

Santiago de Compostela, February 27, 2023

REVIEW

for a thesis by Bekenayeva Kymbat Slamovna titled as «**Solvability issues of initial boundary value problems for fractional order pseudoparabolic equation**», represented for obtaining degree **Doctor of Philosophy (PhD) on the specialty 8D05401 – Mathematics**

The presented dissertation work of PhD candidate Bekenayeva K.S. is devoted to the study of the solvability of initial boundary value problems for a quasi-linear pseudo-parabolic equation of fractional order with the Caputo fractional differentiation operator. Differential equations with fractional partial derivatives are a generalization of integer order partial differential equations and are of great theoretical and practical interest. The solution of many important problems arising in the study of liquid filtration processes in fractured-porous media, the movement of groundwater with a free surface in multilayer media, the transfer of moisture, heat and salts in porous media, etc. are associated with the need to study boundary value problems for pseudo-parabolic fractional order equations.

The purpose of this dissertation is studying the issues of unambiguous solvability of initial boundary value problems for a quasi-linear pseudo-parabolic fractional equation with linear and nonlinear boundary conditions, establishing a theorem on the existence and uniqueness of a weak generalized solution to problems, proving the blow-up of the solution to the problem for a quasi-linear pseudo-parabolic fractional equation with a linear boundary condition in finite time and investigating the asymptotic behavior of the solution in time.

The content of the research work consists of an introduction, three sections and a conclusion. In the introduction of the presented dissertation work, the relevance and novelty are given, the purpose and main tasks of the work are formulated and main provisions for the defense are set, and the summary of the dissertation is also presented. The *first section* contains the main functional spaces, known inequalities and definitions, lemmas, theorems that are used in research work. The *second section* is devoted to the study of the solvability of the problem for a pseudo-parabolic equation with a fractional differentiation operator in the sense of Caputo with a linear boundary condition. The existence of a weak solution to the problem under consideration here is investigated using Galerkin approximations and a priori estimates. To prove the uniqueness of the weak solution to the problem, the Sobolev embedding theorem, the Rellich-Kondrashov theorem and the Gronwall-Bellman lemma are used. Along with this, the blowing-up of the solution to the problem in finite time is proved. The global solvability of the initial boundary value problem and the uniqueness of the weak generalized solution are studied. The behavior of the time solution is shown at the end of the section. The *third section* of the dissertation is devoted to the fundamental problem of investigating the solvability of initial boundary value problems for a quasi-linear pseudo-parabolic fractional equation with a sufficiently smooth boundary. The particularity of the problems under study is that the boundary conditions are given in the form of a nonlinear boundary condition with a fractional differentiation operator. The existence of a weak solution of a quasi-linear pseudo-parabolic equation in a bounded domain is proved. Depending on the parameters of the equation, the local and global solvability of initial boundary value problems is established.

The sequence of the results of the dissertation includes goals and objectives set by the candidate. All sections and provisions of dissertation are logically interconnected, and the sequence of presentation of the material is observed.

PhD candidate had a scientific internship at the Galician Center for Mathematical Research and Technology (CITMAGA), at the University of Santiago de Compostela, in Spain from May to June 2022. During the internship Bekenayeva Kymbat actively worked on her dissertation, solved complex issues of some parts of her research, consulted with her international advisor. At the end of the internship, Bekenayeva Kymbat presented research results at the seminar. I believe that she expanded her knowledge of the theory of boundary value problems for the Sobolev equations.

The results of the dissertation research were published in two international journals with the high impact factors including databases Web of Science and Scopus (Quartile-1).

While working on the dissertation, Bekenayeva Kymbat showed all the qualities of a academic researcher-diligence, open-mindedness, ability to learn quickly, perseverance, attention to detail, and approached the tasks with responsibility.

The dissertation work presented by Bekenayeva Kymbat satisfies all conditions required to the PhD thesis on specialty 8D05401 – Mathematics and its author is eligible to obtain degree «Doctor of Philosophy» on the mentioned direction.

**International scientific advisor,
Prof. Dr. Professor on the University
of Santiago de Compostela**



ОТЗЫВ

на диссертационную работу Бекенаевой Кымбат Сламовны на тему
«Разрешимость начально-краевых задач для псевдопараболического
уравнения дробного порядка», представленную на соискание
степени доктора философии (PhD)
по образовательной программе 8D05401 – Математика

Представленная диссертационная работа соискателя Бекенаевой К.С. посвящена исследованию разрешимости начально-краевых задач для квазилинейного псевдопараболического уравнения дробного порядка с оператором дробного дифференцирования Капuto. Дифференциальные уравнения с дробными частными производными являются обобщением уравнений с частными производными целого порядка и представляют большой теоретический и практический интерес. Решение многих практически важных задач, возникающих при исследовании процессов фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах, движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах, переноса влаги, тепла и солей в пористых средах и др. связано с необходимостью исследования краевых задач для псевдопараболических уравнений дробного порядка.

Целью настоящей диссертационной работы является изучение вопросов однозначной разрешимости начально-краевых задач для квазилинейного псевдопараболического уравнения дробного порядка с линейными и нелинейными граничными условиями, установление теоремы о существовании и единственности слабого обобщенного решения задач, доказательство разрушения решения задачи для квазилинейного псевдопараболического уравнения дробного порядка с линейным граничным условием за конечное время и изучение асимптотического поведения решения по времени.

Содержание исследовательской работы состоит из введения, трех разделов и заключения. Во введении представленной диссертационной работы приведены актуальность и новизна на сегодняшний день, сформулирована цель работы и поставлены задачи и основные положения на защиту, также изложено краткое содержание диссертации. В первом разделе приведены основные функциональные пространства, известные неравенства и определения, леммы, теоремы, которые используются в исследовательской работе. Второй раздел посвящен изучению разрешимости задач для псевдопараболического уравнения с оператором дробного дифференцирования в смысле Капuto с линейным граничным условием. Существование слабого решения рассматриваемой здесь задачи исследуется с помощью приближений Галеркина и априорных оценок. Для доказательства единственности слабого решения задачи применяются теорема вложения Соболева, теорема Реллиха-Кондрашова и лемма Гронуолла-Беллмана. Наряду с этим, доказано разрушение решения задачи за конечное время. Изучается глобальная разрешимость начально-краевой задачи и

единственность слабого обобщенного решения. В конце раздела показано поведение решения по времени. Третий раздел диссертационной работы посвящен фундаментальной проблеме исследования разрешимости начально-краевых задач для квазилинейного псевдопараболического уравнения дробного порядка с достаточно гладкой границей. Особенность исследуемых задач заключается в том, что граничные условия задаются в виде нелинейного граничного условия с оператором дробного дифференцирования. Доказывается существование слабого решения квазилинейного псевдопараболического уравнения в ограниченной области. В зависимости от параметров уравнения устанавливается локальная и глобальная разрешимость начально-краевых задач.

Последовательность изложения результатов диссертационного исследования определяет цели и задачи, поставленные перед соискателем. Все разделы и положения логически взаимосвязаны, последовательность изложения материала соблюдена.

Соискатель с мая по июнь 2022 года прошла научную стажировку в Галисийском центре математических исследований и технологий (CITMAGA) университета Сантьяго де Компостела, за время пребывания в центре Бекенаева К. активно работала над диссертацией, обращалась за консультацией по сложным вопросам. Перед окончанием стажировки выступила с докладом на семинаре, и я считаю, что она расширила свои познания по теории краевых задач для уравнений Соболева.

Результаты диссертационного исследования опубликованы в 2 работах, изданных в международных журналах с высоким импакт-фактором, относящихся к базам Web of Science и Scopus (I квартиль).

При работе над диссертацией Бекенаева К.С. проявила все качества исследователя – трудолюбие, открытость мышления, способность к быстрому обучению, упорство, внимание к деталям, подходила к выполнению заданий с ответственностью.

Диссертационная работа выполненная Бекенаевой К.С. соответствует всем требованиям, предъявляемым к диссертациям PhD по образовательной программе 8D05401 – Математика, а ее автор Бекенаева К.С. заслуживает присуждения степени доктора философии (PhD) по вышеназванной специальности.

**Зарубежный научный консультант,
профессор университета
Сантьяго де Компостела,**

А. Кабада

Перевод с английского языка на русский выполнен
переводчиком Стамбековой Аижан Ермековной

Translator Stambekova Aizhan Yermekovna
performed this translation from English language
into Russian language.

Синая Ессе Алия Талгатовна Ермекова

Республика Казахстан, город Алматы
27.03.2023 года

Я, Азиева Алия Талгатовна, нотариус города Алматы, действующий на основании государственной лицензии № 19001119 от 22 января 2019 года, выданной Министерством юстиции Республики Казахстан, свидетельствую подлинность подписи переводчика Стамбековой Аижан Ермековной.

Зарегистрировано в реестре за № 316

Взыскано: согласно п. 2 ст. 611 Закона «О нотариате»

Нотариус



Алия Ессе

Republic of Kazakhstan, Almaty
27.03.2023

I'm Aziyeva Aliya Talgatovna, a notary of the city of Almaty, acting on the basis of state license No. 19001119 dated January 22, 2019, issued by the Ministry of Justice of the Republic of Kazakhstan attest the authenticity of signature made by translator Stambekova Aizhan Yermekovna.

Registered under the number №

Paid in accordance with paragraph 2 of Art. 611 of the Law "On Notary"
Notary



Алия Ессе



ES4407146230327102923A92757C

Нотариаттық іс-әрекеттің бірегей немірі / Уникальный номер нотариального действия