

Исследование сходимости полудискретной схемы

Сначала докажем следующий вспомогательный результат.

Лемма Б.2. Пусть задана последовательность функций $\{u^i\}_{i=0}^{N_t}$, где $u^i \in L^2(\Omega)$. Тогда для любых $u^n \in L^2(\Omega)$, $n \geq 1$, справедливо неравенство

$$(\Delta^v u^n, u^n) \geq \Phi_n - \Phi_{n-1} - \frac{1}{2} d_{n,1}^v \|u^0\|^2, \quad (\text{Б.12})$$

где $\Phi_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_{n,i}^v \|u^i\|^2$, $n \geq 1$ и $\Phi_0 = 0$.

Доказательство. Сначала покажем, что

$$(\Delta^v u^n, u^n) \geq \frac{1}{2} \Delta^v \|u^n\|^2. \quad (\text{Б.13})$$

Рассмотрим разность $A = (\Delta^v u^n, u^n) - \frac{1}{2} \Delta^v \|u^n\|^2$. Используя определение дискретного аналога дробной производной Капуто-Фабрицио (Б.6), получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} A &= \sum_{s=1}^n d_{n,s}^v (u^s - u^{s-1}, u^n) - \sum_{s=1}^n d_{n,s}^v \left(u^s - u^{s-1}, \frac{u^s + u^{s-1}}{2} \right) = \\ &= \sum_{s=1}^n d_{n,s}^v \left(u^s - u^{s-1}, \frac{1}{2} (u^s - u^{s-1}) + \sum_{k=s+1}^n (u^k - u^{k-1}) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n d_{n,s}^v \left((u^s - u^{s-1})^2, 1 \right) + \\ &+ \sum_{k=2}^n d_{n,s}^v \left(u^k - u^{k-1}, \sum_{s=1}^{k-1} (u^s - u^{s-1}) \right). \end{aligned} \quad (\text{Б.14})$$

Далее, легко показать, что

$$u^k - u^{k-1} = \frac{\zeta^k - \zeta^{k-1}}{d_{n,k}^v}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где $\sum_{s=1}^k d_{n,s}^v (u_i^s - u_i^{s-1}) = \zeta^k$. Затем из (Б.14) получаем

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2d_{n,1}^v} \|\zeta^1\|^2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2d_{n,k}^v} (\|\zeta^k\|^2 - \|\zeta^{k-1}\|^2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{d_{n,k}^v} - \frac{1}{d_{n,k+1}^v} \right) \|\zeta^k\|^2 + \frac{1}{2d_{n,n}^v} \|\zeta^n\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

откуда следует справедливость неравенства (Б.13).

Теперь докажем неравенство (Б.12). Преобразуем правую часть (Б.13), используя определение дискретного аналога производной:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta^v \|u^n\|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n d_{n,s}^v \|u^s\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n d_{n-1,s-1}^v \|u^{s-1}\|^2 = \\ &= \Phi_n - \Phi_{n-1} - \frac{1}{2} d_{n,1}^v \|u^0\|^2. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Перейдем к изучению вопроса о сходимости полудискретной схемы (Б.7)–(Б.8).

Теорема Б.1. При выполнении предположений Б.1, Б.2 решение u^n задачи Б.1 сходится к решению задачи (Б.1)–(Б.3) и справедливо неравенство

$$\|u(t_n) - u^n\| + \tau \sqrt{2c_0 T^{-1}} \|u(t_n) - u^n\|_{H^1(\Omega)} \leq C \tau^2,$$

где $c_0 = \min \{ \bar{c}_{\phi\alpha} d_{n,1}^{\alpha+1}, \bar{c}_{f\beta} d_{n,1}^{\beta+1}, \mu d_{n,1}^\gamma \}$.

Доказательство. Обозначим $w^n = u(t_n) - u^n$. Рассмотрим разность тождества (Б.5) при $t = t_n$ и тождества (Б.7), (Б.8) и выберем $v = w^n$:

а) при $n = 1$:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t_1) - \frac{u^1 - u^0}{\tau}, w^n \right) + \bar{c}_{\phi\alpha} \left(\frac{\partial^{\alpha+1} u}{\partial t^{\alpha+1}}(t_1) - \Delta^{\alpha+1} u^1, w^n \right) + \\ &+ \bar{c}_{f\beta} \left(\frac{\partial^{\beta+1} u}{\partial t^{\beta+1}}(t_1) - \Delta^{\beta+1} u^1, w^n \right) + \left(F \left(\frac{\partial^\gamma u_x}{\partial t^\gamma}(t_1) \right) - F(\Delta^\gamma u_x^1), w_x^n \right) = 0; \end{aligned} \quad (\text{Б.15})$$

б) при $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t_n) - \frac{3u^n - 4u^{n-1} + u^{n-2}}{2\tau}, w^n \right) + \bar{c}_{\phi\alpha} \left(\frac{\partial^{\alpha+1} u}{\partial t^{\alpha+1}}(t_n) - \Delta^{\alpha+1} u^n, w^n \right) + \\
& + \bar{c}_{f\beta} \left(\frac{\partial^{\beta+1} u}{\partial t^{\beta+1}}(t_n) - \Delta^{\beta+1} u^n, w^n \right) + \left(F \left(\frac{\partial^\gamma u_x}{\partial t^\gamma}(t_n) \right) - F(\Delta^\gamma u_x^n), w_x^n \right) = 0.
\end{aligned} \tag{Б.16}$$

Оценим слагаемые в (Б.15) и (Б.16):

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t_1) - \frac{u^1 - u^0}{\tau}, w^1 \right) \geq \frac{1}{2\tau} \|w^1\|^2 - \frac{1}{2\tau} \|w^0\|^2 + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\zeta_1), w^1 \right), \\
& \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t_n) - \frac{3u^n - 4u^{n-1} + u^{n-2}}{2\tau}, w^n \right) \geq \\
& \geq \frac{1}{4\tau} \left(\|w^n\|^2 + \|2w^n - w^{n-1}\|^2 + \|w^n - 2w^{n-1} + w^{n-2}\|^2 \right) - \\
& - \frac{1}{4\tau} \left(\|w^{n-1}\|^2 + \|2w^{n-1} - w^{n-2}\|^2 \right) + \frac{\tau^2}{3} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta_n), w^n \right), \\
& \left(\frac{\partial^{\alpha+1} u}{\partial t^{\alpha+1}}(t_n) - \Delta^{\alpha+1} u^n, w^n \right) \geq (r_n^{\alpha+1}, w^n) + (\Phi_n^{\alpha+1} - \Phi_{n-1}^{\alpha+1}) - \frac{1}{2} d_{n,1}^{\alpha+1} \|w^0\|^2, \\
& \left(\frac{\partial^{\beta+1} u}{\partial t^{\beta+1}}(t_n) - \Delta^{\beta+1} u^n, w^n \right) \geq (r_n^{\beta+1}, w^n) + (\Phi_n^{\beta+1} - \Phi_{n-1}^{\beta+1}) - \frac{1}{2} d_{n,1}^{\beta+1} \|w^0\|^2, \\
& \left(F \left(\frac{\partial^\gamma u_x}{\partial t^\gamma}(t_n) \right) - F(\Delta^\gamma u_x^n), w_x^n \right) \geq \mu(r_n^\gamma, w_x^n) + \mu(\Phi_n^\gamma - \Phi_{n-1}^\gamma) - \frac{1}{2} \mu d_{n,1}^\gamma \|w_x^0\|^2,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_n^{\alpha+1} &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n d_{n,s}^{\alpha+1} \|w^s\|^2, & r_n^{\alpha+1} &= \frac{\partial^{\alpha+1} u}{\partial t^{\alpha+1}}(t_n) - \Delta^{\alpha+1} u(t_n), \\
\Phi_n^{\beta+1} &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n d_{n,s}^{\beta+1} \|w^s\|^2, & r_n^{\beta+1} &= \frac{\partial^{\beta+1} u}{\partial t^{\beta+1}}(t_n) - \Delta^{\beta+1} u(t_n), \\
\Phi_n^{\gamma+1} &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n d_{n,s}^\gamma \|w_x^s\|^2, & r_n^{\gamma+1} &= \frac{\partial^\gamma u_x}{\partial t^\gamma}(t_n) - \Delta^\gamma u_x(t_n),
\end{aligned}$$

и $\Phi_0^r = 0$. С учетом полученных оценок в (Б.15) и (Б.16) приходим к следующим неравенствам:

$$\begin{aligned}
& \|w^1\|^2 + 2\tau\Phi_1 \leq \|w^0\|^2 + 2\tau\Phi_0 + 2\tau^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\zeta_1), w^1 \right) + \\
& + 2\tau\bar{c}_{\phi\alpha} |(r_1^{\alpha+1}, w^1)| + 2\tau\bar{c}_{f\beta} |(r_1^{\beta+1}, w^1)| + 2\tau\mu |(r_1^\gamma, w_x^1)|, \\
& \|w^n\|^2 + \|2w^n - w^{n-1}\|^2 + 4\tau\Phi_n + \|w^n - 2w^{n-1} + w^{n-2}\|^2 \leq
\end{aligned} \tag{Б.17}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|w^{n-1}\|^2 + \|2w^{n-1} - w^{n-2}\|^2 + 4\tau\Phi_{n-1} + \frac{4\tau^3}{3} \left(\left\| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta_n), w^n \right\| \right) + \\ &\quad + 4\tau\bar{c}_{\phi\alpha} \left(r_n^{\alpha+1}, w^n \right) + 4\tau\bar{c}_{f\beta} \left(r_n^{\beta+1}, w^n \right) + 4\tau\mu \left(r_n^\gamma, w_x^n \right), \end{aligned} \quad (\text{Б.18})$$

где используется обозначение

$$\Phi_n = \bar{c}_{\phi\alpha} \Phi_n^{\alpha+1} + \bar{c}_{f\beta} \Phi_n^{\beta+1} + \mu \Phi_n^{\gamma+1}.$$

Оценивая последние четыре слагаемых в правой части (Б.18) с использованием неравенства Коши, получаем

$$\begin{aligned} &\|w^n\|^2 + \|2w^n - w^{n-1}\|^2 + 4\tau\Phi_n \leq \|w^{n-1}\|^2 + \|2w^{n-1} - w^{n-2}\|^2 + 4\tau\Phi_{n-1} + \\ &\quad + \frac{4\tau^3}{3} \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta_n) \right\| \|w^n\| + 4\tau\bar{c}_{\phi\alpha} \|r_n^{\alpha+1}\| \|w^n\| + 4\tau\bar{c}_{f\beta} \|r_n^{\beta+1}\| \|w^n\| + 4\tau\mu \|r_n^\gamma\| \|w_x^n\|. \end{aligned} \quad (\text{Б.19})$$

Просуммируем неравенство (Б.19) по n от 2 до n :

$$\begin{aligned} &\|w^n\|^2 + 4\tau\Phi_n \leq 5\|w^1\|^2 + 4\tau\Phi_1 + \frac{C}{\varepsilon_1} \left(\tau^{5/2} \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta_n) \right\| + \tau \|r_n^{\alpha+1}\| + \tau \|r_n^{\beta+1}\| \right)^2 + \\ &\quad + \varepsilon_1 \tau \|w^n\|^2 + \frac{C}{\varepsilon_2} \tau \|r_n^\gamma\|^2 + \varepsilon_2 \tau \|w_x^n\|^2 + \frac{C}{\varepsilon_3} \sum_{i=2}^{n-1} \left(\tau^2 \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta_i) \right\| + \bar{c}_{\phi\alpha} \|r_i^{\alpha+1}\| + \bar{c}_{f\beta} \|r_i^{\beta+1}\| \right)^2 + \\ &\quad + \varepsilon_3 \tau^2 \sum_{i=2}^{n-1} \|w^i\|^2 + \frac{C}{\varepsilon_4} \sum_{i=2}^n \|r_i^\gamma\|^2 + \varepsilon_4 \tau^2 \sum_{i=2}^n \|w_x^i\|^2 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &\|w^n\|^2 + 4\tau\Phi_n \leq 5\|w^1\|^2 + 4\tau\Phi_1 + 2\tau \left(\bar{c}_{\phi\alpha} d_{n,1}^{\alpha+1} + \bar{c}_{f\beta} d_{n,1}^{\beta+1} \right) \|w^n\|^2 + \mu d_{n,1}^\gamma \|w_x^n\|^2 + \\ &\quad + \tau^2 \sum_{i=2}^{n-1} \left(\bar{c}_{\phi\alpha} d_{i,1}^{\alpha+1} + \bar{c}_{f\beta} d_{i,1}^{\beta+1} \right) \|w^i\|^2 + \mu d_{i,1}^\gamma \|w_x^i\|^2 + C\tau^4. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\left(\bar{c}_{\phi\alpha} d_{n,1}^{\alpha+1} + \bar{c}_{f\beta} d_{n,1}^{\beta+1} \right) \|w^n\|_0^2 + \mu d_{n,1}^\gamma \|w_x^n\|_0^2 \leq \Phi_n$, получим, что

$$\|w^n\|^2 + 2\tau\Phi_n \leq 5\|w^1\|^2 + 4\tau\Phi_1 + \tau^2 \sum_{i=2}^{n-1} \Phi_i + C\tau^4.$$

Применяя дискретную лемму Гронуолла, получаем

$$\|w^n\|^2 + 2\tau\Phi_n \leq C \left(\|w^1\|^2 + \tau\Phi_1 + \tau^4 \right). \quad (\text{Б.20})$$

Теперь оценим слагаемые в (Б.17):

$$\begin{aligned} \|w^1\|^2 + 2\tau\Phi_1 &\leq \|w^0\|^2 + 2\tau\Phi_0 + 2\tau^2 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\zeta_1) \right\| \|w^1\| + \\ &+ 2\bar{c}_{\phi\alpha} r_1^{\alpha+1} \|w^1\| + 2\bar{c}_{f\beta} r_1^{\beta+1} \|w^1\| + 2\mu \|r_1^\gamma\| \cdot \tau \|w_x^1\|, \end{aligned}$$

или

$$\|w^1\|^2 + 4\tau\Phi_1 \leq \frac{\tau^2}{2} \mu d_{1,1}^\gamma \|w_x^1\|^2 + C\tau^4.$$

Замечая, что $\frac{1}{2} \mu d_{1,1}^\gamma \tau \|w_x^1\|_0^2 \leq \Phi_1$, отсюда получаем

$$\|w^1\|^2 + 3\tau\Phi_1 \leq C\tau^4. \quad (\text{Б.21})$$

Подставляя (Б.21) в (Б.20) и применяя элементарные преобразования, приходим к утверждению теоремы.

Сходимость полностью дискретной схемы

Теорема Б.2. При выполнении предположений Б.1, Б.2 существует $\tau_0 > 0$ такое, что для всех $\tau \leq \tau_0$ решение u_h^n задачи Б.2 сходится к решению задачи (Б.1)-(Б.3), и справедливо следующее неравенство:

$$\|u(t_n) - u_h^n\| + 2\tau \sqrt{c_0 T^{-1}} \|u(t_n) - u_h^n\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\tau^2 + h^2),$$

где $c_0 = \min\{\bar{c}_{\phi\alpha} d_{n,1}^{\alpha+1}, \bar{c}_{f\beta} d_{n,1}^{\beta+1}, \mu d_{n,1}^\gamma\}$.

Доказательство. Пусть $u^n - u_h^n = (u^n - Q_h u^n) + (Q_h u^n - u_h^n) = \mathcal{G}^n + \eta^n$. Рассмотрим разность тождеств (Б.8) и (Б.11) и выберем $v_h = \eta^n$:

$$\begin{aligned} &\|\eta^n\|^2 + \|2\eta^n - \eta^{n-1}\|^2 - \|\eta^{n-1}\|^2 - \|2\eta^{n-1} - \eta^{n-2}\|^2 + \\ &+ \|\eta^n - 2\eta^{n-1} + \eta^{n-2}\|^2 + 4\bar{c}_{\phi\alpha} (\Delta^{\alpha+1}(\mathcal{G}^n + \eta^n), \eta^n) + \\ &+ 4\bar{c}_{f\beta} (\Delta^{\beta+1}(\mathcal{G}^n + \eta^n), \eta^n) + 4\tau (F(\Delta^\gamma u_x^n), \eta_x^n) - \\ &- 4\tau (F(\Delta^\gamma u_{h,x}^n), \eta_x^n) + 4\tau \left(\frac{3\mathcal{G}^n - 4\mathcal{G}^{n-1} + \mathcal{G}^{n-2}}{2\tau}, \eta^n \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.22})$$

Рассмотрим слагаемое

$$4\bar{c}_{\phi\alpha} (\Delta^{\alpha+1}(\mathcal{G}^n + \eta^n), \eta^n) = 4\bar{c}_{\phi\alpha} (\Delta^{\alpha+1} \eta^n, \eta^n) + 4\bar{c}_{\phi\alpha} (\Delta^{\alpha+1} \mathcal{G}^n, \eta^n) = K_1 + K_2.$$

Используя лемму Б.2, получаем:

$$\begin{aligned}
K_1 &\geq 4\bar{c}_{\phi\alpha} \left(\Phi_n^{\alpha+1} - \Phi_{n-1}^{\alpha+1} \right) - 2\bar{c}_{\phi\alpha} d_{n,1}^{\alpha+1} \|\eta^0\|^2, \\
K_2 &\leq 4\bar{c}_{\phi\alpha} \|\Delta^{\alpha+1} \mathcal{G}^n\| \|\eta^n\| \leq 4\bar{c}_{\phi\alpha}^2 \left\| \sum_{s=1}^n d_{n,s}^{\alpha+1} (\mathcal{G}^s - \mathcal{G}^{s-1}) \right\|^2 + 2\tau \|\eta^n\|^2 = \\
&= 4\bar{c}_{\phi\alpha}^2 \int_{\Omega} \left(\sum_{s=1}^n d_{n,s}^{\alpha+1} \int_{t_{s-1}}^{t_s} \mathcal{G}_t d\theta \right)^2 dx + 2\tau \|\eta^n\|^2 \leq 4T\tau (\bar{c}_{\phi\alpha} d_{n,n}^{\alpha+1})^2 \int_0^T \|\mathcal{G}_t\|^2 d\theta + 2\tau \|\eta^n\|^2,
\end{aligned}$$

где $\Phi_n^{\alpha+1} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n d_{n,s}^{\alpha+1} \|\eta^s\|^2$. Аналогично,

$$\begin{aligned}
4\bar{c}_{f\beta} \left(\Delta^{\beta+1} (\mathcal{G}^n + \eta^n), \eta^n \right) &\geq 4\bar{c}_{f\beta} \left(\Phi_n^{\beta+1} - \Phi_{n-1}^{\beta+1} \right) - 2\bar{c}_{f\beta} d_{n,1}^{\beta+1} \|\eta^0\|^2 - \\
&\quad - 4T\tau^2 (\bar{c}_{f\beta} d_{n,n}^{\beta+1})^2 \int_0^T \|\mathcal{G}_t\|^2 d\theta - 2\tau \|\eta^n\|^2,
\end{aligned}$$

где $\Phi_n^{\beta+1} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n d_{n,s}^{\beta+1} \|\eta^s\|^2$. Оценим оставшиеся слагаемые следующим образом:

$$\begin{aligned}
&4\tau \left(F(\Delta^\gamma u_x^n), \eta_x^n \right) - 4\tau \left(F(\Delta^\gamma u_{n,x}^n), \eta_x^n \right) = \\
&= 4\tau \mu \left(\Delta^\gamma (\mathcal{G}_x^n + \eta_x^n), \eta_x^n \right) = 4\tau \mu \left(\Phi_n^\gamma - \Phi_{n-1}^\gamma \right) - 2\tau \mu d_{n,1}^\gamma \|\eta_x^0\|^2, \\
K_6 &\equiv 4\tau \left(\frac{3\mathcal{G}^n - 4\mathcal{G}^{n-1} + \mathcal{G}^{n-2}}{2\tau}, \eta^n \right) \leq 2\tau \left\| \frac{\int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathcal{G}_t d\theta - \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \mathcal{G}_t d\theta}{2\tau} \right\|^2 + 2\tau \|\eta^n\|^2 \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega} \mathcal{G}_t^2 dx d\theta + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \int_{\Omega} \mathcal{G}_t^2 dx d\theta \right) + 2\tau \|\eta^n\|^2 = \frac{1}{2} \int_{t_{n-2}}^{t_n} \|\mathcal{G}_t\|^2 d\theta + 2\tau \|\eta^n\|^2,
\end{aligned}$$

где $\Phi_n^\gamma = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n d_{n,s}^\gamma \|\eta_x^s\|^2$. Тогда из (Б.22) следует, что

$$\begin{aligned}
&\|\eta^n\|^2 + \|2\eta^n - \eta^{n-1}\|^2 + \|\eta^n - 2\eta^{n-1} + \eta^{n-2}\|^2 + 4\tau \Phi_n \leq \\
&\leq \|\eta^{n-1}\|^2 + \|2\eta^{n-1} - \eta^{n-2}\|^2 + 4\tau \Phi_{n-1} + 4T\tau (\bar{c}_{\phi\alpha} d_{n,n}^{\alpha+1})^2 \int_0^T \|\mathcal{G}_t\|^2 d\theta + \\
&\quad + 4T\tau^2 (\bar{c}_{f\beta} d_{n,n}^{\beta+1})^2 \int_0^T \|\mathcal{G}_t\|^2 d\theta + 6\tau \|\eta^n\|^2 + \frac{1}{2} \int_{t_{n-2}}^{t_n} \|\mathcal{G}_t\|^2 d\theta, \tag{Б.23}
\end{aligned}$$

где

$$\Phi_n = \bar{c}_{\phi\alpha} \Phi_n^{\alpha+1} + \bar{c}_{f\beta} \Phi_n^{\beta+1} + \mu \Phi_n^\gamma.$$

Просуммируем неравенство (Б.23) по n от 2 до n :

$$\|\eta^n\|^2 + 4\tau\Phi_n \leq 5\|\eta^1\|^2 + 4\tau\Phi_1 + 6\tau\|\eta^n\|^2 + 6\tau\sum_{i=2}^{n-1}\|\eta^i\|^2 + Ch^4,$$

откуда при достаточно малых τ получаем

$$\|\eta^n\|^2 + 4\tau\Phi_n \leq 5\|\eta^1\|^2 + 4\tau\Phi_1 + 6\tau\sum_{i=2}^{n-1}\|\eta^i\|^2 + Ch^4.$$

Применяя дискретную лемму Гронуолла, получаем

$$\|\eta^n\|^2 + 4\tau\Phi_n \leq C\left(\|\eta^1\|^2 + \tau\Phi_1 + h^4\right). \quad (\text{Б.24})$$

Учитывая разность тождеств (Б.7) и (Б.10), выбирая $v_h = \eta^1$ и используя аналогичную технику оценки слагаемых в полученном тождестве, мы приходим к неравенству

$$\|\eta^1\|^2 + \tau\Phi_1 \leq C\tau^2\|\mathcal{G}^1\|^2 + \frac{1}{2}\|\eta^1\|^2 + \frac{3\tau^2}{2}\left\|\frac{\mathcal{G}^1 - \mathcal{G}^0}{\tau}\right\|^2,$$

следовательно,

$$\frac{1}{2}\|\eta^1\|^2 + \tau\Phi_1 \leq C(\tau^4 + h^4). \quad (\text{Б.25})$$

Объединяя (Б.24) и (Б.25), получаем неравенство

$$\|\eta^n\|^2 + 4c_0\tau\sum_{s=1}^n\|\eta^s\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C(\tau^4 + h^4),$$

из которого следует утверждение теоремы.

Верификация порядка сходимости

Для проверки точности схемы проведены вычислительные эксперименты на примере модельной задачи с известным точным решением.

Пример Б.1. В области $Q_1 = \bar{\Omega} \times \bar{J}$, где $\Omega = (0,1)$, $J = (0,1]$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^{\alpha+1}u}{\partial t^{\alpha+1}} + \frac{\partial^{\beta+1}u}{\partial t^{\beta+1}} - \frac{\partial^\gamma u_{xx}}{\partial t^\gamma} = \bar{f}_0, \quad t \in J, \quad x \in \Omega, \quad (\text{Б.26})$$

$$\bar{f}_0(x,t) = -\frac{2}{\gamma} \left(e^{\frac{t(\gamma-1)}{\gamma-2}} - e^{\frac{t}{2}} \right) + x(x-1) \left[\frac{e^{\frac{\alpha}{\alpha-1} - e^{\frac{t}{2}}}}{\alpha+1} + \frac{e^{\frac{\beta t}{\beta-1} - e^{\frac{t}{2}}}}{\beta+1} - \frac{e^{\frac{t}{2}}}{2} \right],$$

$$u(x,0) = x(1-x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (\text{Б.27})$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in J, \quad (\text{Б.28})$$

где $\alpha, \beta \in (-1,0)$, $\gamma \in (0,1)$. Точное решение задачи: $u(x,t) = x(1-x)e^{\frac{t}{2}}$.

Первая серия вычислительных экспериментов проведена для сравнения порядка сходимости схемы по временному шагу при фиксированном значении пространственного шага $h = 1/20000$. Для этого временной шаг последовательно уменьшался вдвое с $1/10$ до $1/640$, а эмпирический порядок сходимости оценивался по формуле $(\ln(R_{2\tau}/R_\tau))/\ln 2$, где R_τ — L^2 -погрешность приближенного решения, рассчитанная с использованием шага по времени τ .

В таблицах Б.1-Б.3 приведены результаты анализа для различных значений порядков дробной производной, $\alpha = \beta \in \{-0.9, -0.5, -0.1\}$ и $\gamma \in \{0.1, 0.5, 0.9\}$. Из приведенных значений следует, что порядок сходимости не зависит от порядков дробных производных для всех рассмотренных случаев, и его значение приближается к 2. Такое поведение хорошо согласуется с теоретически спрогнозированным порядком по временному шагу, полученным в теореме Б.2.

Таблица Б.1. - Анализ погрешности относительно временного шага $\gamma = 0.1$

τ	$\alpha = \beta = -0.9$		$\alpha = \beta = -0.5$		$\alpha = \beta = -0.1$	
	L^2 - погрешность	Порядок	L^2 - погрешность	Порядок	L^2 - погрешность	Порядок
1/10	1.5578×10^{-4}	-	1.9224×10^{-4}	-	3.2447×10^{-3}	-
1/20	3.7507×10^{-5}	2.05	4.4459×10^{-5}	2.11	7.6783×10^{-4}	2.08
1/40	9.1597×10^{-6}	2.03	1.0491×10^{-5}	2.08	1.8135×10^{-4}	2.08
1/80	2.2580×10^{-6}	2.02	2.5154×10^{-6}	2.06	4.2878×10^{-5}	2.08
1/160	5.5977×10^{-7}	2.01	6.1017×10^{-7}	2.04	1.0196×10^{-5}	2.07
1/320	1.3920×10^{-7}	2.01	1.4951×10^{-7}	2.03	2.4359×10^{-6}	2.07
1/640	3.4467×10^{-8}	2.01	3.7320×10^{-8}	2.00	5.9093×10^{-7}	2.04

Таблица Б.2. - Анализ погрешности относительно временного шага, $\gamma = 0.5$

τ	$\alpha = \beta = -0.9$		$\alpha = \beta = -0.5$		$\alpha = \beta = -0.1$	
	L^2 - погрешность	Порядок	L^2 - погрешность	Порядок	L^2 - погрешность	Порядок
1/10	3.1783×10^{-4}	-	3.4405×10^{-4}	-	3.2313×10^{-3}	-
1/20	6.7777×10^{-5}	2.23	7.2527×10^{-5}	2.25	7.6007×10^{-4}	2.09
1/40	1.4763×10^{-5}	2.20	1.5600×10^{-5}	2.22	1.7861×10^{-4}	2.09
1/80	3.2883×10^{-6}	2.17	3.4378×10^{-6}	2.18	4.1985×10^{-5}	2.09
1/160	7.4652×10^{-7}	2.14	7.7628×10^{-7}	2.15	9.8740×10^{-6}	2.09
1/320	1.7842×10^{-7}	2.06	1.7728×10^{-7}	2.13	2.3550×10^{-6}	2.07
1/640	4.2906×10^{-8}	2.06	4.1230×10^{-8}	2.10	5.7194×10^{-7}	2.04

Таблица Б.3 - Анализ погрешности относительно временного шага, $\gamma = 0.9$

τ	$\alpha = \beta = -0.9$		$\alpha = \beta = -0.5$		$\alpha = \beta = -0.1$	
	L^2 - погрешность	Порядок	L^2 - погрешность	Порядок	L^2 - погрешность	Порядок
1/10	1.0618×10^{-3}	-	1.0576×10^{-3}	-	1.0644×10^{-3}	-
1/20	2.5121×10^{-4}	2.08	2.4874×10^{-4}	2.09	2.5491×10^{-4}	2.06
1/40	5.9316×10^{-5}	2.08	5.8445×10^{-5}	2.09	6.1094×10^{-5}	2.06
1/80	1.4018×10^{-5}	2.08	1.3736×10^{-5}	2.09	1.4812×10^{-5}	2.04
1/160	3.3405×10^{-6}	2.07	3.2921×10^{-6}	2.06	3.6240×10^{-6}	2.03
1/320	7.9946×10^{-7}	2.06	7.8824×10^{-7}	2.06	8.9512×10^{-7}	2.02
1/640	1.9589×10^{-7}	2.03	1.9291×10^{-7}	2.03	2.2394×10^{-7}	2.00

Аналогичным образом проведена вторая серия вычислительных экспериментов для сравнения порядка сходимости по пространственному шагу с фиксированным временным шагом $\tau = 1/20000$. Соответствующие L^2 -погрешности и порядки сходимости представлены в таблицах Б.4-Б.6. Из численных экспериментов следует, что эмпирический порядок сходимости для всех рассмотренных случаев близок к 2.

Таблица Б.4 - Анализ погрешности по пространственному шагу, $\gamma = 0.1$

h	$\alpha = \beta = -0.9$		$\alpha = \beta = -0.5$		$\alpha = \beta = -0.1$	
	L^2 - погрешность	Порядок	L^2 - погрешность	Порядок	L^2 - погрешность	Порядок
1/10	1.0955×10^{-6}	-	1.2410×10^{-6}	-	1.3720×10^{-6}	-
1/20	2.7388×10^{-7}	2.00	3.1026×10^{-7}	2.00	3.4538×10^{-7}	1.99
1/40	6.8469×10^{-8}	2.00	7.7565×10^{-8}	2.00	8.6946×10^{-8}	1.99
1/80	1.7117×10^{-8}	2.00	1.9257×10^{-8}	2.01	2.1737×10^{-8}	2.00
1/160	4.2498×10^{-9}	2.01	4.7810×10^{-9}	2.01	5.4341×10^{-9}	2.00
1/320	1.0551×10^{-9}	2.01	1.1788×10^{-9}	2.02	1.3491×10^{-9}	2.01
1/640	2.6014×10^{-10}	2.02	2.9064×10^{-10}	2.02	3.3496×10^{-10}	2.01

Таблица Б.5 - Анализ погрешности по пространственному шагу, $\gamma = 0.5$

h	$\alpha = \beta = -0.9$		$\alpha = \beta = -0.5$		$\alpha = \beta = -0.1$	
	L^2 - погрешность	Порядок	L^2 - погрешность	Порядок	L^2 - погрешность	Порядок
1/10	9.3002×10^{-7}	-	1.0559×10^{-6}	-	1.1687×10^{-6}	-
1/20	2.3251×10^{-7}	2.00	2.6581×10^{-7}	1.99	2.9421×10^{-7}	1.99
1/40	5.8126×10^{-8}	2.00	6.6453×10^{-8}	2.00	7.4065×10^{-8}	1.99
1/80	1.4532×10^{-8}	2.00	1.6499×10^{-8}	2.01	1.8516×10^{-8}	2.00
1/160	3.6078×10^{-9}	2.01	4.0961×10^{-9}	2.01	4.6291×10^{-9}	2.00
1/320	8.9572×10^{-10}	2.01	1.0099×10^{-9}	2.02	1.1493×10^{-9}	2.01
1/640	2.2085×10^{-10}	2.02	2.4901×10^{-10}	2.02	2.8533×10^{-10}	2.01

Таблица Б.6 - Анализ погрешности по пространственному шагу, $\gamma = 0.9$

h	$\alpha = \beta = -0.9$		$\alpha = \beta = -0.5$		$\alpha = \beta = -0.1$	
	L^2 - погрешность	Порядок	L^2 - погрешность	Порядок	L^2 - погрешность	Порядок
1/10	7.7391×10^{-7}	-	8.8972×10^{-7}	-	1.0233×10^{-6}	-
1/20	1.9482×10^{-7}	1.99	2.2243×10^{-7}	2.00	2.5761×10^{-7}	1.99
1/40	4.8706×10^{-8}	2.00	5.5607×10^{-8}	2.00	6.4849×10^{-8}	1.99
1/80	1.2176×10^{-8}	2.00	1.3806×10^{-8}	2.01	1.6212×10^{-8}	2.00
1/160	3.0231×10^{-9}	2.01	3.4276×10^{-9}	2.01	4.0531×10^{-9}	2.00
1/320	7.5055×10^{-10}	2.01	8.4510×10^{-10}	2.02	1.0063×10^{-9}	2.01
1/640	1.8505×10^{-10}	2.02	2.0837×10^{-10}	2.02	2.4983×10^{-10}	2.01

Следовательно, полученные результаты полностью подтверждают теоретически спрогнозированный порядок, полученный в теореме Б.2.