Казахский Национальный Педагогический университет имени Абая

УДК 517.956 На правах рукописи

**БЕКЕНАЕВА КЫМБАТ СЛАМОВНА**

# Разрешимость начально-краевых задач для псевдопараболического уравнения дробного порядка

8D05401 – Математика

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Отечественные научные консультанты:
доктор физико-математических наук,
профессор Бердышев Абдумаувлен,
КазНПУ им. Абая,
Алматы, Казахстан

кандидат физико-математических наук,
ассоциированный профессор
Айтжанов Серик,
КазНУ им. аль-Фараби,
Алматы, Казахстан

Зарубежный научный консультант:
профессор Альберто Кабада Фернандес,
университет Сантьяго де Компостела,
Сантьяго де Компостела, Испания

Республика Казахстан
Алматы, 2023

## СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию вопросов локальной и глобальной разрешимости задачи с линейными и нелинейными граничными условиями для псевдопараболического уравнения с дробными производными Капуто.

**Актуальность исследования.** Известно, что одним из эффективных способов изучения процессов окружающей среды с помощью математических методов является их моделирование в виде дифференциальных уравнений. Множество задач естественно-научных исследований приводят к изучению различных типов начально-краевых, прямых и обратных задач для уравнений в частных производных.

Интерес к уравнениям со смешанными производными, в частности к псевдопараболическому уравнению, возросший за последнее время, объясняется потребностями механики, других прикладных дисциплин, а также потребностями, собственно, математической науки. Изучение псевдопараболических уравнений начинается в середине прошлого века в работе С.Л. Соболева [1]. Эта работа вызвала наибольший интерес к изучению неклассических уравнений. Термин уравнения типа Соболева был введен Э.Р. Шоуолтером [2, 3]. Псевдопараболическое уравнение может быть использовано при анализе нестационарных процессов в полупроводниках при наличии источников [4, 5], теплопередаче в гетерогенной среде [6], с переносом влаги в почве-грунтах [7, 8] с фильтрацией жидкости в трещиновато-пористых средах [9], однонаправленным распространением нелинейных, дисперсионных, длинных волн [10-13] и накоплением (агрегацией) населения [14].

Решение многих практически важных задач, возникающих при исследовании процессов фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах, движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах, переноса влаги, тепла и солей в пористых средах и др. связано с необходимостью исследования краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего и дробного порядков [15]-[23]. Например, в работе [16] рассматривается одномерная начально-краевая задача для псевдопараболического уравнения с переменными коэффициентами и дробной производной Капуто по временным переменным. Получены априорные оценки, из этих оценок доказывается единственность решения задачи и его устойчивость по начальным данным и правой части. Установлена сходимость решений связанной разностной задачи к решению дифференциальной задачи. Т.В. Тинг, Э.Р. Шоуолтер и В.Р. Гопала Рао [15, 22, 24] исследовали начально-краевую задачу и установили существование и единственность решений. С тех пор значительное внимание было уделено изучению нелинейных псевдопараболических уравнений, включая даже сингулярные псевдопараболические и вырожденные псевдопараболические уравнения [25]-[27], где были получены не только существование и единственность решения, но и исследованы такие его свойства, как асимптотика и регулярность. Ряд работ посвящен численным методам решения краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка [28]-[34].

Дифференциальным уравнениям с дробными производными по времени и пространственным переменным, которые используются в разных областях науки, таких как физика, биология, химия, инженерия и теория управления [35]–[42], придается большое значение, как при анализе, так и при применении.

В этой связи математики все больше привлекают дробные вычисления, где некоторые обстоятельства целочисленных дифференциальных уравнений в частных производных не могут быть смоделированы. Инструмент уравнений с дробными производными активно используется при описании большого класса физических и химических процессов, происходящих в средах с фрактальной геометрией, а также при математическом моделировании экономических и социально-биологических процессов [43], и при описании различных математических моделей физических процессов широко используется дробно-дифференциальное исчисление [36, 37, 43].

Таким образом, дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка, которые являются обобщением уравнений с частными производными целочисленного порядка [20, 21, 23, 24, 25, 44], занимают особое место в теории дифференциальных уравнений. В работе Бердышева А.С., Айтжанова С.Е. и др. [45] исследуется начально-краевая задача для квазилинейного уравнения псевдопараболического типа с нелинейным граничным условием Неймана-Дирихле и разрушение решения за конечное время. Корпусов М.О. и Свешников А.Г. [46] получили достаточные условия разрушения решения начально-краевой задачи для диссипативного нелинейного псевдопараболического уравнения с нелокальным кубическим источником в ограниченной области с гладкой границей. Авторы работ [21], [47] доказали разрушение решения задачи для полулинейного псевдопараболического уравнения со сверхкритической и высокой начальной энергией за конечное время. В [48] рассмотрено нелинейное псевдопараболическое уравнение с переменными степенями и коэффициентами и доказано разрушение слабых решений за конечное время и их поведение в течение большого времени. Большое количество работ посвящено изучению различных локальных и нелокальных начально-краевых задач для дифференциальных уравнений типа Соболева, его подкласса псевдопараболических уравнений и разрушению их решений [1-68].

Краевые задачи для псевдопараболических уравнений и вырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Капуто исследованы в [32]. Для нагруженных псевдопараболических уравнений дробного порядка можно отметить работу [33], где с помощью полученных априорных оценок, доказывается единственность решения и его устойчивость по отношению к исходным данным и правой части, а также сходимость решений связанной разностной задачи к решению дифференциальной задачи со скоростью $O(h^2+\tau)$, где $h$ и $\tau$ – шаги в пространственных и временных переменных.

В работах [17], [56], [57] изучена нелокальная задача для псевдопараболического уравнения с дробными производными Капуто порядка $\sigma, 0<\sigma<1$ по времени и пространственным переменным, где дробные производные имеют порядок $\alpha, \beta, \alpha>0, \beta>0$. С использованием теоремы вложения С.Л.Соболева и построении оператора Миттаг-Леффлера доказаны теоремы существования и единственности задачи при определенных ограничениях на порядок дробных производных $\alpha$ и $\beta$.

**Цель работы.** Целью настоящей диссертационной работы является изучение вопросов однозначной разрешимости начально-краевых задач для квазилинейного псевдопараболического уравнения дробного порядка с линейными и нелинейными граничными условиями. Установление теоремы о существовании и единственности слабого обобщенного решения задач, доказательство разрушения решения задачи для квазилинейного псевдопараболического уравнения дробного порядка с линейным граничным условием и изучение асимптотического поведения решения по времени. Доказательство и установление разрешимости начально-краевой задачи для нагруженного псевдопараболического уравнения дробного порядка.

**Задачи исследования.**

Для задачи с линейным граничным условием для псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто:

– постановка и исследование разрешимости задачи для различных случаев степени положительных постоянных $p$ и $q$:

$I$ случай, когда $0<q\leq 1, 2<p<\dfrac{2N}{N-2}$, для всех $N\geq 3$;

$II$ случай, когда $1\leq q\leq 1+\dfrac{2}{N}, 2<p<\dfrac{2N}{N-2}$, для всех $N\geq 3$;

$III$ случай, когда $0<q\leq 1, 1<p\leq 2$, для всех $N\geq 3$;

$IV$ случай, когда $1\leq q\leq 1+\dfrac{2}{N}, 1<p\leq 2$, для всех $N\geq 3$;

– доказательство существования слабого обобщенного решения задачи для случаев $I-IV$;

– доказательство единственности слабого решения рассматриваемой задачи для случая $II$;

– разрушение решения задачи за конечное время;

– доказательство разрешимости задачи для любого конечного времени $t$ при $1<p\leq 2$;

– изучение асимптотического поведения решения по времени $t\to\infty$.

Для задачи с нелинейным граничным условием для псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто:

– формулировка и исследование однозначной разрешимости краевой задачи при наличии нелинейности как в самом уравнении, так и граничном условии;

– доказательство локальной разрешимости задачи для случая $2 < p < \frac{2n}{n-2}, 2 < \sigma < \frac{2(n-1)}{n-2}, n \geq 3$;

– доказательство единственности локального решения задачи при $2 < p < \frac{2n}{n-2}, n \geq 3$;

– доказательство единственности глобального решения задачи при условии $1 < p \leq 2$, и дополнительно, теорема о существовании глобального решения задачи при $1 < \sigma < \frac{2(n-1)}{n-2}, n \geq 3$;

– постановка и изучение вопросов разрешимости начально-краевой задачи для линейного псевдопараболического нагруженного уравнения дробного порядка по пространственной переменной.

**Объектом исследования** являются псевдопараболические уравнения с дробными производными Капуто.

**Предмет исследования.** Установление однозначной разрешимости поставленных задач для псевдопараболического уравнения с дробной производной, разрушение решения за конечное время, глобальная разрешимость начально-краевой задачи и единственность слабого обобщенного решения, экспоненциальное убывание решения по времени $t \to \infty$, разрешимость начально-краевой задачи для нагруженного псевдопараболического уравнения дробного порядка.

**Методы исследования.** В ходе достижения результатов исследования были применены метод приближения Галеркина, метод априорных оценок, теория соболевских пространств, методы интегрального и дифференциального исчислений, метод функционального анализа, метод компактности, метод монотонности, метод неравенств для производных дробного порядка, аналитические и функциональные методы для дробного исчисления, метод продолжения по параметру.

**Научная новизна работы.** В данной работе изучаются вопросы однозначной разрешимости начально-краевых задач для квазилинейного псевдопараболического уравнения дробного порядка с линейными и нелинейными граничными условиями с операторами дробного дифференцирования Капуто.

– доказана теорема существования слабого решения задачи для квазилинейного псевдопараболического уравнения с линейным граничным условием для случаев $I - IV$;

– сформулирована и доказана теорема единственности слабого решения задачи для псевдопараболического уравнения с линейным условием для случая $II$;

– доказано разрушение решения за конечное время;

– исследовано асимптотическое поведение решения по времени;

– сформулированы и исследованы вопросы однозначной разрешимости краевых задач, отличие которых заключается в том, что операторы дробного дифференцирования участвуют как в самом уравнении, так и в граничном условии в виде нелинейного условия;

– в случае, когда $2 < p < \dfrac{2n}{n-2}$, $2 < \sigma < \dfrac{2(n-1)}{n-2}$, $n \geq 3$, доказана теорема о локальной разрешимости задачи;

– доказана теорема единственности локального решения задачи, если выполнены условия $2 < p < \dfrac{2n}{n-2}$, $n \geq 3$;

– доказана теорема об единственности глобального решения задачи при условии $1 < p \leq 2$, и дополнительно, теорема о существовании глобального решения задачи при выполнении условий $1 < \sigma < \dfrac{2(n-1)}{n-2}$, $n \geq 3$;

– доказана разрешимость начально-краевой задачи для линейного псевдопараболического нагруженного уравнения по пространственной переменной.

**Теоретическая и практическая значимость исследования.** Исследовательская работа носит теоретический характер и результаты представляют, прежде всего, теоретический интерес, они могут быть использованы в теории исследований квазилинейных дифференциальных уравнений соболевского типа с операторами дробного интегро-дифференцирования. Псевдопараболические уравнения применимы в механике, физике и других прикладных дисциплин, что определяет практическую значимость работы. Для достигнутых результатов исследования можно провести вычислительные эксперименты и получить численные значения решений, их визуализацию.

**Основные положения выносимые на защиту.**

– Установлены и доказаны теоремы о существовании и единственности слабого обобщенного решения задачи с линейным граничным условием для псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто.

– Доказано разрушение решения задачи за конечное время.

– Изучено асимптотическое поведение решения по времени.

– Сформулированы и доказаны теоремы о существовании и единственности слабого решения задачи с нелинейным граничным условием для псевдопараболического уравнения дробной производной Капуто.

– Доказана разрешимость начально-краевой задачи для нагруженного псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто.

**Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и результатов диссертационной работы** подтверждается тем, что основные положения были получены путем подробных доказательств, приведенными в исследовательской работе на основе ранее полученных известными учеными результатов; также достоверность результатов работы может быть подтверждена их публикацией в рейтинговых рецензируемых изданиях, входящих в международные наукометрические базы Web of Science Core Collection и Scopus.

**Связь диссертационной работы с другими научно-исследовательскими работами.** Предлагаемая диссертационная работа выполнена в рамках проекта программы грантового финансирования фундаментальных и прикладных научных исследований АО «Международного университета информационных технологий» на тему «Краевые и обратные задачи для уравнений Навье-Стокса однородных, неоднородных жидкостей, тепловой конвекции и Кельвина-Фойгта», (2020-2022 гг., №AP08857604).

**Апробация работы.** Основные положения и результаты работы были представлены и докладывались на следующих научных мероприятиях:

– международная конференция «Uzbekistan-Malaysia International Conference «Computational Models and Technologies (CMT2022)» (г. Ташкент, Узбекистан, 16-17 сентября 2022 года);

– международная научная конференция «Неклассические уравнения математической физики и их приложения», (г. Ташкент, Узбекистан, 6-8 октября, 2022 года);

– научный семинар Галисийского центра математических исследований и технологии университета Сантьяго де Компостела (руководитель – профессор Альберто Кабада Фернендес, г. Сантьяго де Компостела, Испания, 21 июня 2022 года);

– научные семинары кафедры математики и математического моделирования института физики, математики и информатики КазНПУ им. Абая (руководитель – д.ф.-м.н., профессор Бердышев А.С., г.Алматы).

**Публикации и личный вклад соискателя.** Результаты диссертационного исследования опубликованы в 4 работах, 2 из которых изданы в высокорейтинговых международных журналах, относящихся к международным наукометрическим базам Web of Science и Scopus, 2 тезиса в сборниках результатов международных конференций.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа изложена 83 страницах, состоит из введения, 3 разделов с подразделами, заключения и списка использованной литературы (91 наименование).

**Основное содержание диссертации.** Во **введении** представленной диссертационной работы приведены актуальность и новизна на сегодняшний день, сформулирована цель работы и поставлены задачи и основные положения на защиту, также изложено краткое содержание диссертации.

В **первом разделе** приведены основные функциональные пространства, известные неравенства и определения, некоторые специальные функции, леммы, теоремы, которые в дальнейшем используются в исследовательской работе.

Во **втором разделе** исследуется начально-краевая задача Дирихле для квазилинейного псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто.

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \{(x,t): x \in \Omega, \Omega \subset R^n, 0 < t < T\}$ квазилинейное псевдопараболическое уравнение

$$D_{0,t}^{\alpha}(u - \chi\Delta u) - a\Delta u + c(x,t)u = b(x,t)|u|^{p-1} + |\nabla u|^q, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3}$$

Здесь $\Omega \subset R^n, n \geq 1$ – ограниченная область, граница $\partial\Omega$ достаточно гладкая, $\chi, a, p$ и $q$ – положительные постоянные, $D_{0,t}^{\alpha}$–дробная производная Капуто порядка $0 < \alpha \leq 1$:

$$D_{0,t}^{\alpha} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_s(x,s)}{(t-s)^{\alpha}} ds, \tag{4}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Положим, что функции $u_0(x), c(x,t), b(x,t)$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{gathered} 0 < c_0' \leq c(x,t) \leq c_1', \ \forall (x,t) \in Q_T, \\ 0 < |b(x,t)| \leq b_1, \ \forall (x,t) \in Q_T, \\ u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \end{gathered} \tag{5}$$

В данной задаче для положительных постоянных степеней $p$ и $q$ рассматриваются различные случаи $I - IV$.

**Определение 1.** Слабым решением задачи (1)-(3) называется функция $u(x,t)$ из пространства $V^{\alpha}(Q_T), 0 < \alpha < 1$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \left( D_{0,t}^{\alpha} u \cdot \omega + \chi \sum_{i=1}^{N} D_{0,t}^{\alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_i} + a\nabla u \nabla \omega + c(x,t)u\omega \right) dx =$$
$$= \int_{\Omega} b(x,t)|u|^{p-1} \omega dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^q \omega dx,$$

почти всюду $t \in [0,T]$, для всех $\omega(x,t) \in L_2(0,T; \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$.

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия (5), а также случаи $I$, $II$. Тогда на интервале $(0,T), T < T_0$ существует слабое решение $u(x,t)$ задачи (1)-(3).

Применяя теоремы вложения Соболева, метод компактности, метод Фаедо-Галеркина и априорных оценок доказывается теорема существования слабого решения задачи (1)-(3) при выполнении условия (5) и случаев $I$, $II$.

**Теорема 2.** Пусть выполняются $u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ и случай $II$. Тогда слабое решение задачи (1)-(3) на интервале $(0,T)$ единственно.

В доказательстве единственности обобщенного решения применяется метод априорных оценок и метод монотонности.

Наряду с этим, доказывается разрушение решения задачи (1)-(3) за конечное время.

**Теорема 3.** Пусть выполняется условие $p > 2$, тогда решение задачи (1)-(3) разрушается за конечное время $T^*$, т.е.

$$\lim_{t \to T^*} \int_\Omega |u(x,t)| \psi_1(x) dx = \infty,$$

где $T^*$ ограничен сверху

$$T^* \le \left( \frac{\rho_0}{\Gamma(3-\alpha) max\{C_1, C_2\}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Исследована глобальная разрешимость начально-краевой задачи для случая $1 < p \le 2$. Исследуется поведение решения по времени и устанавливается экспоненциальное убывание при $t \to \infty$, когда $|u|^{p-2} u$ находится в левой части уравнения.

**Теорема 4.** Пусть выполняются условия $c(x,t) \ge c_0' > 0,\ \forall (x,t) \in Q_T$, $u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega),$ а также $0 < b_0 \le b(x,t) \le b_1 < \infty,\ \forall (x,t) \in Q_T$, $1 < p \le 2,\ N \ge 3.$ Тогда для любого конечного времени существует слабое решение $u(x,t)$ задачи (1)-(3).

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \{(x,t) : x \in \Omega, \Omega \subset R^n, 0 < t < T\}$ начально-краевую задачу для псевдопараболического уравнения

$$D_{0,t}^\alpha (u - \chi \Delta u) - a\Delta u + c(x,t)u + q(x,t)|u|^{p-2} u = 0, \tag{6}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{7}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{8}$$

**Определение 2.** Слабым обобщенным решением задачи (6)-(8) называется функция $u(x,t)$ из пространства $V^\alpha(Q_T), 0 < \alpha < 1$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_\Omega \left( D_{0,t}^\alpha u \cdot \omega + \chi \sum_{i=1}^N D_{0,t}^\alpha \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_i} + a \nabla u \nabla \omega + c(x,t) u \omega \right) dx + \\ + \int_\Omega q(x,t) |u|^{p-2} \omega dx = 0, \tag{9}$$

почти всюду $t \in [0,T]$, для всех $\omega(x,t) \in L_2(0,T; \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$.

**Теорема 5.** Пусть выполняются условия $c(x,t) \ge c_0' > 0$, $\forall (x,t) \in Q_T$, $u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)$, а также $0 < q_0 \le q(x,t) \le q_1 < \infty, \forall (x,t) \in Q_T$, $D_{0,t}^\alpha b(x,t) \le b_2 < \infty$, $\forall (x,t) \in Q_T$, $1 \le p \le \dfrac{2N}{N-2}$, $N \ge 3$. Тогда на интервале $(0,T)$ существует слабое обобщенное решение задачи (6)-(8).

**Теорема 6.** Пусть выполняются $u_0(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $p > 1$, $N \ge 3$. Тогда слабое обобщенное решение задачи (6)-(8) на интервале $(0,T)$ единственно.

Также изучено поведение решения по времени $t$.

**Теорема 7.** Пусть выполнены условия $p \ge 1$, $u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Тогда решение задачи (6)-(8) удовлетворяет оценке

$$\|u(x,t)\|_{2,\Omega}^2 + \chi \|\nabla u(x,t)\|_{2,\Omega}^2 \le \\ \le \frac{M_1 \left( \|u(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \chi \|\nabla u(x,0)\|_{2,\Omega}^2 \right)}{1 + C_0 t^\alpha}, \ t \ge 0.$$

**Третий раздел** посвящен исследованию вопросов однозначной разрешимости начально-краевых задач для квазилинейного псевдопараболического уравнения дробного порядка с нелинейными граничными условиями с операторами дробного дифференцирования Капуто. Также в данном разделе приводится начально-краевая задача для нагруженного псевдопараболического уравнения дробного порядка и доказывается ее разрешимость.

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \left\{ (x,t) : x \in \Omega, \Omega \subset R^n, 0 < t < T \right\}$ квазилинейное псевдопараболическое уравнение дробного порядка

$$D_{0,t}^\alpha (u - \Delta u) - \Delta u + c(x,t) u = b(x,t) |u|^{p-2} u. \tag{10}$$

Здесь $\Omega \subset R^n$, $n \ge 3$ ограниченная область, $\partial\Omega \in C^{2,\delta}$, $\delta \in (0,1)$, достаточно гладкая, $p$ и $\alpha$ – заданные положительные постоянные, причем $0 < \alpha < 1$, $c(x,t)$

и $b(x,t)$ – заданные функции, $D_{0,t}^{\alpha}u(x,t)$ – оператор дробного дифференцирования в смысле Капуто (4).

**Задача** $K$. Найти решение $u(x,t)$ уравнение (10) удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0)=u_0(x), \quad x\in\Omega \tag{11}$$

и нелинейному граничному условию

$$D_{0,t}^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial n}+K(x,t)|u|^{\sigma-2}u\Big|_{\Gamma}=0, \tag{12}$$

где $\Gamma=\partial\Omega\times(0,T)$, $\sigma$ – положительная постоянная.

Обозначим через $V^{\alpha}(Q_T)$, $0<\alpha<1$ пространство с нормой

$$\|u\|_{V^{\alpha}(Q_T)}^2=\|u\|_{L_{\infty}(0,T;W_2^1(\Omega))}^2+\left\|D_{0,t}^{\alpha}u\right\|_{L_{\infty}(0,T;W_2^1(\Omega))}^2.$$

Всюду в дальнейшем предположим, что данные задачи удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered} c(x,t)\ge c_0^{*}>0, \quad 0<b_0\le b(x,t)\le b_1, \quad \forall(x,t)\in Q_T, \\ |D_{0,t}^{\alpha}b(x,t)|\le b_2, \quad 0<K_0\le K(x,t)\le K_1, \ \forall(x,t)\in Q_T, \end{gathered} \tag{13}$$

Для этой задачи исследуется локальная разрешимость посредством метода Фаедо-Галеркина: доказывается теорема существовании слабого обобщенного решения задачи (10)-(12) при выполнении условий (13) и $2<p<\dfrac{2n}{n-2}$, $2<\sigma<\dfrac{2(n-1)}{n-2}$, $n\ge 3$; устанавливается единственность локального обобщенного решения задачи (10)-(12) при выполнении условия $u_0(x)\in W_2^1(\Omega)$, $2<p<\dfrac{2n}{n-2}$, $n\ge 3$ на интервале $(0,T)$, $T<T_0$.

**Определение 3.** Слабым обобщенным решением задачи $K$ (10)-(12) называется функция $u(x,t)\in V^{\alpha}(Q_T)\cap L_{\sigma}(\Gamma)$, $0<\alpha<1$, удовлетворяющая почти всюду $t\in[0,T]$, следующему интегральному тождеству:

$$\int_{\Omega}\left(D_{0,t}^{\alpha}u\cdot\omega+\sum_{i=1}^{n}D_{0,t}^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x_i}+c(x,t)u\omega\right)dx+$$
$$+\int_{\Gamma}K(x,t)|u|^{\sigma-2}u\omega d\Gamma=\int_{\Omega}b(x,t)|u|^{p-2}u\omega dx$$

для всех функций $\omega \in L_2\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right) \cap L_\sigma(\Gamma)$.

**Теорема 8.** Пусть выполняются условия (13) и $2 < p < \dfrac{2n}{n-2}$, $2 < \sigma < \dfrac{2(n-1)}{n-2}$, $n \ge 3$, тогда для любой функции $u_0(x) \in W_2^1(\Omega)$ почти всюду $t \in (0,T)$, $T < T_0$ где

$$T_0 = \left[ \frac{2\alpha}{2(p-2)b_1 M_2 M_1^{\frac{p-2}{2}} \left( \dfrac{2(n-1)}{n-2} \right)^{\frac{(p-2)n}{2}} \left( \|u(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u(x,0)\|_{2,\Omega}^2 \right)^{\frac{p-2}{2}}} \right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

существует слабое обобщенное решение $u(x,t)$ задачи $K$ (10)-(12).

**Теорема 9**. Пусть выполняются $u_0(x) \in W_2^1(\Omega)$, $2 < p < \dfrac{2n}{n-2}$, $n \ge 3$, тогда обобщенное решение задачи (10)-(12) на интервале $(0,T)$, $T < T_0$ единственно.

Изучается глобальная разрешимость задачи $K$: доказывается существование и единственность обобщенного решения задачи (10)-(12) на интервале $(0,T)$:

**Теорема 10.** Пусть выполняются условия (13) и $1 < p \le 2$, $1 < \sigma < \dfrac{2(n-1)}{n-2}$, $n \ge 3$. Тогда для любого $u_0(x) \in W_2^1(\Omega)$ на интервале $(0,T)$ существует обобщенное решение $u(x,t)$ задачи $K$ (10)-(12).

**Теорема 11**. Пусть выполнены $1 < p \le 2$, $n \ge 3$. Тогда для любой функции $u_0(x) \in W_2^1(\Omega)$, на интервале $(0,T)$ существует единственное обобщенное решение задачи $K$ (10)-(12).

Также в данном разделе рассматривается разрешимость задачи с нелинейными граничными условиями для одного варианта псевдопараболического уравнения дробного порядка:

Как и ранее, рассмотрим в цилиндре $Q_T = \left\{(x,t) : x \in \Omega, \Omega \subset R^n, 0 < t < T\right\}$ начально-краевую задачу для уравнения (10) в предположении что коэффициент $b(x,t) = -q(x,t)$

$$D_{0,t}^{\alpha}\left(u - \Delta u\right) - \Delta u + c(x,t)u + q(x,t)|u|^{p-2} u = 0, \tag{14}$$

здесь $q(x,t)$ – заданная функция. Относительно коэффициентов уравнения (14) предположим выполнены следующие условия:

$$\begin{gathered} c(x,t) \geq c_0^* > 0,\ 0 < q_0 \leq q(x,t) \leq q_1,\ \forall (x,t) \in Q_T, \\ | D_{0,t}^{\alpha} q(x,t) | \leq q_2,\ 0 < K_0 \leq K\left(x,t\right) \leq K_1,\ \forall (x,t) \in Q_T. \end{gathered} \tag{15}$$

**Задача $K_q$.** Найти решение уравнения (14), удовлетворяющее условиям (11)-(12).

Доказывается существование слабого обобщенного решения задачи $K_q$ на интервале $(0,T)$ при выполнении условий (15) и $1 \leq p \leq \dfrac{2n}{n-2}, 1 \leq \sigma \leq \dfrac{2(n-1)}{n-2}, n \geq 3$. Устанавливается единственность слабого обобщенного решения задачи $K_q$ (14), (11)-(12) на интервале $(0,T)$ при $u_0(x) \in W_2^1(\Omega),\ p > 1, n \geq 3.$

**Теорема 12.** Пусть выполняются условия (15) и $1 \leq p \leq \dfrac{2n}{n-2}$, $1 \leq \sigma \leq \dfrac{2(n-1)}{n-2}, n \geq 3$. Тогда для любой функции $u_0(x) \in W_2^1(\Omega)$ почти всюду на интервале $(0,T)$ существует слабое обобщенное решение $u(x,t)$ задачи $K_q$.

**Теорема 13.** Пусть выполняются $u_0(x) \in W_2^1(\Omega),\ p > 1, n \geq 3.$ Тогда слабое обобщенное решение задачи $K_q$ (14), (11), (12) на интервале $(0,T)$ единственно.

Рассмотрим в прямоугольной области $Q_T = \{x \in (0,1);\ t \in [0,T]\}$ нагруженное псевдопараболическое уравнение

$$\begin{gathered} D_{0,t}^{\alpha} u - D_{0,t}^{\alpha} u_{xx} - u_{xx} + cu = f(x,t) + b_1(x,t) D_{0,t}^{\alpha} u_{xx}(0,t) + b_2(x,t) u_{xx}(0,t), \\ 0 < x < 1,\quad 0 < t < T, \end{gathered} \tag{16}$$

с начальным

$$u(x,0) = 0,\ 0 \leq x \leq 1, \tag{17}$$

и краевыми условиями

$$u_x(0,t) = 0, u_x(1,t) = 0,\ 0 \leq t \leq T, \tag{18}$$

где $D_{0,t}^{\alpha}$ – дробная производная Капуто порядка $0 < \alpha \leq 1$, $f(x,t)$, $b_i(x,t) (i = 0,1,2)$ – заданные функции, $c$ – постоянная.

**Теорема 14.** Пусть выполняются включения $f(x,t), f_{xx}(x,t) \in L_2(D)$, $f_x(0,t),\ f_x(1,t) \in C[0,T],\ b_1(x,t), b_2(x,t) \in C^2(D).$ Кроме того, пусть выполняются условия

$$1 - \frac{3}{\varepsilon_1}\left(b_{10}^2(t) + b_{11}^2(t)\right) - \frac{\overline{b}_{11}^2 + \overline{b}_{22}^2}{2c\varepsilon_1} - 4c\varepsilon_1 - 3\overline{b}_{11}^2 \geq K_0 > 0,\ \ t \in [0,T], \tag{19}$$

где $\overline{b}_{11} = \max\limits_{(x,t)\in D} b_{1xx}(x,t),\ \overline{b}_{22} = \max\limits_{(x,t)\in D} b_{2xx}(x,t),\ \ 0 < \varepsilon_1 < \dfrac{1 - 3\overline{b}_{11}^2}{4c}$.

Тогда существует решение $u(x,t)$ нелокальной задачи (16)-(18) такое, что $u(x,t) \in W_2^{2,1}(D)$.

В **заключении** приведены основные результаты, полученные при выполнении диссертации и краткие выводы по ним.

Автор выражает благодарность отечественным научным консультантам – доктору физико-математических наук, профессору Бердышеву А.С. и кандидату физико-математических наук, ассоциированному профессору Айтжанову С.Е., за постановку задач и внимание к диссертационной работе, зарубежному научному консультанту – доктору естественных наук (PhD), профессору Альберто Кабада Фернандес за поддержку и ценные советы при выполнении исследований.

## 1 ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

### Известные утверждения

Определим вспомогательные функциональные пространства и определим их свойства.

$R^n$ – $n$-мерное евклидово пространство точек $x=(x_1,x_2,...,x_n)$.

$W^{\alpha}(Q_T)$, $0<\alpha<1$ – гильбертово пространство с нормой

$$\|u\|^2_{W^{\alpha}(Q_T)}=\|u\|^2_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))}+\left\|D^{\alpha}_{0,t}u\right\|^2_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))},$$

где $Q_T$ – цилиндр $\Omega\times(0,T)$.

$L_p(\Omega)$ – множество суммируемых со степенью $p\ge 1$ в смысле Лебега функций $u(x)$, для которых $|u(x)|^p$ интегрируема по $\Omega$. Норма в этом пространстве определяется равенством [69]:

$$\|u\|_{L_p(\Omega)}\equiv\|u\|_{p,\Omega}=\left(\int_{\Omega}|u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},1<p<\infty.$$

$W_p^l(\Omega)$ при целом $l$ – гильбертово пространство, состоящее из всех элементов $L_p(\Omega)$, имеющие обобщенные производные всех видов до порядка $l$ включительно, суммируемые по $\Omega$ со степенью $p$. Норма в этом пространстве определяется равенством [69]:

$$\|u\|_{W_p^l(\Omega)}=\left(\sum_{k=0}^{l}\left\|D^k u\right\|^p_{p,\Omega}\right)^{\frac{1}{p}},$$

где при целом $D^k u$ – любая производная от $u(x)$ до порядка $k$, а $\sum\limits_k$ – суммирование по всевозможным производным порядка $k$:

$$D^k u=\frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1}\cdot...\cdot\partial x_n^{k_n}};\ k=(k_1,...,k_n)\text{ - мультииндекс,}\ |k|=k_1+...+k_n,$$

$$D^1u\equiv Du\equiv\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right),\ D^0u=u.$$

$L_\infty$ – совокупность всех измеримых функций с конечной нормой

$$\|u\|^2_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))} = ess.\sup_{t\in[0,T]} \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)},$$

где $ess.\sup$ – существенный супремум функции.

$\overset{0}{W}{}^l_p(\Omega)$ является подпространством $W^l_p$, определено как замыкание множества бесконечно дифференцируемых финитных функций в норме $W^l_p$, для кусочно-гладких границ $\overset{0}{W}{}^l_p(\Omega)$ можно определить и как совокупность всех элементов из $W^l_p$, обращающихся в ноль на $\partial\Omega$, с нормой $W^l_p$.

В диссертационном исследовании будут часто использованы широко известные алгебраические и функциональные неравенства. Из числа алгебраических неравенств потребуется неравенство Юнга [69]:

$$ab \le \frac{1}{m}\varepsilon^m a^m + \frac{m-1}{m}\varepsilon^{-\frac{m}{m-1}} b^{\frac{m}{m-1}}, \tag{1.1}$$

справедливое при любых положительных $a, b, \varepsilon$ и $m > 1$.

Из функциональных неравенств будут применены такие неравенства, как

а) неравенство Коши-Буняковского [69]:

$$\left|\int_\Omega \sum_i u_i v_i dx\right| \le \left(\int_\Omega \sum_i u_i^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\Omega \sum_i v_i^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.2}$$

б) неравенство Гёльдера [37]:

$$\int_\Omega | f(x)g(x)| dx \le \| f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_{p'}(\Omega)}, \quad p' = \frac{p}{p-1}, \tag{1.3}$$

в котором $f(x) \in L_p(\Omega)$, $g(x) \in L_{p'}(\Omega)$. Показатель $p'$, связанный с $p$ равенством

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

называется сопряженным с $p$.

Дадим определения Гамма-функции и функции Миттаг-Леффлера и приведем лемму с некоторыми свойствами функции Миттаг-Леффлера.

**Определение 1.1.** [37] Гамма-функцией $\Gamma(z)$ называется интеграл Эйлера второго рода, определяемая формулой:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx, \quad \mathrm{Re}(z)>0,$$

который, очевидно, сходится при всех $z\in C,$ для которых $\mathrm{Re}(z)>0$.

**Определение 1.2.** [37] Функцией Миттаг-Леффлера называется целая функция, определяемая степенным рядом

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad \alpha>0. \tag{1.4}$$

Также функцией Миттаг-Леффлера называют сумму более общего ряда

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad \alpha>0,\ \beta>0. \tag{1.5}$$

Таким образом, $E_\alpha(z)=E_{\alpha,1}(z)$. Следующие формулы непосредственно вытекают из определения 1.2 функции $E_{\alpha,\beta}(z)$:

$$E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha)=\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k\mu^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)},$$
$$E_{\alpha,\alpha}(-\mu t^\alpha)=\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k\mu^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}.$$

**Лемма 1.1.** [36] Функция Миттаг-Леффлера имеет следующие свойства:

$1^\circ$. Для $0<\alpha<1$ и $\mu>0$ существует постоянная $M_1>0$, такая, что

$$0<E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha)\le \frac{M_1}{1+\mu t^\alpha}\le M_1,\ t>0. \tag{1.6}$$

$2^\circ$. Для $0<\alpha<1$ и $\mu>0$ существует постоянная $M_2>0$, такая, что

$$0<t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\mu t^\alpha)\le M_2 t^{\alpha-1},\ t>0. \tag{1.7}$$

**Определение 1.3.** [37] Дробная производная Капуто порядка $0<\alpha\le 1$ определяется с помощью равенства:

$$D_{0,t}^{\alpha}u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{u_s(x,s)}{(t-s)^{\alpha}}ds, \qquad (1.8)$$

где $\Gamma(1-\alpha)$ – Гамма-функция Эйлера.

**Лемма 1.2.** [70] Для любой функции $\upsilon(t)$, абсолютно непрерывной на $[0,T]$, справедливо неравенство

$$\upsilon(t)D_{0,t}^{\alpha}\upsilon(t)\geq\frac{1}{2}D_{0,t}^{\alpha}\upsilon^2(t),\ \ 0<\alpha<1.$$

**Лемма 1.3.** [69] Для любой функции $u(x)\in\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{p,\Omega}\leq\chi\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2+\frac{(1-\alpha_1)\alpha_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}C^{\frac{2}{1-\alpha_1}}}{\chi^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}}\|u\|_{2,\Omega}^2,$$

где

$$\alpha_1=\frac{(p-2)N}{2p},\ \ \alpha_1<1,\ 2<p<\frac{2N}{N-2},\ N\geq 3.$$

**Лемма 1.4. (Гроноулла-Беллмана)** [71]. Пусть $u(t)\geq 0$ и $f(t)\geq 0$ при $t\geq t_0$ и $u(t),\ f(t)\in C[t_0,\infty]$, причем при $t\geq t_0$ выполнено неравенство

$$u(t)\leq c+\int_{t_0}^t f(t_1)u(t_1)dt_1,$$

где $c$ – положительная постоянная. В таком случае при $t\geq t_0$ имеем

$$u(t)\leq c\exp\int_{t_0}^t f(t_1)dt_1.$$

**Теорема 1.1. (вложений Соболева)** [72]. Имеют место непрерывные вложения:

$$W_0^{1,p}(\Omega)\subset L^{p^*}(\Omega)\ \text{при}\ N>p,$$

где

$$p^* = \frac{Np}{N-p},$$
$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}(\overline{\Omega}) \text{ при } N < p.$$

Граница пространства $\Omega$ предполагается настолько гладкой, насколько это нужно.

В частности, имеют место следующие неравенства:

$$\|u\|_{p^*} \le c\|D_x u\|_p \text{ при } N > p;$$
$$\sup_{x\in\Omega}|u(x)| \le c\left(meas\,\Omega\right)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p}}\|D_x u\|_p \text{ при } N < p.$$

**Теорема 1.2. (Реллиха-Кондрашова)** [72]. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – это ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Имеет место вполне непрерывное вложение:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \text{ при } p < N$$

для всех $q$ таких, что

$$q \in [1, p^*),$$

где

$$p^* = \frac{Np}{N-p}.$$

**Теорема 1.3.** [73] Пусть $A(\lambda)$ – непрерывная на $[0,1]$ оператор-функция (при каждом $\lambda \in [0,1]$ $A(\lambda) \in \mathcal{L}(X,Y)$) , причем оператор $A(0)$ непрерывно обратим. Если для $A(\lambda)$ выполняется условие

$$\|A(\lambda)x\| \ge \gamma\|x\|, \ \gamma > 0, \ x \in X,$$

то $A(1)$ непрерывно обратим, причем

$$\|A^{-1}(1)\| \le \gamma^{-1}.$$

# 2 РАЗРЕШИМОСТЬ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

Данный раздел диссертационной работы посвящен изучению разрешимости задач для псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто. Существование слабого решения исследуется с помощью приближений Галеркина и априорных оценок. Для доказательства единственности слабого решения задачи применяются теорема вложения Соболева, теорема Реллиха-Кондрашова и лемма Гронуолла-Беллмана. Наряду с этим, доказано разрушение решения задачи за конечное время. Изучается глобальная разрешимость начально-краевой задачи и единственность слабого обобщенного решения.

## 2.1 Постановка задачи

В цилиндре $Q_T = \left\{(x,t) : x \in \Omega, \Omega \subset R^n,\ 0 < t < T\right\}$ рассмотрим квазилинейное псевдопараболическое уравнение

$$D_{0,t}^{\alpha}(u - \chi\Delta u) - a\Delta u + c(x,t)u = b(x,t)|u|^{p-1} + |\nabla u|^q, \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2.2}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.3}$$

Здесь $\Omega \subset R^n, n \geq 1$ – ограниченная область, граница $\partial\Omega \in C^{2,\delta},\ \delta \in (0,1)$ достаточно гладкая, $\chi, a, p$ и $q$ – положительные постоянные, $D_{0,t}^{\alpha}$ – дробная производная Капуто порядка $0 < \alpha \leq 1$ (1.8).

Обозначим через $V^{\alpha}(Q_T),\ 0 < \alpha < 1$ пространство с нормой

$$\|u\|^2_{V^{\alpha}(Q_T)} = \|u\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \|u\|^2_{L_\infty(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))} +$$

$$+\left\|D_{0,t}^{\alpha}u\right\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \left\|D_{0,t}^{\alpha}u\right\|^2_{L_\infty(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))}.$$

Положим, что функции $u_0(x),\ c(x,t),\ b(x,t)$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{gathered} 0 < c_0' \leq c(x,t) \leq c_1',\ \forall (x,t) \in Q_T, \\ 0 < |b(x,t)| \leq b_1,\ \forall (x,t) \in Q_T, \\ u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \end{gathered} \tag{2.4}$$

В данной задаче для постоянных $p$ и $q$ рассматриваются различные случаи:

$$I.\ 0<q\le 1,\ 2<p<\frac{2N}{N-2},\ N\ge 3.$$

$$II.\ 1\le q\le 1+\frac{2}{N},\ 2<p<\frac{2N}{N-2},\ N\ge 3.$$

$$III.\ 0<q\le 1,\ 1<p\le 2,\ N\ge 3.$$

$$IV.\ 1\le q\le 1+\frac{2}{N},\ 1<p\le 2,\ N\ge 3.$$

**Определение 2.1.** Слабым решением задачи (2.1)-(2.3) называется функция $u(x,t)$ из пространства $V^{\alpha}(Q_T),\ 0<\alpha<1$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{gathered}\int_{\Omega}\left(D_{0,t}^{\alpha}u\cdot\omega+\chi\sum_{i=1}^{N}D_{0,t}^{\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x_i}+a\nabla u\nabla\omega+c(x,t)u\omega\right)dx=\\=\int_{\Omega}b(x,t)|u|^{p-1}\omega dx+\int_{\Omega}|\nabla u|^{q}\omega dx,\end{gathered}\tag{2.5}$$

почти всюду $t\in[0,T]$, для всех $\omega(x,t)\in L_2(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$.

### 2.2 Существование решения. Галеркинские приближения. Априорные оценки

**Теорема 2.2.1.** Пусть выполняются условия (2.4), а также случаи $I, II$. Тогда на интервале $(0,T),\ T<T_0$ существует слабое решение $u(x,t)$ задачи (2.1)-(2.3).

**Доказательство.** Выберем в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ некоторую систему функций $\{\psi_j(x)\}$, образующую базис в данном пространстве. Такая система заведомо существует, поскольку $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ является сепарабельным. Будем искать приближенное решение задачи (2.1)-(2.3) в виде

$$u_m(x,t)=\sum_{k=1}^{m}v_{mk}(t)\psi_k(x),\tag{2.6}$$

где коэффициенты $v_{mk}(t)$ ищутся из условий

$$\sum_{k=1}^{m} D_{0,t}^{\alpha} v_{mk}(t) \int_{\Omega} \left[ \psi_k \psi_j + \chi \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \right] dx + a \int_{\Omega} \nabla u_m \nabla \psi_j dx +$$
$$+ \int_{\Omega} c(x,t) u_m \psi_j dx = \int_{\Omega} b(x,t) \left| u_m \right|^{p-1} \psi_j dx + \int_{\Omega} \left| \nabla u_m \right|^{q} \psi_j dx. \qquad (2.7)$$

$$u_{m0} = u_m(0) = \sum_{k=1}^{m} C_{mk}(0) \psi_k = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \psi_k , \qquad (2.8)$$

причем

$$u_{m0} \to u_m(0) \text{ сильно в } \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \text{ при } m \to \infty. \qquad (2.9)$$

Введем обозначения

$$\vec{v}_m \equiv \left\{ v_{1m}(t), ..., v_{mm}(t) \right\}^T ,\ \vec{\alpha} \equiv \left\{ \alpha_1, ..., \alpha_m \right\}^T ,\ a_{kj} = \int_{\Omega} [\psi_k \psi_j + (\nabla \psi_k , \nabla \psi_j)] dx,$$

$$C_{kj} = a \int_{\Omega} \nabla \psi_k \nabla \psi_j dx + \int_{\Omega} c(x,t) \psi_k \psi_j dx,$$

$$b_{kj} = \int_{\Omega} b(x,t) \left| u_m \right|^{p-1} \psi_j dx + \int_{\Omega} \left| \nabla u_m \right|^{q} \psi_j dx,$$

$$A_m \equiv \{a_{jk}\},\ \vec{C}_m \equiv \{C_{jk}\},\ \vec{F}_m(\vec{v}_m) \equiv \{b_{jk}(\vec{v}_m)\} \vec{v}_m .$$

Тогда система уравнений (2.7) и условие (2.8) принимает матричный вид:

$$A_m D_{0,t}^{\alpha} \vec{v}_m + \vec{C}_m \vec{v}_m \equiv \vec{F}_m(\vec{v}_m),$$
$$\vec{v}_m(0) = \vec{\alpha}. \qquad (2.10)$$

Из леммы 1.2. следует неравенство

$$\left\| u \right\|_{p,\Omega}^{\sigma} \le C_1 (\chi \left\| \nabla u \right\|_{2,\Omega}^{2} + \left\| u \right\|_{2,\Omega}^{2})^{\frac{\sigma}{2}},$$

где

$$C_1 = \left( \max\left\{ 1; \frac{(1-\alpha_1)\alpha_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}} C^{\frac{2}{1-\alpha_1}}}{\chi^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}} \right\} \right)^{\frac{\sigma}{2}}.$$

Умножим обе части равенства (2.7) на $v_{mj}(t)$ и просуммируем обе части получившегося равенства по $j=\overline{1,m}$. В результате получим равенство

$$\begin{gathered}\int_\Omega \left( u_m D_{0,t}^\alpha u_m + \chi \nabla u_m D_{0,t}^\alpha \nabla u_m \right) dx + a\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx + \\ +\int_\Omega c(x,t)|u_m|^2 dx = \int_\Omega b(x,t)|u_m|^{p-1} u_m dx + \int_\Omega |\nabla u_m|^q u_m dx.\end{gathered} \tag{2.11}$$

Применяя лемму 1.2. и условие (2.4), получим неравенство

$$\begin{gathered}\frac{1}{2} D_{0,t}^\alpha \int_\Omega \left[ |u_m|^2 + \chi |\nabla u_m|^2 \right] dx + a\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx + c_0' \int_\Omega |u_m|^2 dx \le \\ \le \int_\Omega b(x,t)|u_m|^{p-1} u_m dx + \int_\Omega |\nabla u_m|^q u_m dx.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Оценим правую часть (2.12), применим лемму 1.3. и получим

$$\left| \int_\Omega b(x,t)|u_m|^{p-1} u_m dx \right| \le b_1 \|u_m\|_{p,\Omega}^p \le b_1 \left( \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2 + C_1 \|u_m\|_{2,\Omega}^2 \right)^{\frac{p}{2}}. \tag{2.13}$$

Случай $I$:

$$\begin{gathered}\left| \int_\Omega |u_m|^q u_m dx \right| \le \left( \int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx \right)^{\frac{q}{2}} \left( \int_\Omega |u|_m^{\frac{2}{2-q}} dx \right)^{\frac{2-q}{2}} \le \\ \le \|\nabla u_m\|_{2.\Omega}^q |\Omega|^{\frac{1-q}{2}} \|u_m\|_{2,\Omega} \le C_{02} \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{q+1} \le \\ \le \frac{C_{02}^2}{2C_2} + \frac{C_2}{2} \left( \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2 + \|u_m\|_{2,\Omega}^2 \right).\end{gathered} \tag{2.14}$$

Случай $II$:

$$\left|\int_\Omega |\nabla u_m|^q u_m dx\right| \le \left(\int_\Omega |\nabla u_m|^{\frac{2Nq}{N+2}} dx\right)^{\frac{N+2}{2N}} \left(\int_\Omega |u_m|^{\frac{2N}{N-2}} dx\right)^{\frac{N-2}{2N}} \le$$
$$\le C_{02} \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{q+1} \le C_4 + \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{p} \le \tag{2.15}$$
$$\le C_4 + \left(\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2 + \|u_m\|_{2,\Omega}^2\right).$$

Тогда из равенства (2.13) следует

$$D_{0,t}^\alpha \int_\Omega \left[|u_m|^2 + \chi|\nabla u_m|^2\right] dx + C_2 \int_\Omega \left[|u_m|^2 + \chi|\nabla u_m|^2\right] dx \le$$
$$\le C_4 + C_3 \left(\|u_m\|_{2,\Omega}^2 + \chi\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2\right)^{\frac{p}{2}}, \tag{2.16}$$

где $C_2 = \min\left\{c_0'; \frac{a}{\chi}\right\}$.

Обозначим через $y(t) \equiv \|u_m\|_{2,\Omega}^2 + \chi\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2$, тогда (2.16) примет вид:

$$D_{0,t}^\alpha y(t) + C_2 y(t) \le C_4 + C_3 [y(t)]^{\frac{p}{2}}. \tag{2.17}$$

Отсюда получим

$$y(t) \le E_{\alpha,1}(-C_2 t^\alpha) y(0) + C_3 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-C_2 (t-s)^\alpha)[y(s)]^{\frac{p}{2}} ds +$$
$$+ C_4 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-C_2 (t-s)^\alpha) ds, \tag{2.18}$$

где $E_{\alpha,\beta}(z)$ – функция Миттаг-Леффлера (1.5).

В неравенстве (2.18) применим (1.6) и (1.7) и получим:

$$y(t) \le M_1 y(0) + \frac{M_2 C_4}{\alpha} t^\alpha + M_2 C_3 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[y(s)\right]^{\frac{p}{2}} ds.$$

Применив к которому теорему Бихари [74], получим утверждение: если

$$t < \left[ \frac{2\alpha}{(p-2)M_2 C_2 (M_1 y(0))^{\frac{p-2}{2}}} \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad 0 \le t < T,$$

тогда справедливо неравенство

$$y(t) \le \frac{M_1 y(0)}{\left[ 1 - (M_1 y(0))^{\frac{p-2}{2}} \frac{M_2 C_2}{\alpha} t^{\alpha} \right]^{\frac{2}{p-2}}},$$

то есть,

$$\begin{gathered} \|u_m(x,t)\|_{2,\Omega}^2 + \chi \|\nabla u_m(x,t)\|_{2,\Omega}^2 \le \\ \le \frac{M_1 \left( \|u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \chi \|\nabla u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2 \right)}{\left[ 1 - M_1^{\frac{p-2}{2}} \left( \|u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \chi \|\nabla u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} \frac{M_2 C_2}{\alpha} t^{\alpha} \right]^{\frac{2}{p-2}}}. \end{gathered} \tag{2.19}$$

Из этой оценки можно сделать вывод, что существует $T_0 > 0$ такое, что

$$\|u_m\|_{2,\Omega}^2 + \chi \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2 \le C_3, \tag{2.20}$$

для всех $t \in [0,T],\, T < T_0,$ где постоянная $C_3$ не зависит от $m \in N$.

Теперь умножим равенство (2.7) на $D_{0,t}^{\alpha} v_{mj}(t)$ и просуммируем по $j = \overline{1,m}$. В результате получим

$$\begin{gathered} \left\| D_{0,t}^{\alpha} u_m \right\|_{2,\Omega}^2 + \chi \left\| \nabla D_{0,t}^{\alpha} u_m \right\|_{2,\Omega}^2 + a \int_{\Omega} \nabla u_m D_{0,t}^{\alpha} u_m dx + \\ + \int_{\Omega} c(x,t) u_m D_{0,t}^{\alpha} u_m dx = \int_{\Omega} b(x,t) |u_m|^{p-2} u_m D_{0,t}^{\alpha} u_m dx. \end{gathered} \tag{2.21}$$

Вынесем третью и четвертую слагаемые в правую часть, тогда тождество (2.21) запишется в виде

$$\begin{gathered} \left\| D_{0,t}^{\alpha} u_m \right\|_{2,\Omega}^2 + \chi \left\| \nabla D_{0,t}^{\alpha} u_m \right\|_{2,\Omega}^2 = -a \int_{\Omega} \nabla u_m D_{0,t}^{\alpha} u_m dx - \\ - \int_{\Omega} c(x,t) u_m D_{0,t}^{\alpha} u_m dx + \int_{\Omega} b(x,t) |u_m|^{p-2} u_m D_{0,t}^{\alpha} u_m dx. \end{gathered} \tag{2.22}$$

Используя неравенства Гельдера (1.3), Коши-Буняковского (1.2) и неравенства интерполяции [69], оценим правую часть (2.22), тогда справедливы

$$\left|-a\int_\Omega \nabla u_m D_{0,t}^\alpha \nabla u_m dx\right| \le \frac{\varepsilon_1}{4}\left\|D_{0,t}^\alpha \nabla u_m\right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{a^2}{\varepsilon_1}\left\|\nabla u_m\right\|_{2,\Omega}^2,$$

$$\left|\int_\Omega c(x,t) u_m D_{0,t}^\alpha u_m dx\right| \le \frac{\varepsilon_1}{4}\left\|D_{0,t}^\alpha \nabla u_m\right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{c_1^2}{\varepsilon_2}\left\|u_m\right\|_{2,\Omega}^2,$$

$$\left|\int_\Omega b(x,t)|u_m|^{p-1} D_{0,t}^\alpha u_m dx\right| \le b_1\int_\Omega |u_m|^{p-1}\left|D_{0,t}^\alpha u_m\right| \le$$

$$\le b_1\left(\int_\Omega |u_m|^p dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |u_m|^{\frac{n(p-2)}{2}} dx\right)^{\frac{1}{n}}\left(\int_\Omega \left|D_{0,t}^\alpha u_m\right|^{\frac{2n}{n-2}} dx\right)^{\frac{n-2}{2n}} \le$$

$$\le b_1\left\|u_m\right\|_{p,\Omega}^{\frac{p}{2}}\left\|u_m\right\|_{\frac{n(p-2)}{2},\Omega}^{\frac{p-2}{2}}\left\|D_{0,t}^\alpha u_m\right\|_{\frac{2n}{n-2},\Omega} \le b_1 C_3^{\frac{3p-4}{4}}\left\|\nabla D_{0,t}^\alpha u_m\right\|_{2,\Omega} \le$$

$$\le \frac{b_1^2 C_3^{\frac{3p-4}{2}}}{\varepsilon_3} + \frac{\varepsilon_3}{4}\left\|\nabla D_{0,t}^\alpha u_m\right\|_{2,\Omega}^2,$$

где $2 < p < \dfrac{2N}{N-2}$, $N \ge 3$.

Случай $I$:

$$\left|\int_\Omega |\nabla u_m|^q D_{0,t}^\alpha u_m dx\right| \le \left(\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx\right)^{\frac{q}{2}}\left(\int_\Omega \left|D_{0,t}^\alpha u_m\right|^{\frac{2}{2-q}} dx\right)^{\frac{2-q}{2}} \le$$
$$\le \left\|\nabla u_m\right\|_{2,\Omega}^q |\Omega|^{\frac{1-q}{2}}\left\|D_{0,t}^\alpha u_m\right\|_{2,\Omega} \le \frac{\varepsilon_4}{4}\left\|D_{0,t}^\alpha u_m\right\|_{2,\Omega}^2 + C_5(\varepsilon_4). \tag{2.23}$$

Случай $II$:

$$\left|\int_\Omega |\nabla u_m|^q D_{0,t}^\alpha u_m dx\right| \le \left(\int_\Omega |\nabla u_m|^{\frac{2N_q}{N+2}} dx\right)^{\frac{N+2}{2N}}\left(\int_\Omega \left|D_{0,t}^\alpha u_m\right|^{\frac{2N}{N-2}} dx\right)^{\frac{N-2}{2N}} \le$$
$$\le C_{02}\left\|\nabla u_m\right\|_{2,\Omega}^q\left\|\nabla D_{0,t}^\alpha u_m\right\|_{2,\Omega} \le C_5(\varepsilon_5) + \frac{\varepsilon_5}{4}\left\|\nabla D_{0,t}^\alpha u_m\right\|_{2,\Omega}^2. \tag{2.24}$$

Подставляя эти неравенства в тождество (2.22), и выбирая $\varepsilon_i,\ i=1,...,5$ для случая $I$: $\varepsilon_1=\varepsilon_3=\chi,\ \varepsilon_2=\varepsilon_4=1,$ а для случая $II$: $\varepsilon_1=\varepsilon_3=\varepsilon_5=\dfrac{2\chi}{3},\ \varepsilon_2=2$, тогда получим вторую оценку:

$$\left\|D_{0,t}^{\alpha}u_m\right\|_{2,\Omega}^{2}+\chi\left\|\nabla D_{0,t}^{\alpha}u_m\right\|_{2,\Omega}^{2}\le C_4, \tag{2.25}$$

для всех $t\in[0,T],\ T<T_0$.

Из полученных оценок (2.22), (2.25) вытекают, соответственно, следующие утверждения:

$$u_m \text{ ограничена в } L_\infty\left(0,T;\,L_2(\Omega)\right)\cap L_\infty\left(0,T;\,\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right), \tag{2.26}$$

$$D_{0,t}^{\alpha}u_m \text{ ограничена в } L_\infty\left(0,T;\,L_2(\Omega)\right)\cap L_\infty\left(0,T;\,\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right). \tag{2.27}$$

Кроме того, в силу поставленных условий на $p$:

$$\left|u_m\right|^{p-1} \text{ ограничена в } L_\infty\left(0,T;\,L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)\right), \tag{2.28}$$

$$2<p<\frac{2N}{N-2},\ N\ge 3.$$

Из (2.26) следует, что существует подпоследовательность $u_{m_k}$ последовательности $u_m$, *-слабо сходящаяся к некоторому элементу $L_\infty\left(0,T;\,L_2(\Omega)\right)\cap L_\infty\left(0,T;\,\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right)$, то есть

$$u_{m_k}\to u \text{ слабо в } L_\infty\left(0,T;\,L_2(\Omega)\right)\cap L_\infty\left(0,T;\,\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right).$$

Аналогичным образом, из (2.26)-(2.28) вытекает, что существует такая последовательность $\{u_{m_k}\}\subset\{u\}$, что

$$u_{m_k}\to u \text{ слабо в } L_2(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)).$$

В силу теоремы Реллиха-Кондрашова [72], вложение $W_2^1(Q_T)$ в $L_2(Q_T)$ компактно. Это означает, что последовательность $u_m$ можно выбрать так, что $u_{m_k} \to u$ в норме $L_2(Q_T)$.

Приведенные рассуждения позволяют перейти к пределу в (2.7). Но сначала умножим равенство (2.7) на $d_j(t) \in C[0,T]$, просуммируем обе части получившегося равенства по $j = \overline{1,m}$ и получим

$$\int_\Omega \left( \sum_{i=1}^{N} D_{0,t}^\alpha u_m \cdot \mu + \chi D_{0,t}^\alpha \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x_i} + a \nabla u_m \nabla \mu + c(x,t) u_m \mu \right) dx = \\ = \int_\Omega b(x,t) |u_m|^{p-1} \mu dx + \int_\Omega |\nabla u_m|^q \mu dx, \tag{2.29}$$

почти всюду $t \in [0,T]$, $\mu(x,t) = \sum_{j=1}^{m} d_j(t) \Psi_j(x)$.

Учитывая полученные включения и сходимости, перейдем в (2.29) к пределу при $m \to \infty$ и получим (2.5) для $\omega = \mu$. Так как множество всех функций $\mu(x,t)$ плотно в $V^\alpha(Q_T)$, то предельное соотношение выполняется для всех $\omega(x,t) \in L_2(0,T; \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$.

### 2.3 Единственность слабого обобщенного решения для случая $II$

**Теорема 2.3.1.** Пусть выполняются $u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ и случай $II$. Тогда слабое решение задачи (2.1)-(2.3) на интервале $(0,T)$ единственно.

**Доказательство.** Предположим, что задача (2.1)-(2.3) имеет два решения: $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда их разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет условию $u(x,0) = 0$ и тождеству

$$\int_\Omega \left( D_{0,t}^\alpha u \cdot \omega + \chi \sum_{i=1}^{N} D_{0,t}^\alpha \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_i} + a \nabla u \nabla \omega + c(x,t) u \omega \right) dx = \\ \int_\Omega b(x,\tau) \left( |u_1|^{p-1} - |u_2|^{p-1} \right) \omega dx + \int_\Omega \left( |\nabla u_1|^q - |\nabla u_2|^q \right) \omega dx.$$

В силу $\omega(x,t) \in L_2(0,T; \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$, то в качестве $\omega(x,t)$ можно взять $u(x,t)$, т.е., положим $\omega(x,t) = u(x,t)$, тогда

$$\int_\Omega \left( D_{0,t}^\alpha u \cdot u + \chi \sum_{i=1}^N D_{0,t}^\alpha \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} + a |\nabla u|^2 + c(x,t)|u|^2 \right) dx =$$
$$= \int_\Omega b(x,\tau)\left( |u_1|^{p-1} - |u_2|^{p-1} \right) u dx + \int_\Omega \left( |\nabla u_1|^q - |\nabla u_2|^q \right) u dx. \tag{2.30}$$

Оценим правую часть неравенства (2.30), применяя следующее неравенство

$$\left| |u_1|^m - |u_2|^m \right| \le m\left( |u_1|^{m-1} + |u_2|^{m-1} \right)|u_1 - u_2| \text{ при } m > 0,$$

получим

$$\left| \int_\Omega b(x,\tau)\left( |u_1|^{p-1} - |u_2|^{p-1} \right) u dx \right| \le b_1(p-1)\int_\Omega \left( |u_1|^{p-2} + |u_2|^{p-2} \right) u^2 dx \le$$
$$\le b_1(p-1)\left( \int_\Omega \left( |u_1|^{p-2} + |u_2|^{p-2} \right)^{\frac{N}{2}} dx \right)^{\frac{2}{N}} \left( \int_\Omega u^{\frac{2N}{N-2}} dx \right)^{\frac{N-2}{N}} \le$$
$$\le b_1(p-1)\left( \left( \int_\Omega |u_1|^{\frac{N(p-2)}{2}} dx \right)^{\frac{2}{N}} + \left( \int_\Omega |u_2|^{\frac{N(p-2)}{2}} dx \right)^{\frac{2}{N}} \right) \left( \int_\Omega u^{\frac{2N}{N-2}} dx \right)^{\frac{N-2}{N}}.$$

Тогда по теореме вложения Соболева $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \subset L_{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$ и $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \subset L_{\frac{N(p-2)}{2}}(\Omega)$.

Аналогичным образом, оценивается

$$\left| \int_\Omega \left( |\nabla u_1|^q - |\nabla u_2|^q \right) u dx \right| \le q\int_\Omega \left( |\nabla u_1|^{q-1} + |\nabla u_2|^{q-1} \right) |\nabla u||u| dx \le$$
$$\le q\left( \int_\Omega \left( |\nabla u_1|^{q-1} + |\nabla u_2|^{q-1} \right)^N dx \right)^{\frac{1}{N}} \left( \int_\Omega |u|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \left( \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \le$$
$$\le q\left( \left( \int_\Omega |\nabla u_1|^{N(q-1)} dx \right)^{\frac{1}{N}} + \left( \int_\Omega |\nabla u_2|^{N(q-1)} dx \right)^{\frac{1}{N}} \right) \left( \int_\Omega u^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \left( \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В этом случае, учитывая класс гладкости решений $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, приходим к оценкам

$$\left| \int_\Omega b(x,\tau)\left( |u_1|^{p-1} - |u_2|^{p-1} \right) u dx \right| \le C_7\left( \chi \|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \|u\|_{2,\Omega}^2 \right). \tag{2.31}$$

$$\left| \int_\Omega \left( |\nabla u_1|^q - |\nabla u_2|^q \right) u dx \right| \le C_8\left( \chi \|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \|u\|_{2,\Omega}^2 \right). \tag{2.32}$$

В силу (2.31) и леммы 1.2 получим

$$
\begin{gathered}
D_{0,t}^{\alpha}\int_{\Omega}\left[|u|^2+\chi|\nabla u|^2\right]dx+C_0\int_{\Omega}\left[|u|^2+\chi|\nabla u|^2\right]dx\le \\
\le C_9\left(\chi\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2+\|u\|_{2,\Omega}^2\right),
\end{gathered}
\tag{2.33}
$$

где $C_0=\min\left\{2c_0';2\dfrac{a}{\chi}\right\}$.

Неравенство (2.33) можно записать в следующем виде:

$$
D_{0,t}^{\alpha}\int_{\Omega}\left[|u|^2+\chi|\nabla u|^2\right]dx\le C_9\left(\chi\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2+\|u\|_{2,\Omega}^2\right),
$$

отсюда получим

$$
\int_{\Omega}\left[|u|^2+\chi|\nabla u|^2\right]dx\le E_{\alpha,1}\left(C_9t^{\alpha}\right)\int_{\Omega}\left[|u(x,0)|^2+\chi|\nabla u(x,0)|^2\right]dx,
$$

которое влечет $\int_{\Omega}\left(\chi|\nabla u|^2+|u|^2\right)dx=0$ почти всюду на временном интервале $\left(0,T\right)$, что означает единственность слабого обобщенного решения.

## 2.4 Разрушение решения задачи (2.1)-(2.3) за конечное время

Пусть функции $\{\psi_k(x)\}\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ являются ортонормированным базисом спектральной задачи Дирихле

$$
\begin{cases}
\Delta\psi+\lambda\psi=0,\\
\psi\big|_{\partial\Omega}=0.
\end{cases}
\tag{2.34}
$$

**Теорема 2.4.1.** Пусть выполняется условие $p>2$, тогда решение задачи (2.1)-(2.3) разрушается за конечное время $T^*$, т.е.

$$
\lim_{t\to T^*}\int_{\Omega}|u(x,t)|\psi_1(x)dx=\infty,
$$

где $T^*$ ограничено сверху

$$T^* \le \left( \frac{\rho_0}{\Gamma(3-\alpha) max\{C_1, C_2\}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

**Доказательство.** Пусть выполнены условия

$$c(x,t) \le C,\ \forall (x,t) \in Q_T,$$
$$b(x,t) \le b_0,\ \forall (x,t) \in Q_T.$$

Умножим уравнение (2.1) на $\psi_1(x)$ и проинтегрируем по области $\Omega$, получим соотношение

$$\int_\Omega D_{0,t}^\alpha (u - \chi\Delta u)\psi_1(x)dx - a\int_\Omega \Delta u\psi_1(x)dx + \int_\Omega c(x,t)u\psi_1(x)dx =$$
$$= \int_\Omega b(x,t)|u|^{p-1}\psi_1(x)dx + \int_\Omega |\nabla u|^q \psi_1(x)dx.$$

При выполнении условия (2.5), получим дифференциальное неравенство

$$\begin{aligned}(1+\chi\lambda)\int_\Omega D_{0,t}^\alpha u(x,t)\psi_1(x)dx + (C + a\lambda)\int_\Omega u(x,t)\psi_1(x)dx \ge \\ \ge b_0\int_\Omega |u|^{p-1}\psi_1(x)dx + \left(\frac{a_1}{\lambda_1}\right)^q \int_\Omega |\nabla u|^q \psi_1(x)dx,\end{aligned} \qquad (2.35)$$

где $a_1 = \left( \int_\Omega |\nabla \psi_1|^{\frac{q}{q-1}} |\psi_1|^{-\frac{1}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{q}}$.

Обозначим через $\rho(t) = \int_\Omega u(x,t)\psi_1(x)dx$. Тогда неравенство (2.35) запишется в виде

$$D_{0,t}^\alpha \rho(t) + a_2\rho(t) \ge \frac{b_0}{1+\chi\lambda}[\rho(t)]^{p-1} + \frac{a_3}{1+\chi\lambda}[\rho(t)]^q, \qquad (2.36)$$

где $a_2 = \dfrac{C + a\lambda}{1+\chi\lambda}$, $a_3 = \left(\dfrac{a_1}{\lambda_1}\right)^q$.

Обозначим через $\varphi(t) = (T - t)$, умножим неравенство (2.36) на $\varphi(t)$ и проинтегрируем по переменной $t$ от 0 до $T$:

$$\frac{b_0}{1+\chi\lambda}\int_0^T [\rho(t)]^p\,\varphi(t)dt + \int_0^T \frac{a_3}{1+\chi\lambda}[\rho(t)]^q\,dt \le$$
$$\le \int_0^T D_{0,t}^{\alpha}\rho(t)\varphi(t)dt + a\int_0^T \rho(t)\varphi(t)dt. \tag{2.37}$$

Вычислим первое слагаемое правой части неравенства

$$\int_0^T D_{0,t}^{\alpha}\rho(t)\varphi(t)dt = \int_0^T I_{T_-}^{1-\alpha}\rho'(t)\varphi(t)dt = \int_0^T \rho'(t) I_{T_-}^{1-\alpha}\varphi(t)dt =$$
$$= \rho(t) I_{T_-}^{1-\alpha}\varphi(t)\Big|_0^T - \int_0^T \rho(t)\frac{d}{dt} I_{T_-}^{1-\alpha}\varphi(t)dt =$$
$$= -\rho(0) I_{T_-}^{1-\alpha}\varphi(0) + \int_0^T \rho(t) D_{T_-}^{\alpha}\varphi(t)dt,$$

где

$$I_{T_-}^{1-\alpha}\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^T (s-t)^{-\alpha}(T-s)ds =$$
$$= \left| s = -\xi(T-t)+T,\ s\to t;\ \xi\to 1,\ s\to T;\ \xi\to 0 \right| =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 (T-t)^{2-\alpha}(1-\xi)^{-\alpha}\xi d\xi = \frac{(T-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}.$$

Подставляя полученные результаты вычисления в (2.37), получим

$$\frac{b_0}{1+\chi\lambda}\int_0^T [\rho(t)]^p\,\varphi(t)dt \le \int_0^T \rho(t) D_{T_-}^{\alpha}\varphi(t)dt + a\int_0^T \rho(t)\varphi(t)dt - \frac{T^{2-\alpha}\rho_0}{\Gamma(3-\alpha)} \le$$
$$\le \left(\int_0^T [\rho(t)]^p\,\varphi(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^T \left|D_{T_-}^{\alpha}\varphi(t)\right|^q |\varphi(t)|^{-\frac{q}{p}}\,dt\right)^{\frac{1}{q}} +$$
$$+ a\left(\int_0^T [\rho(t)]^p\,\varphi(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^T \varphi(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} - \frac{T^{2-\alpha}\rho_0}{\Gamma(3-\alpha)} \le$$
$$\le \frac{\varepsilon^p(1+a)}{p}\int_0^T [\rho(t)]^p\,\varphi(t)dt + \frac{1}{\varepsilon^q q}\int_0^T \left|D_{T_-}^{\alpha}\varphi(t)\right|^q |\varphi(t)|^{-\frac{q}{p}}\,dt +$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon^q q}\int_0^T \varphi(t)dt - \frac{T^{2-\alpha}\rho_0}{\Gamma(3-\alpha)}.$$

Положим $\varepsilon = \left(\dfrac{b_0 p}{2(1+\chi\lambda)(1+a)}\right)^{\frac{1}{p}}$, получим

$$\frac{b_0}{2(1+\chi\lambda)}\int_0^T \left[\rho(t)\right]^p \varphi(t)dt \le$$

$$\le \frac{\left(2(1+\chi\lambda)(1+a)\right)^{\frac{q}{p}}}{\left(b_0 p\right)^q q}\left[\int_0^T \left|D_{T_-}^{\alpha}\varphi(t)\right|^q \left|\varphi(t)\right|^{-\frac{q}{p}} dt + \int_0^T \varphi(t)dt\right] - \frac{T^{2-\alpha}\rho_0}{\Gamma(3-\alpha)}.$$

Вычислим следующие интегралы:

$$\int_0^T \varphi(t)dt = \frac{T^2}{2}.$$

$$D_{T_-}^{\alpha}\varphi(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_t^T (s-t)^{-\alpha}(T-s)ds = -\frac{d}{dt}\frac{(T-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} = \frac{(2-\alpha)(T-t)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}.$$

$$\int_0^T \left|D_{T_-}^{\alpha}\varphi(t)\right|^q \left|\varphi(t)\right|^{-\frac{q}{p}} dt = -\frac{1}{\Gamma^2(3-\alpha)}\int_0^T (T-t)^{(1-\alpha)q-\frac{q}{p}} dt =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma^2(3-\alpha)}\frac{(T-t)^{(1-\alpha)q-\frac{q}{p}+1}}{(1-\alpha)q-\frac{q}{p}+1}\Big|_0^T = \frac{p-1}{(1-\alpha)p+p-2}\frac{T^{(1-\alpha)q-\frac{q}{p}}}{\Gamma^{\frac{2}{p-2}}(3-\alpha)}.$$

$$\int_0^T \left[\rho(t)\right]^p \varphi(t)dt \le$$

$$\le \frac{2(p-1)}{(1-\alpha)p+p-2}\frac{\left(2(1+\chi\lambda)(1+a)\right)^{\frac{1}{p-1}}}{\Gamma^{\frac{2}{p-2}}(3-\alpha)p}\frac{p-1}{\left(b_0 p\right)^{\frac{2}{p-2}}}T^{\frac{(1-\alpha)p+p-2}{p-1}} +$$

$$+\frac{(p-1)\left(2(1+\chi\lambda)(1+a)\right)^{\frac{1}{p-1}}}{p^{\frac{p}{p-1}}}T^2 - \frac{T^{2-\alpha}\rho_0}{\Gamma(3-\alpha)} \le \max\left\{C_1, C_2\right\}T^2 - \frac{T^{2-\alpha}\rho_0}{\Gamma(3-\alpha)} \le 0.$$

Отсюда следует, что

$$T^{-\alpha} \ge \frac{\Gamma(3-\alpha)\max\left\{C_1, C_2\right\}}{\rho_0},$$

$$T^{\alpha} \le \frac{\rho_0}{\Gamma(3-\alpha)\max\left\{C_1, C_2\right\}},$$

$$T^* \le \left(\frac{\rho_0}{\Gamma(3-\alpha)\max\left\{C_1, C_2\right\}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

**2.5 Разрешимость задачи (2.1)-(2.3) для любого конечного времени $t$ при $1< p\le 2$**

**Лемма 2.5.1.** Если $u\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega), 1< p\le 2,$ тогда выполняется неравенство

$$\int_\Omega |u_m|^p\,dx \le \left(\int_\Omega |u_m|^2\,dx\right)^{\frac{p}{2}}|\Omega|^{\frac{2-p}{2}}\le c\left(1+\int_\Omega |u_m|^2\,dx+\chi\int_\Omega |\nabla u_m|^2\,dx\right),$$

где $c=\dfrac{p^{\frac{p}{2-p}}(2-p)}{2^{\frac{2}{2-p}}}|\Omega|.$

**Теорема 2.5.1.** Пусть выполняются условия $c(x,t)\ge c_0'>0,\ \forall (x,t)\in Q_T,$ $u_0\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega),$ а также $0<b_0\le b(x,t)\le b_1<\infty,\ \forall (x,t)\in Q_T, 1<p\le 2,\ N\ge 3.$ Тогда для любого конечного времени существует слабое решение $u(x,t)$ задачи (2.1)-(2.3).

**Доказательство.** Оценим правую часть (2.11), применяя леммы 1.2 и 2.5.1, находим

$$\left|\int_\Omega b(x,t)|u_m|^p\,dx\right|\le b_1\|u_m\|_{p,\Omega}^p\le cb_1\left(1+\|u_m\|_{2,\Omega}^2+\chi\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2\right).$$

Случай $III$:

$$\begin{gathered}\left|\int_\Omega |\nabla u_m|^q u_m dx\right|\le \left(\int_\Omega |\nabla u_m|^2\,dx\right)^{\frac{q}{2}}\left(\int_\Omega |u_m|^{\frac{2}{2-q}}\,dx\right)^{\frac{2-q}{2}}\le\\ \le \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^q|\Omega|^{\frac{1-q}{2}}\|u_m\|_{2,\Omega}\le C_{02}\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{q+1}\le\\ \le \frac{C_{02}^2}{2C_2}+\frac{C_2}{2}\left(1+\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2+\|u_m\|_{2,\Omega}^2\right).\end{gathered}\tag{2.38}$$

Случай $IV$:

$$\begin{gathered}\left|\int_\Omega |\nabla u_m|^q u_m dx\right|\le \left(\int_\Omega |\nabla u_m|^{\frac{2Nq}{N+2}}\,dx\right)^{\frac{N+2}{2N}}\left(\int_\Omega |u_m|^{\frac{2N}{N-2}}\,dx\right)^{\frac{N-2}{2N}}\le\\ \le C_{02}\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{q+1}\le C_3+\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^p\le\\ \le C_3+c\left(1+\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2+\|u_m\|_{2,\Omega}^2\right).\end{gathered}\tag{2.39}$$

Тогда из полученной оценки следует

$$D_{0,t}^{\alpha}\int_{\Omega}\left[|u_m|^2+\chi|\nabla u_m|^2\right]dx+C_2\int_{\Omega}\left[|u_m|^2+\chi|\nabla u_m|^2\right]dx\le$$

$$\le C_4'+C_5\left(1+\|u_m\|_{2,\Omega}^2+\chi\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2\right).$$

Обозначим через $y(t)\equiv 1+\|u_m\|_{2,\Omega}^2+\chi\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2$, тогда последнее неравенство запишется в виде

$$D_{0,t}^{\alpha}y(t)+C_2y(t)\le C_4+C_5y(t). \qquad (2.40)$$

Применяя лемму 1.4, получаем справедливость следующей оценки

$$y(t)\le M_1y(0)+\frac{M_2C_4}{\alpha}t^{\alpha}+$$

$$+\left(C_5M_2\Gamma(\alpha)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\int_0^t E_{\alpha,1}\left((C_5M_2\Gamma(\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}(t-s)^{\alpha}\right)\left(M_1y(0)+\frac{M_2C_4}{\alpha}s^{\alpha}\right)ds\le C_6,$$

$$0\le t\le T<\infty$$

Тем самым показали

$$\|u_m(x,t)\|_{2,\Omega}^2+\chi\|\nabla u_m(x,t)\|_{2,\Omega}^2\le C_6,\ \text{для всех}\ 0\le t\le T<\infty. \qquad (2.41)$$

Правая часть (2.22) оценивается аналогично, как при получении второй оценки (2.25), применяя неравенства Юнга (1.1), Гёльдера (1.3), и оценки (2.41), получим

$$\left\|D_{0,t}^{\alpha}u_m\right\|_{2,\Omega}^2+\chi\left\|\nabla D_{0,t}^{\alpha}u_m\right\|_{2,\Omega}^2\le C_6,\ \text{для всех}\ t\in[0,T],\ T<\infty. \qquad (2.42)$$

Аналогичным образом, как в случае $2<p<\dfrac{2N}{N-2}$, $N\ge 3$ из априорных оценок и теоремы вложения, позволяют перейти к пределу в (2.7).

### 2.6 Глобальная разрешимость начально-краевой задачи

Рассмотрим в цилиндре $Q_T=\left\{(x,t): x\in\Omega,\ \Omega\subset R^n,\ 0<t<T\right\}$ начально-краевую задачу для псевдопараболического уравнения

$$D_{0,t}^{\alpha}(u-\chi\Delta u)-a\Delta u+c(x,t)u+q(x,t)|u|^{p-2}u=0, \tag{2.43}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \tag{2.44}$$

$$u\big|_{\partial\Omega}=0. \tag{2.45}$$

**Определение 2.6.1.** Слабым обобщенным решением задачи (2.43)-(2.45) называется функция $u(x,t)$ из пространства $V^{\alpha}(Q_T),\, 0<\alpha<1,$ которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{gathered}\int_{\Omega}\left(D_{0,t}^{\alpha}u\cdot\omega+\chi\sum_{i=1}^{N}D_{0,t}^{\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x_i}+a\nabla u\nabla\omega+c(x,t)u\omega\right)dx+\\ +\int_{\Omega}q(x,t)|u|^{p-2}\omega dx=0,\end{gathered} \tag{2.46}$$

почти всюду $t\in[0,T],$ для всех $\omega(x,t)\in L_2(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)).$

**Теорема 2.6.1.** Пусть выполняются условия $c(x,t)\ge c_0'>0,\ \forall(x,t)\in Q_T$, $u_0\in\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\cap L_p(\Omega),$ а также $0<q_0\le q(x,t)\le q_1<\infty,$ $\forall(x,t)\in Q_T$, $D_{0,t}^{\alpha}b(x,t)\le b_2<\infty,\ \forall(x,t)\in Q_T,\ 1\le p\le\dfrac{2N}{N-2},\ N\ge 3.$ Тогда на интервале $(0,T)$ существует слабое обобщенное решение задачи (2.43)-(2.45).

**Доказательство.** Выберем в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ некоторую систему функций $\{\psi_j(x)\}$, образующую базис в данном пространстве. Такая система заведомо существует, поскольку $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ является сепарабельным. Будем искать приближенное решение задачи (2.43)-(2.45) в виде

$$u_m(x,t)=\sum_{k=1}^{m}v_{mk}(t)\psi_k(x), \tag{2.47}$$

где коэффициенты $v_{mk}(t)$ ищутся из условий

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{m}D_{0,t}^{\alpha}v_{mk}(t)\int_{\Omega}\left[\psi_k\psi_j+\chi\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\psi_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}\right]dx+a\int_{\Omega}\nabla u_m\nabla\psi_j dx+\\ +\int_{\Omega}c(x,t)u_m\psi_j dx+\int_{\Omega}q(x,t)|u_m|^{p-2}u_m\psi_j dx=0.\end{gathered} \tag{2.48}$$

$$u_{m0}=u_m(0)=\sum_{k=1}^{m}C_{mk}(0)\psi_k=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\psi_k, \tag{2.49}$$

причем

$$u_{m0} \to u_m(0) \text{ сильно в } \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \text{ при } m \to \infty, \tag{2.50}$$

введем обозначения

$$\vec{v}_m \equiv \{v_{1m}(t),...,v_{mm}(t)\}^T, \ \vec{\alpha} \equiv \{\alpha_1,...,\alpha_m\}^T,$$

$$a_{kj} = \int_\Omega [\psi_k \psi_j + (\nabla \psi_k, \nabla \psi_j)] dx,$$

$$C_{kj} = a\int_\Omega \nabla \psi_k \nabla \psi_j dx + \int_\Omega c(x,t) \psi_k \psi_j dx,$$

$$b_{kj} = \int_\Omega q(x,t) |u_m|^{p-2} \psi_k \psi_j dx,,$$

$$A_m \equiv \{a_{jk}\}, \ \vec{C}_m \equiv \{C_{jk}\}, \ \vec{F}_m(\vec{v}_m) \equiv \{C_{jk}(\vec{v}_m)\}\vec{v}_m.$$

Тогда система уравнений (2.48) и условие (2.49) принимает матричный вид:

$$\begin{gathered} A_m D_{0,t}^\alpha \vec{v}_m + \vec{C}_m \vec{v}_m \equiv -\vec{F}_m(\vec{v}_m), \\ \vec{v}_m(0) = \vec{\alpha}. \end{gathered} \tag{2.51}$$

Умножим обе части равенства (2.48) на $v_{mj}(t)$ и просуммируем обе части получившегося равенства по $j = \overline{1,m}$. В результате получим равенство:

$$\int_\Omega \left( u_m D_{0,t}^\alpha u_m + \chi \nabla u_m D_{0,t}^\alpha \nabla u_m \right) dx + a\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx +$$
$$+ \int_\Omega c(x,t) |u_m|^2 dx + \int_\Omega q(x,t) |u_m|^p dx = 0.$$

Применяя лемму 1.2. и условие (2.4), получим неравенство

$$\begin{gathered} \frac{1}{2} D_{0,t}^\alpha \int_\Omega \left[ |u_m|^2 + \chi |\nabla u_m|^2 \right] dx + a\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx + \\ + c_0' \int_\Omega |u_m|^2 dx + \int_\Omega q(x,t) |u_m|^p dx \le 0. \end{gathered} \tag{2.52}$$

Из неравенства (2.52) следует

$$D_{0,t}^{\alpha} y(t) + C_0 y(t) \le 0,$$
$$y(0) = y_0 = \|u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \chi \|\nabla u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2, \tag{2.53}$$

где $C_0 = \min\left\{2c_0'; 2\dfrac{a}{\chi}\right\}$, $y(t) \equiv \|u_m(x,t)\|_{2,\Omega}^2 + \chi \|\nabla u_m(x,t)\|_{2,\Omega}^2$.
Теперь, пусть $\overline{y}(t)$ – решение следующей задачи Коши:

$$D_{0,t}^{\alpha} \overline{y}(t) + C_0 \overline{y}(t) = 0,$$
$$\overline{y}(0) = y_0 = \|u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \chi \|\nabla u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2, \tag{2.54}$$

решение этой задачи можем записать в явном виде

$$\overline{y}(t) = E_{\alpha,1}\left(-C_0 t^{\alpha}\right) y(0). \tag{2.55}$$

Так как выполняется неравенство $y(t) \le \overline{y}(t)$, а также применяя условие (1.6), получим

$$y(t) \le E_{\alpha,1}\left(-C_0 t^{\alpha}\right) y(0) \le \frac{M_1 y(0)}{1 + C_0 t^{\alpha}},\ t \ge 0.$$

Тем самым показали

$$\|u_m(x,t)\|_{2,\Omega}^2 + \chi \|\nabla u_m(x,t)\|_{2,\Omega}^2 \le$$
$$\le \frac{M_1\left(\|u(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \chi \|\nabla u(x,0)\|\right)}{1 + C_0 t^{\alpha}} \le C_1,\ \forall t \ge 0. \tag{2.56}$$

Теперь умножим равенство (2.48) на $D_{0,t}^{\alpha} v_{mj}(t)$ и просуммируем по $j = \overline{1,m}$. В результате получим

$$\left\|D_{0,t}^{\alpha} u_m\right\|_{2,\Omega}^2 + \chi \left\|\nabla D_{0,t}^{\alpha} u_m\right\|_{2,\Omega}^2 + a\int_{\Omega} \nabla u_m D_{0,t}^{\alpha} \nabla u_m dx +$$
$$+ \int_{\Omega} c(x,t) u_m D_{0,t}^{\alpha} u_m dx + \int_{\Omega} q(x,t) |u_m|^{p-2} u_m D_{0,t}^{\alpha} u_m dx = 0. \tag{2.57}$$

Вынесем вторую, третью и четвертую слагаемые в правую часть, тогда тождество (2.57) запишется в виде

$$\left\|D_{0,t}^{\alpha}u_m\right\|_{2,\Omega}^2 + \chi\left\|\nabla D_{0,t}^{\alpha}u_m\right\|_{2,\Omega}^2 = -a\int_{\Omega}\nabla u_m D_{0,t}^{\alpha}\nabla u_m dx - \\ -\int_{\Omega}c(x,t)u_m D_{0,t}^{\alpha}u_m dx - \int_{\Omega}q(x,t)\left|u_m\right|^{p-2}u_m D_{0,t}^{\alpha}u_m dx. \tag{2.58}$$

Оценим правую часть (2.58):

$$\left|-a\int_{\Omega}\nabla u_m D_{0,t}^{\alpha}\nabla u_m dx\right| \le \frac{\chi}{4}\left\|D_{0,t}^{\alpha}\nabla u_m\right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{a^2}{\chi}\left\|\nabla u_m\right\|_{2,\Omega}^2.$$

$$\left|-\int_{\Omega}c(x,t)u_m D_{0,t}^{\alpha}u_m dx\right| \le \frac{1}{2}\left\|D_{0,t}^{\alpha}\nabla u_m\right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{c_1^2}{2}\left\|u_m\right\|_{2,\Omega}^2.$$

$$\left|-\int_{\Omega}q(x,t)\left|u_m\right|^{p-2}u_m D_{0,t}^{\alpha}u_m dx\right| \le q_1\int_{\Omega}\left|u_m\right|^{p-1}\left|D_{0,t}^{\alpha}u_m\right|dx \le$$

$$\le q_1\left(\int_{\Omega}\left|u_m\right|^p dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}\left|u_m\right|^{\frac{n(p-2)}{2}}dx\right)^{\frac{1}{n}}\left(\int_{\Omega}\left|D_{0,t}^{\alpha}u_m\right|^{\frac{2n}{n-2}}dx\right)^{\frac{n-2}{2n}} \le$$

$$q_1\left\|u_m\right\|_{p,\Omega}^{\frac{p}{2}}\left\|u_m\right\|_{\frac{n(p-2)}{2},\Omega}^{\frac{p-2}{2}}\left\|D_{0,t}^{\alpha}u_m\right\|_{\frac{2n}{n-2},\Omega} \le q_1 C_3^{\frac{3p-4}{4}}\left\|\nabla D_{0,t}^{\alpha}u_m\right\|_{2,\Omega} \le$$

$$\le \frac{q_1^2 C_3^{\frac{3p-4}{2}}}{\chi} + \frac{\chi}{4}\left\|\nabla D_{0,t}^{\alpha}u_m\right\|_{2,\Omega}^2,$$

где $2 < p < \dfrac{2N}{N-2}$, $N \ge 3$.

Подставляя эти неравенства в тождество (2.58), получим:

$$\left\|D_{0,t}^{\alpha}u_m\right\|_{2,\Omega}^2 + \chi\left\|\nabla D_{0,t}^{\alpha}u_m\right\|_{2,\Omega}^2 \le C_4, \tag{2.59}$$

для всех $t \in [0,T]$, $T < T_0$.

Приведенные рассуждения позволяют перейти к пределу в (2.48). Но сначала умножим каждое из равенств (2.48) на $d_j(t) \in C[0,T]$ и просуммируя обе части получившегося равенства по $j = \overline{1,m}$, получим:

$$\int_0^T\int_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{N}D_{0,t}^{\alpha}u_m \cdot \mu + \chi D_{0,t}^{\alpha}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\cdot\frac{\partial \mu}{\partial x_i} + a\nabla u_m\nabla\mu + c(x,t)u_m\mu\right)dxdt +$$

$$+\int_0^T \int_\Omega q(x,t)\left|u_m\right|^{p-2} u_m \mu dxdt = 0,$$

где $\mu(x,t) = \sum_{j=1}^m d_j(t)\psi_j(x).$

Учитывая полученные априорные оценки (2.56), (2.59) и сходимости, перейдем в (2.48) к пределу при $m \to \infty$ и получим (2.46) для $\omega = \mu$. Так как множество всех функций $\mu(x,t)$ плотно в $V^\alpha(Q_T)$, предельное соотношение выполняется для всех $\omega(x,t) \in L_2\left(0,T;\ \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right)$. Теорема доказана.

## 2.7 Единственность слабого обобщенного решения

Предположим, что задача (2.43)-(2.45) имеет два решения: $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда их разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет условию $u(x,0) = 0$ тождеству

$$\int_\Omega \left( D_{0,t}^\alpha u \cdot \omega + \chi \sum_{i=1}^N D_{0,t}^\alpha \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_i} + a\nabla u \nabla \omega + c(x,t)u\omega \right) dx +$$
$$+\int_\Omega b(x,\tau)\left( \left|u_1\right|^{p-2} u_1 - \left|u_2\right|^{p-2} u_2 \right)\omega dx = 0.$$

В силу $\omega(x,t) \in L_2(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)),$ то в качестве $\omega(x,t)$ можно взять $u(x,t)$, т.е., положим $\omega(x,t) = u(x,t)$, тогда

$$\int_\Omega \left( D_{0,t}^\alpha u \cdot u + \chi \sum_{i=1}^N D_{0,t}^\alpha \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} + a\left|\nabla u\right|^2 + c(x,t)\left|u\right|^2 \right) dx +$$
$$+\int_\Omega b(x,\tau)\left( \left|u_1\right|^{p-2} u_1 - \left|u_2\right|^{p-2} u_2 \right) u dx = 0 \qquad (2.60)$$

Оценим правую часть неравенства (2.60), применяя следующее неравенство

$$\left| \left( \left|u_1\right|^q u_1 - \left|u_2\right|^q u_2 \right) u dx \right| \ge \int_\Omega \left|b(x,\tau)\right| \left|u_1 - u_2\right|^p dx \ge$$
$$\ge b_0 \int_\Omega \left|u\right|^p dx,$$

при $q > 0$

$$\left|\int_\Omega b(x,\tau)\left(|u_1|^{p-2}u_1-|u_2|^{p-2}u_2\right)udx\right|\geq$$
$$\int_\Omega |b(x,\tau)||u_1-u_2|^p\,dx\geq b_0\int_\Omega |u|^p\,dx, \tag{2.61}$$

для любого $p>0$.

В силу (2.61) и леммы 1.2, получим

$$D_{0,t}^{\alpha}\int_\Omega\left[|u|^2+\chi|\nabla u|^2\right]dx+C_0\int_\Omega\left[|u|^2+\chi|\nabla u|^2\right]dx+b_0\int_\Omega |u|^p\,dx\leq 0, \tag{2.62}$$

где $C_0=\min\left\{2c_0';2\dfrac{a}{\chi}\right\}.$

Неравенство (2.62) можно записать в следующем виде

$$D_{0,t}^{\alpha}\int_\Omega\left[|u|^2+\chi|\nabla u|^2\right]dx+C_0\int_\Omega\left[|u|^2+\chi|\nabla u|^2\right]dx\leq 0.$$

Из последнего неравенства следует

$$D_{0,t}^{\alpha}y(t)+C_0y(t)\leq 0,$$
$$y(0)=\|u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2+\chi\|\nabla u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2=0, \tag{2.63}$$

где $C_0=\min\left\{2c_0';2\dfrac{a}{\chi}\right\}$, $y(t)\equiv\|u_m(x,t)\|_{2,\Omega}^2+\chi\|\nabla u_m(x,t)\|_{2,\Omega}^2$.

Теперь, пусть $\overline{y}(t)$ – решение следующей задачи Коши:

$$D_{0,t}^{\alpha}\overline{y}(t)+C_0\overline{y}(t)=0,$$
$$\overline{y}(0)=\|u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2+\chi\|\nabla u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2=0, \tag{2.64}$$

решение этой задачи можем записать в явном виде

$$\overline{y}(t)=E_{\alpha,1}\left(-C_0t^\alpha\right)y(0). \tag{2.65}$$

Так как выполняется неравенство $y(t)\leq\overline{y}(t)$, а также применяя условие (1.6), получим

$$y(t)\leq E_{\alpha,1}\left(-C_0t^\alpha\right)y(0),\; t\geq 0,$$

которое влечет $\int_\Omega \left( \chi |\nabla u|^2 + |u|^2 \right) dx = 0$ почти всюду на временном интервале $(0,T)$, что означает единственность слабого решения. Таким образом, справедлива следующая

**Теорема 2.7.1.** Пусть выполняются $u_0(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega),\ p > 1,\ N \geq 3$. Тогда слабое обобщенное решение задачи (2.43)-(2.45) на интервале $(0,T)$ единственно.

## 2.8 Поведение решения по времени $t \to \infty$

Умножим уравнение (2.43) на функцию $u(x,t)$ и проинтегрируем по области $\Omega$, получим

$$D_{0,t}^\alpha y(t) + C_0 y(t) + \int_\Omega b_0(x,t) |u|^p \, dx \leq 0, \tag{2.66}$$

где $y(t) \equiv \|u\|_{2,\Omega}^2 + \chi \|\nabla u\|_{2,\Omega}^2$.

Из неравенства (2.66) следует

$$\begin{gathered} D_{0,t}^\alpha y(t) + C_0 y(t) \leq 0, \\ y(0) = y_0 = \|u(x,0\|_{2,\Omega}^2 + \chi \|\nabla u(x,0)\|_{2,\Omega}^2 . \end{gathered} \tag{2.67}$$

Нетрудно получить следующую оценку

$$\begin{gathered} \|u(x,t)\|_{2,\Omega}^2 + \chi \|\nabla u(x,t)\|_{2,\Omega}^2 \leq \\ \leq \frac{M_1 \left( \|u(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \chi \|\nabla u(x,0)\|_{2,\Omega}^2 \right)}{1 + C_0 t^\alpha},\ t \geq 0. \end{gathered} \tag{2.68}$$

Из этой оценки следует, что решение задачи (2.43)-(2.45) на бесконечности по времени $t$ убывает как $\dfrac{1}{t^\alpha}$.

**Теорема 2.8.1.** Пусть выполнены условия $p \geq 1,\ u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Тогда решение задачи (2.43)-(2.45) удовлетворяет оценке (2.68).

# 3 ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Настоящий раздел диссертационной работы посвящен фундаментальной проблеме исследования разрешимости начально-краевых задач для квазилинейного псевдопараболического уравнения дробного порядка с достаточно гладкой границей. Отличие исследуемых задач заключается в том, что граничные условия задаются в виде нелинейного граничного условия с оператором дробного дифференцирования. Основным результатом является установление локальной либо глобальной разрешимости поставленных задач в зависимости от параметров уравнения. С помощью метода Галеркина доказывается существование слабого решения квазилинейного псевдопараболического уравнения в ограниченной области. Используя теоремы вложения Соболева, получены априорные оценки решения. При доказательстве существования искомых решений рассматриваемых краевых задач используются априорные оценки и теорема Реллиха-Кондрашова. Единственность слабых обобщенных решений начально-краевых задач доказывается на основе полученных априорных оценок и применения обобщенной леммы Гроноулла. Необходимость рассмотрения и изучения такого рода начально-краевых задач для квазилинейного псевдопараболического уравнения вытекает из практических потребностей. К примеру, при решении дифференциальных уравнений дробного порядка, моделирующих физические процессы, возникающие при исследовании процессов фильтрации жидкости движения подземных вод со свободной поверхностью и т.д.

## 3.1 Постановка задачи

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \left\{(x,t) : x \in \Omega, \Omega \subset R^n, 0 < t < T\right\}$ квази-линейное псевдопараболическое уравнение дробного порядка

$$D_{0,t}^{\alpha}\left(u - \Delta u\right) - \Delta u + c(x,t)u = b\left(x,t\right)\left|u\right|^{p-2}u. \tag{3.1}$$

Здесь $\Omega \subset R^n$, $n \geq 3$ ограниченная область, $\partial\Omega \in C^{2,\delta}$, $\delta \in (0,1)$, достаточно гладкая, $p$ и $\alpha$ – заданные положительные постоянные, причем $0 < \alpha < 1$, $c(x,t)$ и $b\left(x,t\right)$ – заданные функции, $D_{0,t}^{\alpha}u(x,t)$ – оператор дробного дифференцирования в смысле Капуто (1.8).

**Задача** $K$. Найти решение $u(x,t)$ уравнение (3.1) удовлетворяющее начальному условию

$$u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right), \quad x \in \Omega \tag{3.2}$$

и нелинейному граничному условию

$$D_{0,t}^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial n}+K\left(x,t\right)\left|u\right|^{\sigma-2}u\Big|_{\Gamma}=0, \tag{3.3}$$

где $\Gamma=\partial\Omega\times\left(0,T\right)$, $\sigma$ – положительная постоянная.

Отметим, что вопросы разрешимости задачи $K$ в случае, когда $\alpha=1$, изучены в [45]. Для целочисленного параметра $\alpha$, задачи с граничными условиями Дирихле - Неймана исследованы в [52-53].

Всюду в дальнейшем предположим, что данные задачи удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered}c(x,t)\ge c_0^*>0,\quad 0<b_0\le b(x,t)\le b_1,\ \ \forall(x,t)\in Q_T,\\ |\,D_{0,t}^{\alpha}b(x,t)\,|\le b_2,\quad 0<K_0\le K\left(x,t\right)\le K_1,\ \forall(x,t)\in Q_T,\end{gathered} \tag{3.4}$$

**Определение 3.1.1.** Слабым обобщенным решением задачи $K$ (3.1)-(3.3) называется функция $u\left(x,t\right)\in V^{\alpha}(Q_T)\cap L_{\sigma}\left(\Gamma\right)$, $0<\alpha<1$, удовлетворяющая почти всюду $t\in[0,T]$, следующему интегральному тождеству:

$$\begin{gathered}\int_{\Omega}\left(D_{0,t}^{\alpha}u\cdot\omega+\sum_{i=1}^{n}D_{0,t}^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x_i}+c(x,t)u\omega\right)dx+\\ +\int_{\Gamma}K\left(x,t\right)\left|u\right|^{\sigma-2}u\omega d\Gamma=\int_{\Omega}b\left(x,t\right)\left|u\right|^{p-2}u\omega dx\end{gathered} \tag{3.5}$$

для всех функций $\omega\in L_2\left(0,T;W_2^1\left(\Omega\right)\right)\cap L_{\sigma}\left(\Gamma\right)$.

### 3.2 Локальная разрешимость задачи $K$. Галеркинские приближения

Рассмотрим случай, когда $p>2$ и пусть $u_0(x)\in W_2^1(\Omega)$.

Выберем в пространстве $W_2^1(\Omega)$ систему функций $\left\{\Psi_j\left(x\right)\right\}$, образующую базис в этом пространстве. В связи с тем, что пространство $W_2^1(\Omega)$ сепарабельно, такая система существует. Приближенное решение задачи $K$ (3.1)-(3.3) представим в виде:

$$u_m(x,t)=\sum_{k=1}^{m}\upsilon_{mk}(t)\Psi_k(x) \tag{3.6}$$

где $\left\{\Psi_j\left(x\right)\right\}$ ортогональная система функций в $W_2^1\left(\Omega\right)$, а $\upsilon_{mk}\left(t\right)$ находятся из системы уравнении

$$
\sum_{k=1}^{m} D_{0,t}^{\alpha}\upsilon_{mk}(t)\int_{\Omega}\left\{\Psi_k\Psi_j dx+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\Psi_{\mathrm{k}}}{\partial x_i}\frac{\partial\Psi_j}{\partial x_i}\right\}dx+\int_{\Omega}c(x,t)u_m\Psi_j dx+\int_{\Omega}\nabla u_m\nabla\Psi_j dx+
$$

$$
+\sum_{k=1}^{m}\upsilon_{mk}\int_{\Gamma}K(x,t)|u_m|^{\sigma-2}\Psi_k\Psi_j d\Gamma=\sum_{k=1}^{m}\upsilon_{mk}\int_{\Omega}b(x,t)|u_m|^{p-2}\Psi_k\Psi_j dx, \tag{3.7}
$$

с условиями

$$
u_{m0}=u_m(0)=\sum_{k=1}^{m}\upsilon_{mk}(0)\Psi_k=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\Psi_k, \tag{3.8}
$$

причем

$$
u_{m0}\to u_0 \text{ сильно в } W_2^1(\Omega) \text{ при } m\to\infty. \tag{3.9}
$$

Введем обозначения

$$
\vec{\upsilon}_m=\{\upsilon_{1m}(t),\dots,\upsilon_{mm}(t)\}^T,\ \vec{\alpha}\equiv\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}^T,
$$

$$
a_{kj}=\int_{\Omega}\left[\Psi_k\Psi_j+\left(\nabla\Psi_{\mathrm{k}}\nabla\Psi_{\mathrm{j}}\right)\right]dx
$$

$$
C_{kj}=\int_{\Omega}c(x,t)\Psi_k\Psi_j dx+\int_{\Omega}\nabla\Psi_k\nabla\Psi_j dx,
$$

$$
b_{kj}=-\int_{\Gamma}K(x,t)|u_m|^{\sigma-2}\Psi_k\Psi_j d\Gamma+\int_{\Omega}b(x,t)|u_m|^{p-2}\Psi_k\Psi_j dx,
$$

$$
A_m\equiv\{a_{jk}\},\ \vec{C}_m\equiv\{C_{jk}\},\ \vec{F}_m(\vec{\upsilon}_m)\equiv\{b_{jk}(\vec{\upsilon}_m)\}\vec{\upsilon}_m.
$$

Тогда, система уравнений (3.7) с условиями (3.8) примет следующий матричный вид

$$
A_m D_{0,t}^{\alpha}\vec{\upsilon}_m+\vec{C}_m\vec{\upsilon}_m\equiv\vec{F}_m(\vec{\upsilon}_m),\quad \vec{\upsilon}_m(0)=\vec{\alpha}.
$$

Ниже приведем ряд известных лемм необходимых для установления некоторых оценок.

**Лемма 3.2.1.** [69] Для любой функции $u\in W_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{p,\Omega}^{p} \le C_1\left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2}+\|u\|_{2,\Omega}^{2}\right)^{\frac{\theta p}{2}}\|u\|_{2,\Omega}^{(1-\theta)p} \le$$

$$\le C_1\left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2}+\|u\|_{2,\Omega}^{2}\right)^{\frac{\theta p}{2}+\frac{(1-\theta)p}{2}} \le C_1\left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2}+\|u\|_{2,\Omega}^{2}\right)^{\frac{p}{2}},$$

где

$$C_1=\left(\frac{2(n-1)}{n-2}\right)^{\theta p},\ \theta=\frac{(p-2)n}{2p},\ 0<\theta<1,\ 2<p<\frac{2n}{n-2},\ n\ge 3.$$

**Лемма 3.2.2.** [69] Для любой функции $u\in W_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{q,\Gamma}^{q} \le C_1\left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2}+\|u\|_{2,\Omega}^{2}\right)^{\frac{\theta p}{2}}\|u\|_{2,\Omega}^{(1-\theta)p} \le$$

$$\le C_1\left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2}+\|u\|_{2,\Omega}^{2}\right)^{\frac{\theta p}{2}+\frac{(1-\theta)p}{2}} \le C_1\left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2}+\|u\|_{2,\Omega}^{2}\right)^{\frac{p}{2}},$$

где

$$\Gamma=\partial\Omega\in C^{2,\delta},\ \delta\in(0,1),\ C_1=\left(\frac{2(n-1)}{n-2}\right)^{\theta q},$$

$$\theta=\frac{(q-2)n+2}{2q},\ 0<\theta<1,$$

$$2<q<\frac{2(n-1)}{n-2},\ n\ge 3.$$

Умножим обе части (3.7) на $\upsilon_{mj}(t)$ и просуммируем по $j=1,...,m$, тогда получим тождество

$$\int_\Omega\left\{u_m D_{0,t}^{\alpha}u_m dx+\nabla u_m D_{0,t}^{\alpha}\nabla u_m\right\}dx+\int_\Omega|\nabla u_m|^2\,dx+\int_\Omega c(x,t)|u_m|^2\,dx+$$
$$+\int_\Gamma K(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma=\int_\Omega b(x,t)|u_m|^p dx. \tag{3.10}$$

Применяя к (3.10) лемму 1.2 и лемму 3.2.1, а также с учетом условий (3.4), получим неравенство

$$\frac{1}{2}D_{0,t}^{\alpha}\int_{\Omega}\left\{|u_m|^2+|\nabla u_m|^2\right\}dx+\int_{\Omega}|\nabla u_m|^2\,dx+c_0^*\int_{\Omega}|u_m|^2\,dx+$$

$$+K_0\int_{\Gamma}|u_m|^{\sigma}\,d\Gamma\le b_1C_1\left(\|u_m\|^2+\|\nabla u_m\|^2\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Полученное дифференциальное неравенство, запишем виде

$$D_{0,t}^{\alpha}\left(\|u_m\|^2+\|\nabla u_m\|^2\right)+C_0\left(\|u_m\|^2+\|\nabla u_m\|^2\right)\le C_2\left(\|u\|^2+\|\nabla u_m\|^2\right)^{\frac{p}{2}}, \qquad (3.11)$$

где $C_0=\min(1;c_0^*)$, $C_2=2C_1b_1$

Введем обозначение $y(t)=\|u\|^2+\|\nabla u\|^2$, тогда (3.11) можно представить в виде

$$D_{0,t}^{\alpha}y(t)+C_0y(t)\le C_2\left[y(t)\right]^{\frac{p}{2}}.$$

Отсюда получим

$$y(t)\le E_{\alpha,1}(-C_0t^{\alpha})y(0)+C_2\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-C_2(t-s)^{\alpha})\left[y(s)\right]^{\frac{p}{2}}ds, \qquad (3.12)$$

где $E_{\alpha,\beta}(z)$ - функция Миттаг-Леффлера (1.5).

Из (3.12) с учетом (1.6) и (1.7), имеем

$$y(t)\le M_1y(0)+M_2C_2\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left[y(s)\right]^{\frac{p}{2}} \qquad (3.13)$$

Предположим, пусть выполнены следующие условия

$$t<\left[\frac{2\alpha}{(p-2)M_2C_2(M_1y(0))^{\frac{p-2}{2}}}\right]^{\frac{1}{\alpha}},\ 0\le t<T,$$

тогда в (3.13) применяя лемму Гронуолла-Беллмана [71], получим неравенство

$$y(t)\le\frac{M_1y(0)}{\left[1-\frac{M_2C_2(p-2)}{2\alpha}(M_1y(0))^{\frac{p-2}{2}}t^{\alpha}\right]^{\frac{2}{p-2}}}$$

или с учетом обозначении имеем

$$\|u_m(x,t)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_m(x,t)\|_{2,\Omega}^2 \le$$

$$\le \frac{M_1\left(\|u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2\right)}{\left[1-(p-2)M_1^{\frac{p-2}{2}}\left(\|u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\frac{M_2C_2}{2\alpha}t^\alpha\right]^{\frac{2}{p-2}}}.$$

Из этой оценки можно сделать вывод, что существует $T_0 > 0$ такое, что

$$\|u_m\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2 + K_0\int_\Gamma |u_m|^\sigma d\Gamma \le C_3, \text{ для всех } t \in [0,T],\ T < T_0, \tag{3.14}$$

где $C_3$ - постоянная, не зависящая от $m \in N$.

Теперь умножим равенство (3.7) на $D_{0,t}^\alpha \upsilon_{mj}(t)$ и просуммируем по $j = 1,...,m$. В результате получим

$$\begin{gathered}\|D_{0,t}^\alpha u_m\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla D_{0,t}^\alpha u_m\|_{2,\Omega}^2 = \\ = -\int_\Omega \nabla u_m D_{0,t}^\alpha \nabla u_m dx - \int_\Omega c(x,t) u_m D_{0,t}^\alpha u_m dx - \\ -\int_\Gamma K(x,t)|u_m|^{\sigma-2} u_m D_{0,t}^\alpha u_m d\Gamma + \int_\Omega b(x,t)|u_m|^{p-2} u_m D_{0,t}^\alpha u_m dx.\end{gathered} \tag{3.15}$$

Применяя неравенства Юнга (1.1), Гёльдера (1.3) и лемму 3.2.2, оценим каждую слагаемую правой части (3.15)

$$\left|-\int_\Omega \nabla u_m D_{0,t}^\alpha \nabla u_m\right| \le \frac{1}{4}\|D_{0,t}^\alpha \nabla u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2.$$

$$\left|-\int_\Omega c(x,t) u_m D_{0,t}^\alpha u_m dx\right| \le \frac{1}{2}\|D_{0,t}^\alpha u_m\|^2 + \frac{c_1^2}{2}\|u_m\|^2.$$

$$\left|-\int_\Gamma K(x,t)|u_m|^{\sigma-2} u_m D_{0,t}^\alpha u_m d\Gamma\right| \le K_1\int_\Gamma |D_{0,t}^\alpha u_m|\,|u_m|^{\sigma-1} d\Gamma \le$$

$$\leq K_1\left(\int_\Gamma |u_m|^{\frac{2(n-1)(\sigma-1)}{n}} d\Gamma\right)^{\frac{n}{2(n-1)}}\left(\int_\Gamma \left|D_{0,t}^\alpha u_m\right|^{\frac{2(n-1)}{n-2}} d\Gamma\right)^{\frac{n-2}{2(n-1)}} \leq$$

$$\leq K_1 C_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} C_3^{\sigma-1}\left(\left\|D_{0,t}^\alpha u_m\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|\nabla D_{0,t}^\alpha u_m\right\|_{2,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq K_1^2 C_1^{\frac{2(\sigma-1)}{\sigma}} C_3^{2(\sigma-1)}+\frac{1}{4}\left(\left\|D_{0,t}^\alpha u_m\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|\nabla D_{0,t}^\alpha u_m\right\|_{2,\Omega}^2\right),$$

где $2<\sigma<\dfrac{2(n-1)}{n-2}$, $n\geq 3$.

$$\left|\int_\Omega b(x,t)|u_m|^{p-2} u_m D_{0,t}^\alpha u_m dx\right| \leq b_1\int_\Omega \left|D_{0,t}^\alpha u_m\right| |u_m|^{p-1} dx \leq$$

$$\leq b_1\left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |u_m|^{\frac{n(p-2)}{2}} dx\right)^{\frac{1}{n}}\left(\int_\Omega \left|D_{0,t}^\alpha u_m\right|^{\frac{2n}{n-2}} dx\right)^{\frac{n-2}{2n}} \leq$$

$$\leq b_1 C_1^{\frac{p-1}{p}} C_3^{p-1}\left(\left\|D_{0,t}^\alpha u_m\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|\nabla D_{0,t}^\alpha u_m\right\|_{2,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq b_1^2 C_1^{\frac{2(p-1)}{p}} C_3^{2(p-1)}+\frac{1}{4}\left(\left\|D_{0,t}^\alpha u_m\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|\nabla D_{0,t}^\alpha u_m\right\|_{2,\Omega}^2\right),$$

где $2<p<\dfrac{2n}{n-2}$, $n\geq 3$.

С учетом (3.14) и вышеприведенных неравенств из тождества (3.15), имеем вторую априорную оценку

$$\left\|D_{0,t}^\alpha u_m\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|\nabla D_{0,t}^\alpha u_m\right\|_{2,\Omega}^2 \leq C_4,$$

для всех $t\in[0,T]$, $T<T_0$.

Из этих оценок вытекает

$$u_m \text{ ограничена } L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)). \tag{3.16}$$

$$D_{0,t}^\alpha u_m \text{ ограничена в } L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)). \tag{3.17}$$

$$K(x,t)|u_m|^{\sigma-2} \text{ ограничена в } L_\infty(0,T;L_{\sigma'}(\Gamma)),\ \sigma'=\frac{\sigma}{\sigma-1}>1. \tag{3.18}$$

$$|u_m|^p \text{ ограничена в } L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)),\ 2<p<\frac{2n}{n-2},\ n\geq 3. \tag{3.19}$$

$$|u_m|^{p-2}u_m \text{ ограничена в } L_\infty(0,T;L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)),2<p<\frac{2n}{n-2},\ n\geq 3. \tag{3.20}$$

Из (3.16) следует, что существует подпоследовательность $u_{m_k}$ последовательности $u_m$, $*$-слабо сходящаяся к некоторому элементу $L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))$ , [52] т.е.,

$$u_{m_k}\to u\,*\text{-слабо в } L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)).$$

Аналогично, из (3.16)-(3.20) вытекает, что существует такая последовательность $\{u_{m_k}\}\subset\{u_m\}$, что

$$u_{m_k}\to u \text{ слабо в } L_2(0,T;W_2^1(\Omega)).$$

В силу теоремы Реллиха-Кондрашова [72] вложение $W_2^1(Q_T)$ в $L_2(Q_T)$ компактно. Это означает, что из последовательность $u_m$ можно выбрать подпоследовательность $u_{m_k}$ такое, что $u_{m_k}\to u$ в норме $L_2(Q_T)$, а значит сходящейся почти всюду.

Приведенные рассуждения позволяют перейти к пределу в (3.7) при $m\to\infty$. Сначала умножим обе части равенства (3.7) на $d_j(t)\in C[0,T]$ и просуммируем обе части полученного тождества по $j=\overline{1,m}$ имеем:

$$\begin{gathered}\int_\Omega\left(D_{0,t}^\alpha u\cdot\mu+\sum_{i=1}^m D_{0,t}^\alpha\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x_i}+c(x,t)u\mu\right)dx+\\+\int_\Gamma K(x,t)|u|^{\sigma-2}u\mu d\Gamma=\int_\Omega b(x,t)|u|^{p-2}u\mu dx\end{gathered} \tag{3.21}$$

почти всюду $t\in[0,T]$, где $\mu(x,t)=\sum_{j=1}^m d_j(t)\psi_j(x)$.

В (3.21) переходя к пределу при $m\to\infty$ получим (3.5) для $\omega=\mu$. Так как множество всех функций $\mu(x,t)$, где $\mu(x,t)=\sum_{j=1}^m d_j(t)\psi_j(x)$ плотно в

$V^{\alpha}(Q_T)\cap L_{\sigma}(\Gamma)$, то предельное соотношение выполняется для всех $\omega\in L_2\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right)$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 3.2.1.** Пусть выполняются условия (3.4) и $2<p<\dfrac{2n}{n-2}$, $2<\sigma<\dfrac{2(n-1)}{n-2}$, $n\geq 3$, тогда для любой функции $u_0(x)\in W_2^1(\Omega)$ почти всюду $t\in\left(0,T\right)$, $T<T_0$ где

$$T_0=\left[\frac{2\alpha}{2(p-2)b_1M_2M_1^{\frac{p-2}{2}}\left(\dfrac{2(n-1)}{n-2}\right)^{\frac{(p-2)n}{2}}\left(\|u(x,0)\|_{2,\Omega}^2+\|\nabla u(x,0)\|_{2,\Omega}^2\right)^{\frac{p-2}{2}}}\right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

существует слабое обобщенное решение $u(x,t)$ задачи $K$ (3.1)-(3.3).

### 3.3 Единственность локального обобщенного решения задачи $K$

**Теорема 3.3.2**. Пусть выполняются $u_0(x)\in W_2^1(\Omega)$, $2<p<\dfrac{2n}{n-2}$, $n\geq 3$ тогда обобщенное решение задачи (3.1)-(3.3) на интервале $(0,T)$, $T<T_0$ единственно.

**Доказательство.** Предположим, что задача $K$ (3.1)-(3.3) имеет два решения: $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда их разность $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ удовлетворяет условию $u(x,0)=0$ и тождеству

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}\left(D_{0,t}^{\alpha}u\cdot\omega+\sum_{i=1}^{n}D_{0,t}^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x_i}+c(x,t)u\omega\right)dx+\\&+\int_{\Gamma}K(x,t)\left(|u_1|^{\sigma-2}u_1-|u_2|^{\sigma-2}u_2\right)\omega d\Gamma=\\&=\int_{\Omega}b(x,t)\left(|u_1|^{p-2}u_1-|u_2|^{p-2}u_2\right)\omega dx\end{aligned}\tag{3.22}$$

В силу того, что $\omega(x,t)\in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$, то в качестве $\omega(x,t)$ можно взять $u(x,t)$, т.е. положим $\omega(x,t)=u(x,t)$. Тогда имеем

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left( D_{0,t}^\alpha u \cdot u + \sum_{i=1}^n D_{0,t}^\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)\,|u|^2 \right) dx + \\
&+ \int_\Gamma K(x,t)|u|^{\sigma-2}\left(|u_1|^{\sigma-2} u_1 - |u_2|^{\sigma-2} u_2\right) u\,d\Gamma = \\
&= \int_\Omega b(x,t)\left(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2\right) u\,dx.
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

Оценим правую часть (3.23), используя следующие известные алгебраические неравенства

$$
\begin{aligned}
&\left| |u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2 \right| \le (q+1)(|u_1|^q + |u_2|^q)|u_1 - u_2|, \quad q > 0 \\
&\left| (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2)(u_1 - u_2) \right| \ge |u_1 - u_2|^{q+2}, \quad q > 0
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

и лемму 3.2.1. Имеем

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega b(x,t)(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2) u\,dx \right| \le b_1(p-1) \int_\Omega (|u_1|^{p-2} + |u_2|^{p-2}) u^2 dx \le \\
&\le b_1(p-1)\left( \int_\Omega \left(|u_1|^{p-2} + |u_2|^{p-2}\right)^2 u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_\Omega u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \le \\
&\le b_1(p-1)\left( \int_\Omega \left(|u_1|^{p-2} + |u_2|^{p-2}\right)^{\frac{2r}{r-2}} dx \right)^{\frac{r-2}{2r}} \left( \int_\Omega u^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \left( \int_\Omega u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \le \\
&\le b_1(p-1)\left( \left( \int_\Omega |u_1|^{\frac{2r(p-2)}{r-2}} dx \right)^{\frac{r-2}{2r}} + \left( \int_\Omega |u_2|^{\frac{2r(p-2)}{r-2}} dx \right)^{\frac{r-2}{2r}} \right) \times \left( \int_\Omega u^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \left( \int_\Omega u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

где $r = \dfrac{2n}{n-2}$, $2 < p < \dfrac{2n}{n-2}$, $n \ge 3$. Тогда по теореме вложения Соболева $W_2^1(\Omega) \subset L_r(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega) \subset L_{2r(p-2)/(r-2)}(\Omega)$, учитывая гладкость решений $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, приходим к оценке

$$
\left| \int_\Omega b(x,t)(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2) u\,dx \right| \le C_5 \left( \|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \|u\|_{2,\Omega}^2 \right). \tag{3.25}
$$

Из оценки (3.25) с учетом условия (3.4) и леммы 1.2, а также алгебраических неравенств, получим

$$
D_{0,t}^\alpha \int_\Omega \left[ |u|^2 + |\nabla u|^2 \right] dx + C_0 \int_\Omega \left[ |u|^2 + |\nabla u|^2 \right] dx + K_0 \int_\Gamma |u|^\sigma d\Gamma \le C_5 \left( \|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \|u\|_{2,\Omega}^2 \right), \tag{3.26}
$$

где $C_0 = \min\left\{1; c_0^*\right\}$.
Из неравенства (3.26) получим

$$D_{0,t}^{\alpha} \int_{\Omega} \left[ |u|^2 + |\nabla u|^2 \right] dx \le C_5 \left( \|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \|u\|_{2,\Omega}^2 \right),$$

из последнего имеем

$$\int_{\Omega} \left[ |u|^2 + |\nabla u|^2 \right] dx \le E_{\alpha,1}(C_5 t^{\alpha}) \int_{\Omega} \left[ |u(x,0)|^2 + |\nabla u(x,0)|^2 \right] dx,$$

что влечет $\int_{\Omega} \left( |\nabla u|^2 + |u|^2 \right) dx = 0$ почти всюду на временном интервале $(0,T)$, $T < T_0$, что означает единственность обобщенного решения. Теорема 3.3.2 доказана.

### 3.4 Существование глобального решения задачи $K$ (3.1)-(3.3) при $1 < p \le 2$

**Теорема 3.4.1.** Пусть выполняются условия (3.4) и $1 < p \le 2$, $1 < \sigma < \dfrac{2(n-1)}{n-2}$, $n \ge 3$. Тогда для любого $u_0(x) \in W_2^1(\Omega)$ на интервале $(0,T)$ существует обобщенное решение $u(x,t)$ задачи $K$ (3.1)-(3.3).

**Доказательство.** Как и при доказательстве теоремы 3.2.1, умножая обе части (3.7) на $\upsilon_{mj}(t)$ и просуммируя по $j = 1,...,m$, получим соотношения (3.10).

Справедливость следующей леммы приведена в [69].

**Лемма 3.4.1.** [69] Если $u \in W_2^1(\Omega)$, $1 < q < 2$, тогда справедлива неравенство

$$\int_{\Omega} |u|^q \, dx \le \left( \int_{\Omega} |u|^2 \, dx \right)^{\frac{q}{2}} |\Omega|^{\frac{2-q}{2}} \le c\left( 1 + \int_{\Omega} |u|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right).$$

Применяя лемму 1.2 и условие теоремы 3.4.1, а также лемму 3.4.1, получим неравенство

$$D_{0,t}^{\alpha} \int_{\Omega} \left[ |u_m|^2 + |\nabla u_m|^2 \right] dx + c_0^* \int_{\Omega} \left[ |u_m|^2 + |\nabla u_m|^2 \right] dx +$$
$$+ \int_{\Gamma} K(x,t) |u_m|^{\sigma} d\Gamma \le c b_1 \left( 1 + \|u_m\|_{2,\Omega}^2 + \|u_m\|_{2,\Omega}^2 \right).$$

Обозначим через $y(t) \equiv 1 + \|u_m(x,t)\|^2_{2,\Omega} + \|\nabla u_m(x,t)\|^2_{2,\Omega}$, тогда последнее неравенство запишется в виде

$$D^{\alpha}_{0,t} y(t) + c^*_0 y(t) \le c b_1 y(t) + c^*_0.$$

Отсюда получим

$$y(t) \le E_{\alpha,1}(-c^*_0 t^{\alpha}) y(0) + c b_1 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-c^*_0 (t-s)^{\alpha}) y(s) ds + \\ + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-c^*_0 (t-s)^{\alpha}) c^*_0 ds, \tag{3.27}$$

Из неравенства (3.27) в силу (1.6) и (1.7) имеем

$$y(t) \le M_1 y(0) + \frac{M_2 c^*_0 t^{\alpha}}{\alpha} + c b_1 M_2 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds. \tag{3.28}$$

Доказательство нижеследующей леммы приведено в [54].

**Лемма 3.4.2**. [54] Предположим $b \ge 0,\ \beta > 0$ и $a(t)$ неотрицательная локально интегрируемая функция на $0 \le t \le T$ с

$$u(t) \le a(t) + b \int_0^t (t-s)^{\beta-1} u(s) ds$$

на этом интервале, тогда

$$u(t) \le a(t) + \theta \int_0^t E'_{\beta}(\theta(t-s)) a(s) ds,\ 0 \le t \le T,$$

где

$$\theta = (b\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\beta}},\ E_{\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n\beta}}{\Gamma(n\beta+1)},\ E'_{\beta}(z) = \frac{d}{dz} E_{\beta}(z),$$

$$E'_{\beta}(z) \to \frac{z^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)},\ \text{так как}\ z \to +0,$$

$$E'_{\beta}(z) \to \frac{e^z}{\beta},\ \text{так как}\ z \to +\infty.$$

$$E_\beta(z) \to \frac{e^z}{\beta}, \text{ так как } z \to +\infty.$$

Если $a(t) = a$ постоянная, тогда $u(t) \le aE_\beta(\theta t),\ 0 \le t \le T.$

Применяя в неравенстве (3.28) лемму 3.4.2, получим справедливость следующей оценки

$$y(t) \le M_1 y(0) + \frac{M_2 c_0^* t^\alpha}{\alpha} +$$
$$+[cb_1 M_2 \Gamma(\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^t E_{\alpha,1}\left( [cb_1 M_2 \Gamma(\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}} (t-s)^\alpha \right)\left( M_1 y(0) + \frac{M_2 c_0^* s^\alpha}{\alpha} \right) ds,\ 0 \le t \le T.$$

С учетом обозначений отсюда получим первую априорную оценку

$$\|u_m\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2 + \int_\Gamma K(x,t)|u_m|^\sigma d\Gamma \le$$
$$\le \left( M_1\left(1 + \|u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2\right) + \frac{M_2 c_0^* t^\alpha}{\alpha} \right) +$$
$$+[cb_1 M_2 \Gamma(\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^t E_{\alpha,1}\left( [cb_1 M_2 \Gamma(\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}} (t-s)^\alpha \right) \times$$
$$\times \left( M_1\left(1 + \|u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2\right) + \frac{M_2 c_0^* s^\alpha}{\alpha} \right) ds \le C_3,\ 0 \le t \le T < \infty,$$

где $C_3$ постоянная не зависит от $m \in N$.

Вторую априорную оценку, выводим аналогично как для случая $2 < p < \dfrac{2n}{n-2},\ n \ge 3$. Оценим каждую слагаемую правой части соотношения (3.15), применяя неравенства Юнга (1.1), Гёльдера (1.3) и лемму 3.4.1, получим

$$\left| -\int_\Omega \nabla u_m D_{0,t}^\alpha \nabla u_m \right| \le \frac{1}{2}\left\| D_{0,t}^\alpha \nabla u_m \right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2.$$

$$\left| -\int_\Gamma K(x,t)|u_m|^{\sigma-2} u_m D_{0,t}^\alpha u_m d\Gamma \right| \le K_1 \int_\Gamma |D_{0,t}^\alpha u_m|\,|u_m|^{\sigma-1} d\Gamma \le$$

$$\le K_1 \left( \int_\Gamma |u_m|^{\frac{2(n-1)(\sigma-1)}{n}} d\Gamma \right)^{\frac{n}{2(n-1)}} \left( \int_\Gamma \left|D_{0,t}^\alpha u_m\right|^{\frac{2(n-1)}{n-2}} d\Gamma \right)^{\frac{n-2}{2(n-1)}} \le$$

$$\le K_1 C_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} C_3^{\sigma-1}\left(\left\|D_{0,t}^{\alpha}u_m\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|\nabla D_{0,t}^{\alpha}u_m\right\|_{2,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le K_1^2 C_1^{\frac{2(\sigma-1)}{\sigma}} C_3^{2(\sigma-1)}+\frac{1}{4}\left(\left\|D_{0,t}^{\alpha}u_m\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|\nabla D_{0,t}^{\alpha}u_m\right\|_{2,\Omega}^2\right),$$

где $2<\sigma<\dfrac{2(n-1)}{n-2},\ n\ge 3.$

$$\left|\int_{\Omega} b(x,t)\left|u_m\right|^{p-2}u_m D_{0,t}^{\alpha}u_m dx\right|\le b_1\int_{\Omega}\left|u_m\right|^{p-1}D_{0,t}^{\alpha}u_m dx\le b_1\left(\int_{\Omega}\left|u_m\right|^{2(p-1)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}\left|D_{0,t}^{\alpha}u_m\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le b_1\left\|u_m\right\|_{2,\Omega}\left\|D_{0,t}^{\alpha}u_m\right\|_{2,\Omega}\le b_1 C_1^{\frac{1}{2}}\left\|D_{0,t}^{\alpha}u_m\right\|_{2,\Omega}\le b_1^2 C_1+\frac{1}{4}\left\|D_{0,t}^{\alpha}u_m\right\|_{2,\Omega},$$

где $1<p\le 2,\ n\ge 3$.
Подставляя эти неравенства в тождество (3.15), получим:

$$\left\|D_{0,t}^{\alpha}u_m\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|D_{0,t}^{\alpha}u_m\right\|_{2,\Omega}^2\le C_4,$$

для всех $t\in[0,T]$.

Как и ранее, умножая равенств (3.7) на $d_j(t)\in C[0,T]$ и просуммируем обе части полученного тождества по $j=\overline{1,m}$ и в силу вышеприведенных рассуждений, получим (3.21) почти всюду $t\in[0,T]$.

Отсюда, как и при доказательстве теоремы 3.2.1, получим доказательство теоремы 3.4.1.

### 3.5 Единственность глобального обобщенного решения задачи $K$ (3.1)-(3.3) при $1<p\le 2$

Поступая также, как и в случае $2<p<\dfrac{2n}{n-2},\ n\ge 3,$ докажем справедливость следующей теоремы:

**Теорема 3.5.1**. Пусть выполнены $1<p\le 2,\ n\ge 3$. Тогда для любой функции $u_0(x)\in W_2^1(\Omega),$ на интервале $(0,T)$ существует единственное обобщенное решение задачи $K$ (3.1)-(3.3).

**Доказательство.** Поступая, также как и в доказательстве теоремы 2 полагая, что задача $K$ (3.1)-(3.3) имеет два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда для разности $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ получим тождество (3.22), для любой функции

$\omega(x,t)\in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$. Так как $\omega(x,t)\in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$, полагая $\omega(x,t)=u(x,t)$, имеем (3.23).

Далее применяя следующие известные неравенства

$$\begin{gathered}\left|(|u_1|^q u_1-|u_2|^q u_2)(u_1-u_2)\right|\geq|u_1-u_2|^{q+2}, \qquad q>0,\\ \left(\left|u_1\right|^{p-2}u_1-\left|u_2\right|^{p-2}u_2,\, u_1-u_2\right)\leq\gamma(p)\left|u_1-u_2\right|^p,\ \ 1<p\leq 2.\end{gathered} \tag{3.29}$$

Оценим правую часть (3.23), с учетом неравенства (3.29), имеем

$$\left|\int_\Omega b(x,\tau)(\left|u_1\right|^{p-2}u_1-\left|u_2\right|^{p-2}u_2)udx\right|\leq b_1\gamma(p)\left\|u\right\|_{p,\Omega}^p\leq cb_1\gamma(p)\left(1+\left\|u\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|\nabla u\right\|_{2,\Omega}^2\right). \tag{3.30}$$

В силу (3.30) и леммы 1.2, тогда из (3.23) получим

$$\begin{gathered}D_{0,t}^\alpha\int_\Omega\left[\left|u\right|^2+\left|\nabla u\right|^2\right]dx+C_0\int_\Omega\left[\left|u\right|^2+\left|\nabla u\right|^2\right]dx+\\ +K_0\int_\Gamma\left|u\right|^\sigma d\Gamma\leq 2cb_1\gamma(p)\left(1+\left\|u\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|\nabla u\right\|_{2,\Omega}^2\right),\end{gathered} \tag{3.31}$$

где $C_0=\min\left\{2c_0^*;2\right\}$.

Представим неравенство (3.31) в виде

$$\begin{gathered}D_{0,t}^\alpha\left(1+\left\|u\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|\nabla u\right\|_{2,\Omega}^2\right)+C_0\left(1+\left\|u\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|\nabla u\right\|_{2,\Omega}^2\right)\leq\\ \leq C_0+2cb_1\gamma(p)\left(1+\left\|u\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|\nabla u\right\|_{2,\Omega}^2\right),\end{gathered}$$

или же

$$\begin{gathered}D_{0,t}^\alpha\left(1+\left\|u\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|\nabla u\right\|_{2,\Omega}^2\right)+C_0\left(1+\left\|u\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|\nabla u\right\|_{2,\Omega}^2\right)\leq\\ \leq(C_0+2cb_1\gamma(p))\left(1+\left\|u\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|\nabla u\right\|_{2,\Omega}^2\right).\end{gathered}$$

Обозначим через $y(t)\equiv 1+\left\|u_m(x,t)\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|\nabla u_m(x,t)\right\|_{2,\Omega}^2$, тогда последнее неравенство запишется в виде

$$D_{0,t}^\alpha y(t)+C_0y(t)\leq(2cb_1\gamma(p)+C_0)y(t).$$

Отсюда получим

$$y(t) \le E_{\alpha,1}(-C_0 t^\alpha) y(0) + (C_0 + 2cb_1\gamma(p)) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-C_0(t-s)^\alpha) y(s) ds, \quad (3.32)$$

В неравенстве (3.32) применяя (1.6) и (1.7), получим

$$y(t) \le M_1 y(0) + (C_0 + 2cb_1\gamma(p)) M_2 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds.$$

Из последнего, с учетом вышеприведенного обозначения имеем

$$\begin{gathered} 1 + \|u_m(x,t)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_m(x,t)\|_{2,\Omega}^2 \le M_1 \left(1 + \|u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2\right) + \\ + C_1 M_2 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(1 + \|u_m(x,s)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_m(x,s)\|_{2,\Omega}^2\right) ds. \end{gathered} \quad (3.33)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$U(t) \equiv \sup_{s\in[0,t]} \left( \|u_m(x,s)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_m(x,s)\|_{2,\Omega}^2 \right).$$

Тогда из неравенства (3.33) мы получим следующее неравенство

$$1 + U(t) \le M_1 + C_1 M_2 \frac{t^\alpha}{\alpha} + C_1 M_2 \frac{t^\alpha}{\alpha} U(t). \quad (3.34)$$

Ясно, что при $M_1 + C_1 M_2 \frac{t^\alpha}{\alpha} < 1,\ M_1 < 1,\quad C_1 M_2 \frac{t^\alpha}{\alpha} < 1,$ т.е. $t < t_1,\ M_1 < 1,$ где $t_1^\alpha = \min\left\{ \frac{\alpha}{C_1 M_2}; \frac{\alpha(1-M_1)}{C_1 M_2} \right\},$ то неравенство (3.34) имеет место, тогда и только тогда, когда $U(t) = 0$ при $t \le t_1$. Но тогда из (3.33) получим такое неравенство

$$1 + U(t_2) \le M_1 + C_1 M_2 \frac{t_2^\alpha - t_1^\alpha}{\alpha} + C_1 M_2 \frac{t_2^\alpha - t_1^\alpha}{\alpha} U(t_2),$$

которое при условиях

$$M_1 + C_1 M_2 \frac{t_2^\alpha - t_1^\alpha}{\alpha} < 1, \quad C_1 M_2 \frac{t_2^\alpha - t_1^\alpha}{\alpha} < 1, \text{ т.е. } t_2^\alpha < 2t_1^\alpha,$$

имеет место, тогда и только тогда, когда $U(t)=0$ при $t \le t_2$. Продолжая эту процедуру, мы в итоге получим, что

$$U(t)=0 \text{ при } t \in [0,T],$$

которое влечет $\int_\Omega (|u|^2 + |\nabla u|^2)dx = 0$ почти всюду на временном интервале $[0,T]$, что означает единственность слабого обобщенного решения. Таким образом, единственность обобщенного решения задачи $K$ (3.1)-(3.3) доказана.

### 3.6 Разрешимость задачи с нелинейными граничными условиями для одного варианта псевдопараболического уравнения дробного порядка

Как и ранее, рассмотрим в цилиндре $Q_T = \{(x,t): x \in \Omega, \Omega \subset R^n, 0 < t < T\}$ начально-краевую задачу для уравнения (3.1) в предположении что коэффициент $b(x,t) = -q(x,t)$

$$D^\alpha_{0,t}\left(u - \Delta u\right) - \Delta u + c(x,t)u + q(x,t)|u|^{p-2}u = 0, \tag{3.35}$$

здесь $q(x,t)$ - заданная функция. Относительно коэффициентов уравнения (3.35) предположим выполнены следующие условия:

$$\begin{gathered} c(x,t) \ge c_0^* > 0,\ 0 < q_0 \le q(x,t) \le q_1,\ \forall (x,t) \in Q_T, \\ |D^\alpha_{0,t} q(x,t)| \le q_2,\ 0 < K_0 \le K(x,t) \le K_1,\ \forall (x,t) \in Q_T. \end{gathered} \tag{3.36}$$

**Задача** $K_q$. Найти решение уравнения (3.35), удовлетворяющее условиям (3.2)-(3.3).

Аналогично, как и в подразделе 2, с учетом $b(x,t) = -q(x,t)$ определяется понятие слабого обобщенного решения задачи $K_q$.

**Теорема 3.6.1.** Пусть выполняются условия (3.36) и $1 \le p \le \dfrac{2n}{n-2}, 1 \le \sigma \le \dfrac{2(n-1)}{n-2}, n \ge 3$. Тогда для любой функции $u_0(x) \in W_2^1(\Omega)$ почти всюду на интервале $(0,T)$ существует слабое обобщенное решение $u(x,t)$ задачи $K_q$.

**Доказательство.** Поступая также, как и в пункте 3.2, приближенное решение задачи $K_q$, будем искать в виде (3.6). В этом случае $\upsilon_{mk}(t)$ находится из системы:

$$\sum_{k=1}^{m} D_{0,t}^{\alpha}\upsilon_{mk}(t)\int_{\Omega}\left\{\Psi_k\Psi_j dx+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\Psi_{\mathrm{k}}}{\partial x_i}\frac{\partial\Psi_j}{\partial x_i}\right\}dx+\int_{\Omega}c(x,t)u_m\Psi_j dx+\int_{\Omega}\nabla u_m\nabla\Psi_j dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\upsilon_{mk}\int_{\Gamma}K(x,t)|u_m|^{\sigma-2}\Psi_k\Psi_j d\Gamma+\sum_{k=1}^{m}\upsilon_{mk}\int_{\Omega}q(x,t)|u_m|^{p-2}\Psi_k\Psi_j dx=0, \tag{3.37}$$

с условиями (3.8)-(3.9).

Введем обозначения

$$\vec{\upsilon}_m=\left\{\upsilon_{1m}(t),\ldots,\upsilon_{mm}(t)\right\}^T,\ \vec{\alpha}\equiv\left\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\right\}^T,$$

$$a_{kj}=\int_{\Omega}\left[\Psi_k\Psi_j+\left(\nabla\Psi_{\mathrm{k}}\nabla\Psi_{\mathrm{j}}\right)\right]dx$$

$$C_{kj}=\int_{\Omega}c(x,t)\Psi_k\Psi_j dx+\int_{\Omega}\nabla\Psi_k\nabla\Psi_j dx,$$

$$q_{kj}=-\int_{\Gamma}K(x,t)|u_m|^{\sigma-2}\Psi_k\Psi_j d\Gamma-\int_{\Omega}q(x,t)|u_m|^{p-2}\Psi_k\Psi_j dx,$$

$$A_m\equiv\left\{a_{jk}\right\},\ \vec{C}_m\equiv\left\{C_{jk}\right\},\ \vec{F}_m(\vec{\upsilon}_m)\equiv\left\{q_{jk}(\vec{\upsilon}_m)\right\}\vec{\upsilon}_m.$$

Тогда система уравнений (3.8) и (3.37) принимает матричный вид

$$A_m D_{0,t}^{\alpha}\vec{\upsilon}_m+\vec{C}_m\vec{\upsilon}_m=-\vec{F}_m(\vec{\upsilon}_m),\ \vec{\upsilon}_m(0)=\vec{\alpha}.$$

Умножим обе части (3.37) на $\upsilon_{mj}(t)$ и просуммируем по $j=\overline{1,m}$. В результате получим:

$$\int_{\Omega}\left\{u_m D_{0,t}^{\alpha}u_m dx+\nabla u_m D_{0,t}^{\alpha}\nabla u_m\right\}dx+\int_{\Omega}|\nabla u_m|^2 dx+\int_{\Omega}c(x,t)|u_m|^2 dx+$$
$$+\int_{\Gamma}K(x,t)|u_m|^{\sigma}d\Gamma+\int_{\Omega}q(x,t)|u_m|^p dx=0.$$

Применяя лемму 1.2 и условие (3.36), получим неравенство

$$\frac{1}{2}D_{0,t}^{\alpha}\int_{\Omega}\left\{|u_m|^2+|\nabla u_m|^2\right\}dx+\int_{\Omega}|\nabla u_m|^2 dx+c_0^*\int_{\Omega}|u_m|^2 dx+$$
$$+K_0\int_{\Gamma}|u_m|^{\sigma}d\Gamma+q_0\int_{\Omega}|u_m|^p dx\le 0. \tag{3.38}$$

Из неравенства (3.38) следует

$$D_{0,t}^{\alpha} y(t) + C_0 y(t) \le 0$$

$$y(0) = y_0 = \|u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2$$

где $C_0 = \min\left\{2c_0^*; 2\right\}$, $y(t) = \|u_m(x,t)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_m(x,t)\|_{2,\Omega}^2$.

Теперь пусть $\overline{y}(t)$ – решение следующей задачи Коши:

$$D_{0,t}^{\alpha} \overline{y}(t) + C_0 \overline{y}(t) = 0,$$

$$\overline{y}(0) = \overline{y}_0 = \|u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2,$$

Решение этой задачи можно записать в явном виде

$$\overline{y}(t) = E_{\alpha,1}(-C_0 t^{\alpha}) y(0).$$

Так как выполняется неравенство $y(t) \le \overline{y}(t)$, а также с учетом (1.6), получим

$$y(t) \le E_{\alpha,1}(-C_0 t^{\alpha}) y(0) \le \frac{M_1 y(0)}{1 + C_0 t^{\alpha}}$$

Тем самым показано

$$\|u_m(x,t)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u_m(x,t)\|_{2,\Omega}^2 \le \frac{M_1\left(\|u(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla u(x,0\|_{2,\Omega}^2\right)}{1 + C_0 t^{\alpha}} \le C_1, \ \forall t \ge 0.$$

Теперь умножим равенство (3.37) на $D_{0,t}^{\alpha} \upsilon_{mj}(t)$ и просуммируем по $j = \overline{1,m}$. В результате получим

$$\begin{gathered} \left\|D_{0,t}^{\alpha} u_m\right\|_{2,\Omega}^2 + \left\|\nabla D_{0,t}^{\alpha} u_m\right\|_{2,\Omega}^2 = \\ = -\int_{\Omega} \nabla u_m D_{0,t}^{\alpha} \nabla u_m dx - \int_{\Omega} c(x,t) u_m D_{0,t}^{\alpha} u_m dx - \\ -\int_{\Gamma} K(x,t) |u_m|^{\sigma-2} u_m D_{0,t}^{\alpha} u_m d\Gamma - \int_{\Omega} q(x,t) |u_m|^{p-2} u_m D_{0,t}^{\alpha} u_m dx. \end{gathered} \tag{3.39}$$

Правая часть тождества (3.39), оценивается аналогично как (3.15). Таким образом, из тождества (3.39) получим

$$\left\|D_{0,t}^{\alpha}u_m\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|\nabla D_{0,t}^{\alpha}u_m\right\|_{2,\Omega}^2\le C_4,$$

для всех $t\in(0,T)$.

Далее доказательство теоремы 3.6.1 завершается также, как и доказательство теоремы 3.4.1.

## 3.7 Единственность слабого обобщенного решения задачи $K_q$

**Теорема 3.7.1.** Пусть выполняются $u_0(x)\in W_2^1(\Omega),\ p>1,\ n\ge 3.$ Тогда слабое обобщенное решение задачи $K_q$ (3.35), (3.2), (3.3) на интервале $(0,T)$ единственно.

**Доказательство.** Предположим, что задача $K_q$ (3.35), (3.2), (3.3) имеет два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда их разность $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ удовлетворяет условию $u(x,0)=0$ и тождеству

$$\int_{\Omega}\left(D_{0,t}^{\alpha}u\cdot\omega+\sum_{i=1}^{n}D_{0,t}^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x_i}+c(x,t)u\omega\right)dx+\int_{\Gamma}K(x,t)\left(|u_1|^{\sigma-2}u_1-|u_2|^{\sigma-2}u_2\right)\omega d\Gamma+$$
$$+\int_{\Omega}q(x,t)\left(|u_1|^{p-2}u_1-|u_2|^{p-2}u_2\right)\omega dx=0,$$

в силу того, что $\omega(x,t)\in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$, то в качестве $\omega(x,t)$ можно взять $u(x,t)$, т.е. положим $\omega(x,t)=u(x,t)$:

$$\int_{\Omega}\left(D_{0,t}^{\alpha}u\cdot u+\sum_{i=1}^{n}D_{0,t}^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x,t)\,|\,u\,|^2\right)dx+$$
$$+\int_{\Gamma}K(x,t)|u|^{\sigma-2}\left(|u_1|^{\sigma-2}u_1-|u_2|^{\sigma-2}u_2\right)ud\Gamma+\int_{\Omega}q(x,t)\left(|u_1|^{p-2}u_1-|u_2|^{p-2}u_2\right)udx=0 \tag{3.40}$$

Применяя в неравенство (3.29) и лемму 1.2, из (3.40) получим дифференциальное неравенство

$$D_{0,t}^{\alpha}\int_{\Omega}\left[|u|^2+|\nabla u|^2\right]dx+C_0\int_{\Omega}\left[|u|^2+|\nabla u|^2\right]dx+K_0\int_{\Gamma}|u|^{\sigma}dx+q_0\int_{\Omega}|u|^{p}dx\le 0, \tag{3.41}$$

где $C_0=\min\left\{2c_0^*;2\right\}$.

Неравенство (3.41) можно записать в виде

$$D_{0,t}^{\alpha}\int_{\Omega}\left[|u|^2+|\nabla u|^2\right]dx+C_0\int_{\Omega}\left[|u|^2+|\nabla u|^2\right]dx\le 0.$$

Из последнего неравенства следует

$$D_{0,t}^{\alpha}y(t)+C_0y(t)\le 0,$$
$$y(0)=\|u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2+\|\nabla u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2=0,$$

где $y(t)\equiv\|u_m(x,t)\|_{2,\Omega}^2+\|\nabla u_m(x,t)\|_{2,\Omega}^2$.

Теперь пусть $\overline{y}(t)$ – решение следующей задачи Коши:

$$D_{0,t}^{\alpha}\overline{y}(t)+C_0\overline{y}(t)=0,$$
$$\overline{y}(0)=\|u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2+\|\nabla u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2=0, \tag{3.42}$$

решение этой задачи можно записать в явном виде

$$\overline{y}(t)=E_{\alpha,1}(-C_0t^{\alpha})y(0).$$

Так как выполняется неравенство $y(t)\le\overline{y}(t),$ в силу оценки (1.6), получим

$$y(t)\le E_{\alpha,1}(-C_0t^{\alpha})y(0),\ t\ge 0,$$

которое в силу (3.42) влечет единственность слабого обобщенного решения задачи $K_q$ (3.35), (3.2), (3.3). Теорема 3.7.1. доказана.

## 3.8 Начально-краевая задача для нагруженного псевдо-параболического уравнения

В этом подразделе исследуется нагруженное уравнение по пространственной переменной для линейного псевдопараболического уравнения с начальным и вторым краевым условием (условие Неймана). Поставленная задача сводится к нагруженному уравнению с нелокальным краевым условием. Разрешимость этой нелокальной задачи доказывается методом продолжения по параметру. Используя метод продолжения по параметру разрешимость ряда локальных и нелокальных задач для неклассических уравнений математической физики установлена в работах [69], [73], [75]-[80]. Отметим, что исследованию вопросов однозначной разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений с операторами дробного интегро-дифференцирования посвящены работы [23], [70], [81]-[84]. Нагруженными уравнениями активно занимались такие ученые как Нахушев А.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. [85]-[87].

Рассмотрим в прямоугольной области $Q_T=\{x\in(0,1);\, t\in[0,T]\}$ нагруженное псевдопараболическое уравнение

$$D_{0,t}^{\alpha}u-D_{0,t}^{\alpha}u_{xx}-u_{xx}+cu=f(x,t)+b_1(x,t)D_{0,t}^{\alpha}u_{xx}(0,t)+b_2(x,t)u_{xx}(0,t),\quad 0<x<1,\ \ 0<t<T, \tag{3.43}$$

с начальным

$$u(x,0)=0,\ 0\le x\le 1, \tag{3.44}$$

и краевыми условиями

$$u_x(0,t)=0,\, u_x(1,t)=0,\ 0\le t\le T, \tag{3.45}$$

где $D_{0,t}^{\alpha}$ – дробная производная Капуто порядка $0<\alpha\le 1$, $f(x,t)$, $b_i(x,t)(i=0,1,2)$ и $u_0(x)$ заданные функции, $c$ – постоянная.

**Теорема 3.8.1.** Пусть выполняются включения $f(x,t), f_{xx}(x,t)\in L_2(Q_T)$, $f_x(0,t),\ f_x(1,t)\in C[0,T],\, b_1(x,t),b_2(x,t)\in C^2(Q_T)$. Кроме того, пусть выполняются условия

$$1-\frac{3}{\varepsilon_1}\left(b_{10}^2(t)+b_{11}^2(t)\right)-\frac{\bar b_{11}^2+\bar b_{22}^2}{2c\varepsilon_1}-4c\varepsilon_1-3\bar b_{11}^2\ge K_0>0,\ \ t\in[0,T], \tag{3.46}$$

где $\bar b_{11}=\max\limits_{(x,t)\in D}b_{1xx}(x,t),\, \bar b_{22}=\max\limits_{(x,t)\in D}b_{2xx}(x,t),\ 0<\varepsilon_1<\dfrac{1-3\bar b_{11}^2}{4c}$.

Тогда существует решение $u(x,t)$ нелокальной задачи (3.43)-(3.45) такое, что $u, D_{0,t}^{\alpha}u, D_{0,t}^{\alpha}u_{xx}, u_{xx}\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$.

Полученное решение мы будем называть регулярным, так как оно удовлетворяет уравнению (3.43) почти всюду в $Q_T$, а начальные и граничные значения принимаются в обычном смысле.

**Доказательство.** Дважды продифференцируем уравнение (3.43) по $x$:

$$D_{0,t}^{\alpha}u_{xx}-D_{0,t}^{\alpha}u_{xxxx}-u_{xxxx}+cu_{xx}=f_{xx}(x,t)+b_{1xx}(x,t)D_{0,t}^{\alpha}u_{xx}(0,t)+b_{2xx}(x,t)u_{xx}(0,t).$$

Введем обозначение $v(x,t)=u_{xx}(x,t)$, тогда последнее соотношение принимает вид:

$$\begin{aligned}&D_{0,t}^{\alpha}v(x,t)-D_{0,t}^{\alpha}v_{xx}(x,t)-v_{xx}(x,t)+cv(x,t)=\\&=f_{xx}(x,t)+b_{1xx}(x,t)D_{0,t}^{\alpha}v(0,t)+b_{2xx}(x,t)v(0,t).\end{aligned}\tag{3.47}$$

Теперь продифференцируем уравнение (3.43) по $x$ и применим условие (3.45):

$$\begin{aligned}&D_{0,t}^{\alpha}u_x(0,t)-D_{0,t}^{\alpha}u_{xxx}(0,t)-u_{xxx}(0,t)+c(t)u_x(0,t)=\\&=f_x(0,t)+b_{1x}(0,t)D_{0,t}^{\alpha}u_{xx}(0,t)+b_{2x}(0,t)u_{xx}(0,t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&D_{0,t}^{\alpha}u_x(1,t)-D_{0,t}^{\alpha}u_{xxx}(1,t)-u_{xxx}(1,t)+c(t)u_x(1,t)=\\&=f_x(1,t)+b_{1x}(1,t)D_{0,t}^{\alpha}u_{xx}(1,t)+b_{2x}(1,t)u_{xx}(0,t).\end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$f_0(t)=f_x(0,t),\ \ f_1(t)=f_x(1,t),$$

$$b_{10}(t)=b_{1x}(0,t),\ b_{20}(t)=b_{2x}(0,t),$$

$$b_{11}(t)=b_{1x}(1,t),\ b_{21}(t)=b_{2x}(1,t).$$

Перепишем данные тождества с учетом введенных обозначений:

$$\begin{aligned}D_{0,t}^{\alpha}v_x(0,t)+v_x(0,t)=-f_0(t)-b_{10}(t)D_{0,t}^{\alpha}v(0,t)-b_{20}(t)v(0,t)\\D_{0,t}^{\alpha}v_x(1,t)+v_x(1,t)=-f_1(t)-b_{11}(t)D_{0,t}^{\alpha}v(0,t)-b_{21}(t)v(0,t)\end{aligned}\tag{3.48}$$

Начальное условие определяется из условия (3.44)

$$v(x,0)=0.\tag{3.49}$$

Далее, будут использоваться следующие известные неравенства [79]

$$\upsilon(y,t)\le\delta_0\int_0^1\upsilon_x^2(x,t)dx+\frac{4}{\delta_0}\int_0^1\upsilon^2(x,t)dx\,,$$

$$\left|D_{0,t}^{\alpha}\upsilon(y,t)\right|^2\le\delta_0\int_0^1\left|D_{0,t}^{\alpha}\upsilon_x(x,t)\right|^2dx+\frac{4}{\delta_0}\int_0^1\left|D_{0,t}^{\alpha}\upsilon(x,t)\right|^2dx,\tag{3.50}$$

$$\left|D_{0,t}^{\alpha}\upsilon_x(y,t)\right|^2\le\delta_0\int_0^1\left|D_{0,t}^{\alpha}\upsilon_{xx}(x,t)\right|^2dx+\frac{4}{\delta_0}\int_0^1\left|D_{0,t}^{\alpha}\upsilon_x(x,t)\right|^2dx,$$

Умножим обе части (3.47) на $D_{0,t}^{\alpha}v - D_{0,t}^{\alpha}v_{xx} - v_{xx}$ и проинтегрируем по $x$ от 0 до 1:

$$\int_0^1 \left[ D_{0,t}^{\alpha}v - D_{0,t}^{\alpha}v_{xx} - v_{xx} + cv \right](D_{0,t}^{\alpha}v - D_{0,t}^{\alpha}v_{xx} - v_{xx})dx =$$

$$= \int_0^1 f_{xx}(D_{0,t}^{\alpha}v - D_{0,t}^{\alpha}v_{xx} - v_{xx})dx + \int_0^1 \left[ b_{1xx}D_{0,t}^{\alpha}v(0,t) + b_{2xx}v(0,t) \right](D_{0,t}^{\alpha}v - D_{0,t}^{\alpha}v_{xx} - v_{xx})dx. \tag{3.51}$$

Выполняя интегрирование по частям и подставив преобразованные интегралы в тождество (3.51), получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
&\left\| D_{0,t}^{\alpha}v \right\|_{2,\Omega}^2 + 2\left\| D_{0,t}^{\alpha}v_x \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| D_{0,t}^{\alpha}v_{xx} \right\|^2 + \left\| v_{xx} \right\|^2 + D_{0,t}^{\alpha}\left( \left\| v_{xx} \right\|^2 + (1+c)\left\| v_x \right\|^2 \right) + c\left\| v_x \right\|^2 \le \\
&\le \int_0^1 f_{xx} \cdot D_{0,t}^{\alpha}v dx + \int_0^1 b_{1xx}(x,t)D_{0,t}^{\alpha}v(0,t) \cdot D_{0,t}^{\alpha}v dx + \int_0^1 b_{2xx}(x,t)v(0,t) \cdot D_{0,t}^{\alpha}v dx - \\
&- \int_0^1 f_{xx}D_{0,t}^{\alpha}v_{xx}dx - \int_0^1 \left[ b_{1xx}D_{0,t}^{\alpha}v(0,t) + b_{2xx}v(0,t) \right] D_{0,t}^{\alpha}v_{xx}dx - \\
&- \int_0^1 f_{xx}v_{xx}dx - \int_0^1 \left[ b_{1xx}D_{0,t}^{\alpha}v(0,t) + b_{2xx}v(0,t) \right] v_{xx}dx - \\
&- cv(1,t)\left[ f_1(t) + b_{11}(t)D_{0,t}^{\alpha}v(0,t) + b_{21}(t)v(0,t) \right] + \\
&+ cv(0,t)\left[ f_0(t) + b_{10}(t)D_{0,t}^{\alpha}v(0,t) + b_{20}(t)v(0,t) \right].
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Оценим правую часть неравенства (3.52), используя неравенства (3.50) и неравенство Юнга (1.1), получим

$$\left| -cv(1,t)\left( f_1(t) + b_{11}(t)D_{0,t}^{\alpha}v(0,t) + b_{21}(t)v(0,t) \right) \right| \le$$

$$\le \frac{c\varepsilon_2}{2}\left| D_{0,t}^{\alpha}v(1,t) \right|^2 + \frac{c}{2\varepsilon_2}\left( f_1(t) + b_{11}(t)D_{0,t}^{\alpha}v(0,t) + b_{21}(t)v(0,t) \right)^2 \le$$

$$\le \frac{c\varepsilon_2}{2}\left| D_{0,t}^{\alpha}v(1,t) \right|^2 + \frac{3c}{2\varepsilon_2}\left( f_1^2(t) + b_{11}^2(t) \,|\, D_{0,t}^{\alpha}v(0,t) \,|^2 + b_{21}^2(t) \,|\, v(0,t) \,|^2 \right) \le$$

$$\le \left( \frac{c\varepsilon_2\delta_0}{2} + \frac{3c\delta_0}{2\varepsilon_2}b_{11}^2(t) \right)\int_0^1 \left| D_{0,t}^{\alpha}v_x(x,t) \right|^2 dx +$$

$$+\left(\frac{2c\varepsilon_2}{\delta_0}+\frac{6cb_{11}^2(t)}{\varepsilon_2\delta_0}\right)\int_0^1\left|D_{0,t}^{\alpha}v(x,t)\right|^2dx+$$

$$+\frac{3c\delta_0}{2\varepsilon_2}b_{21}^2(t)\int_0^1\left|v_x(x,t)\right|^2dx+\frac{6cb_{21}^2(t)}{\varepsilon_2\delta_0}\int_0^1\left|v(x,t)\right|^2dx+\frac{3c}{2\varepsilon_2}f_1^2(t),$$

$$\left|-cv(0,t)\left(f_0(t)+b_{10}(t)D_{0,t}^{\alpha}v(0,t)+b_{20}(t)v(0,t)\right)\right|\le$$

$$\le\left(\frac{\varepsilon_2c\delta_0}{2}+\frac{3c\delta_0}{2\varepsilon_2}b_{10}^2(t)\right)\int_0^1\left|D_{0,t}^{\alpha}v_x(x,t)\right|^2dx+$$

$$+\left(\frac{2c\varepsilon_2}{\delta_0}+\frac{6cb_{10}^2(t)}{\varepsilon_2\delta_0}\right)\int_0^1\left|D_{0,t}^{\alpha}v(x,t)\right|^2dx+$$

$$+\frac{3c\delta_0}{2\varepsilon_2}b_{20}^2(t)\int_0^1\left|v_x(x,t)\right|^2dx+\frac{6cb_{20}^2(t)}{\varepsilon_2\delta_0}\int_0^1\left|v(x,t)\right|^2dx+\frac{3c}{2\varepsilon_2}f_0^2(t),$$

$$\left|\int_0^1 f_{xx}D_{0,t}^{\alpha}v\,dx\right|\le\frac{1}{4\varepsilon_3}\|f_{xx}\|^2+\varepsilon_3\left\|D_{0,t}^{\alpha}v\right\|^2,$$

$$\left|b_{1xx}(x,t)D_{0,t}^{\alpha}v(0,t)\cdot D_{0,t}^{\alpha}v\,dx\right|\le$$

$$\le\frac{\overline{b}_{11}^2}{4\varepsilon_4}\int_0^1\left|D_{0,t}^{\alpha}v\right|^2dx+\varepsilon_4\delta_0\int_0^1\left|D_{0,t}^{\alpha}v_x\right|^2dx+\frac{4\varepsilon_4}{\delta_0}\int_0^1|D_{0,t}^{\alpha}v|^2\,dx,$$

$$\left|b_{2xx}(x,t)v(0,t)\cdot D_{0,t}^{\alpha}v\,dx\right|\le\frac{\overline{b}_{22}^2}{4\varepsilon_4}\int_0^1\left|D_{0,t}^{\alpha}v\right|^2dx+\varepsilon_4\delta_0\int_0^1\left|v_x\right|^2dx+\frac{4\varepsilon_4}{\delta_0}\int_0^1|v|^2\,dx,$$

$$\left|\int_0^1 f_{xx}D_{0,t}^{\alpha}v_{xx}\,dx\right|\le\frac{1}{4\varepsilon_5}\|f_{xx}\|^2+\varepsilon_5\left\|D_{0,t}^{\alpha}v_{xx}\right\|^2,$$

$$\left|b_{1xx}(x,t)D_{0,t}^{\alpha}v(0,t)\cdot D_{0,t}^{\alpha}v_{xx}\,dx\right|\le$$

$$\le\varepsilon_6\int_0^1\left|D_{0,t}^{\alpha}v_{xx}\right|^2dx+\frac{\overline{b}_{11}^2\delta_0}{4\varepsilon_6}\int_0^1\left|D_{0,t}^{\alpha}v_x\right|^2dx+\frac{\overline{b}_{11}^2}{\varepsilon_6\delta_0}\int_0^1|D_{0,t}^{\alpha}v|^2\,dx,$$

$$\left|b_{2xx}(x,t)v(0,t)\cdot D_{0,t}^{\alpha}v_{xx}\,dx\right|\le\varepsilon_7\int_0^1\left|D_{0,t}^{\alpha}v_{xx}\right|^2dx+\frac{\overline{b}_{22}^2\delta_0}{4\varepsilon_7}\int_0^1\left|v_x\right|^2dx+\frac{\overline{b}_{22}^2}{\varepsilon_7\delta_0}\int_0^1|v|^2\,dx,$$

$$\left|\int_0^1 f_{xx}v_{xx}dx\right| \le \frac{1}{2}\|f_{xx}\|^2 + \frac{1}{2}\|v_{xx}\|^2,$$

$$\left|b_{1xx}(x,t)D_{0,t}^{\alpha}v(0,t)\cdot v_{xx}dx\right| \le$$

$$\le \frac{\bar{b}_{11}^2\delta_0}{4\varepsilon_8}\int_0^1 |v_{xx}|^2\,dx + \varepsilon_8\delta_0\int_0^1 \left|D_{0,t}^{\alpha}v_x\right|^2 dx + \frac{4\varepsilon_8}{\delta_0}\int_0^1 |\,D_{0,t}^{\alpha}v\,|^2\,dx,$$

$$\left|b_{2xx}(x,t)v(0,t)\cdot v_{xx}dx\right| \le \frac{\bar{b}_{22}^2}{4\varepsilon_9}\int_0^1 |v_{xx}|^2\,dx + \varepsilon_9\delta_0\int_0^1 |v_x|^2\,dx + \frac{4\varepsilon_9}{\varepsilon_9}\int_0^1 |\,v\,|^2\,dx.$$

Тогда неравенство (3.52), запишется в виде

$$\left(1 - \frac{6c}{\varepsilon_2\delta_0}\left(b_{10}^2(t) + b_{11}^2(t)\right) - \varepsilon_3 - \frac{\bar{b}_{11}^2 + \bar{b}_{22}^2}{4\varepsilon_4} - \frac{4\varepsilon_4}{\delta_0} - \frac{\bar{b}_{11}^2}{4\varepsilon_6\delta_0} - \frac{4\varepsilon_8}{\delta_0}\right)\left\|D_{0,t}^{\alpha}v\right\|_{2,\Omega}^2 +$$

$$+\left(2 - \frac{3\delta_0 c}{2\varepsilon_2}\left(b_{10}^2(t) + b_{11}^2(t)\right) - \varepsilon_4\delta_0 - \frac{\bar{b}_{11}^2\delta_0}{4\varepsilon_6} - \varepsilon_8\delta_0\right)\left\|D_{0,t}^{\alpha}v_x\right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2}\|v_{xx}\|^2 +$$

$$+(1 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7)\left\|D_{0,t}^{\alpha}v_{xx}\right\|^2 + \frac{1}{2}D_{0,t}^{\alpha}\left(\|v_{xx}\|^2 + (1+c)\|v_x\|^2 + \|v\|^2\right) + c\|v_x\|^2 \le$$

$$\le \left(\frac{3\delta_0 c}{2\varepsilon_2}\left(b_{20}^2(t) + b_{21}^2(t)\right) + (c\varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_9)\delta_0 + \frac{\bar{b}_{22}^2\delta_0}{4\varepsilon_7}\right)\|v_x\|^2 +$$

$$+\left(\frac{6c}{\varepsilon_2\delta_0}\left(b_{20}^2(t) + b_{21}^2(t)\right) + \frac{4(c\varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_9)}{\delta_0} + \frac{\bar{b}_{22}^2}{\varepsilon_7\delta_0}\right)\|v\|^2 +$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{\bar{b}_{11}^2}{\varepsilon_8} + \frac{\bar{b}_{22}^2}{\varepsilon_9}\right)\|v_{xx}\|^2 + \frac{3c}{2\varepsilon_2}\left(f_0^2(t) + f_1^2(t)\right) + \frac{1}{4}\left(2 + \frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_5}\right)\|f_{xx}\|^2.$$

Положим $\varepsilon_5 = \varepsilon_6 = \varepsilon_7 = \frac{1}{6},\ \varepsilon_3 = \frac{1}{2},\ \varepsilon_4 = \varepsilon_6 = \varepsilon_8 = \varepsilon_2 = c\varepsilon_1,\ \delta_0 = 4,$ получим

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{\varepsilon_1}\left(b_{10}^2(t) + b_{11}^2(t)\right) - \frac{\bar{b}_{11}^2 + \bar{b}_{22}^2}{2c\varepsilon_1} - 4c\varepsilon_1 - 3\overline{b_{11}}^2\right)\left\|D_{0,t}^{\alpha}v\right\|_{2,\Omega}^2 +$$

$$2\left(1 - \frac{3}{\varepsilon_1}\left(b_{10}^2(t) + b_{11}^2(t)\right) - \frac{\bar{b}_{11}^2 + \bar{b}_{22}^2}{2c\varepsilon_1} - 4c\varepsilon_1 - 3\bar{b}_{11}^2\right)\left\|D_{0,t}^{\alpha}v_x\right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2}\|v_{xx}\|^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left\|D_{0,t}^{\alpha}v_{xx}\right\|^2+\frac{1}{2}D_{0,t}^{\alpha}\left(\left\|v_{xx}\right\|^2+(1+c)\left\|v_x\right\|^2+\left\|v\right\|^2\right)+c\left\|v_x\right\|^2\leq$$

$$\leq\left(\frac{3\delta_0 c}{2\varepsilon_2}\left(b_{20}^2(t)+b_{21}^2(t)\right)+(c\varepsilon_2+\varepsilon_4+\varepsilon_9)\delta_0+\frac{\overline{b}_{22}^2\delta_0}{4\varepsilon_7}\right)\left\|v_x\right\|^2+$$

$$+\left(\frac{6c}{\varepsilon_2\delta_0}\left(b_{20}^2(t)+b_{21}^2(t)\right)+\frac{4(c\varepsilon_2+\varepsilon_4+\varepsilon_9)}{\delta_0}+\frac{\overline{b}_{22}^2}{\varepsilon_7\delta_0}\right)\left\|v\right\|^2+$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{\overline{b}_{11}^2}{\varepsilon_8}+\frac{\overline{b}_{22}^2}{\varepsilon_9}\right)\left\|v_{xx}\right\|^2+\frac{3c}{2\varepsilon_2}\left(f_0^2(t)+f_1^2(t)\right)+\frac{1}{4}\left(2+\frac{1}{\varepsilon_3}+\frac{1}{\varepsilon_5}\right)\left\|f_{xx}\right\|^2.$$

При выполнении условии теоремы получим неравенство

$$D_{0,t}^{\alpha}\left(\left\|v_{xx}\right\|^2+(1+c)\left\|v_x\right\|^2+\left\|v\right\|^2\right)+C_0\left(\left\|v_{xx}\right\|^2+(1+c)\left\|v_x\right\|^2+\left\|v\right\|^2\right)\leq$$

$$\leq C_1+C_2\left(\left\|v_{xx}\right\|^2+(1+c)\left\|v_x\right\|^2+\left\|v\right\|^2\right).$$

Применяя лемму 1.4. (Гроноулла-Беллмана), получаем справедливость следующей оценки

$$\underset{t\in(0,T)}{vrai\max}\left(\left\|v_{xx}\right\|^2+\left\|v_x\right\|^2+\left\|v\right\|^2\right)\leq C_3,\ \text{для всех}\ 0\leq t\leq T<\infty. \tag{3.53}$$

Из соотношения (3.51), учитывая условие теоремы и оценку (3.53) получим еще одну оценку

$$\underset{t\in(0,T)}{vrai\max}\left(\left\|D_{0,t}^{\alpha}v\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|D_{0,t}^{\alpha}v_x\right\|_{2,\Omega}^2+\left\|D_{0,t}^{\alpha}v_{xx}\right\|^2\right)\leq C_4,\ \text{для всех}\ 0\leq t\leq T<\infty. \tag{3.54}$$

Обозначим через

$$V_2^{\alpha}\left(Q_T\right)=\left\{u:u,D_{0,t}^{\alpha}u,u_x,D_{0,t}^{\alpha}u_x,u_{xx},D_{0,t}^{\alpha}u_{xx}\in L_{\infty}\left(0,T;L_2(\Omega)\right)\right\}.$$

Разрешимость задачи (3.47)-(3.49) доказывается с помощью метода продолжения по параметру.

Рассмотрим однопараметрическое семейство краевых задач: найти функцию $v(x,t)$, являющуюся в области $Q_T$ решением уравнения

$$\begin{aligned}L_{\lambda}v\equiv D_{0,t}^{\alpha}v-D_{0,t}^{\alpha}v_{xx}-v_{xx}+cv(x,t)=f_{xx}(x,t)+\\+\lambda\left[b_{1xx}(x,t)D_{0,t}^{\alpha}v(0,t)+b_{2xx}(x,t)v(0,t)\right],\end{aligned} \tag{3.55}$$

краевого условия

$$\begin{aligned} &D_{0,t}^{\alpha}v_x(0,t)+v_x(0,t)=-\lambda\left[f_0(t)+b_{10}(t)D_{0,t}^{\alpha}v(0,t)+b_{20}(t)v(0,t)\right],\\ &D_{0,t}^{\alpha}v_x(1,t)+v_x(1,t)=-\lambda\left[f_1(t)+b_{11}(t)D_{0,t}^{\alpha}v(1,t)+b_{21}(t)v(1,t)\right], \end{aligned} \tag{3.56}$$

и начального условия

$$v(x,0)=0. \tag{3.57}$$

Обозначим через $A_\lambda=\{\lambda\in[0,1]\}$ множество всех чисел отрезка $[0,1]$, для которых задача (3.55)-(3.57) однозначно разрешима в пространстве $V_2^{\alpha}(Q_T)$ при произвольных $f_0(t), f_1(t),\ b_{10}(t),b_{11}(t),\ b_{20}(t),b_{21}(t),\ f(x,t), f_{xx}(x,t),\ b_1(x,t),b_2(x,t),$ $f_x(0,t), f_x(1,t)$, удовлетворяющих условиям теоремы 3.8.1.

При $\lambda=0$ получим начально-краевую задачу в области $Q_T$ для линейного псевдопараболического уравнения:

$$D_{0,t}^{\alpha}v-D_{0,t}^{\alpha}v_{xx}-v_{xx}+cu(x,t)=f_{xx}(x,t), \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned} &D_{0,t}^{\alpha}v_x(0,t)+v_x(0,t)=0,\\ &D_{0,t}^{\alpha}v_x(1,t)+v_x(1,t)=0, \end{aligned} \tag{3.59}$$

**Теорема 3.8.2.** Пусть выполнены условия теоремы 3.8.1, тогда существует единственное регулярное решение $v\in V_2^{\alpha}(Q_T)$.

**Доказательство.** Существование решения докажем с помощью метода Галеркина. Приближенные решения $v^N(x,t)$ ищем в виде

$$v^N(x,t)=\sum_{j=1}^{N}C_{Nj}(t)\psi_j(x), \tag{3.60}$$

где $\psi_j(x)$ – собственные функции краевой задачи

$$\begin{cases} \psi_j''(x)+\lambda_j\psi_j(x)=0,\\ \quad \psi_j'=0,\quad \psi_j'=0. \end{cases}$$

Известно [77], что эти функции плотны в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(0,1) \cap W_2^2(0,1)$. Неизвестные коэффициенты $C_{Nj}(t)$ определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^{N}\int_0^1 \left( D_{0,t}^{\alpha} C_{NK}(t)\cdot\psi_k\psi_j - D_{0,t}^{\alpha} C_{NK}(t)\cdot\psi_k''\psi_j - C_{NK}(t)\cdot\psi_k''\psi_j + c\cdot C_{NK}(t)\cdot\psi_k\psi_j \right)dx =$$

$$= \int_0^1 f_{xx}(x,t)\psi_j(x)dx,\ j=1,2,...,N, \tag{3.61}$$

с начальными условиями

$$v^N(x,0) = v^N(0) = v_0^N = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{Ni}\cdot\psi_i(x). \tag{3.62}$$

Решение линейной задачи Коши (3.61)-(3.62) существует для любого конечного интервала $(0,T)$, для сходимости сумм (3.60) нужны априорные оценки решений $u^N$.

Умножим уравнение (3.61) на $\lambda_j C_{Nj}(t) + \lambda_j D_{0,t}^{\alpha} C_{Nj}(t) + D_{0,t}^{\alpha} C_{Nj}(t)$ и просуммируем по $j=1,2,...,N,$ тогда получим

$$\begin{aligned} &\left\| D_{0,t}^{\alpha} v^N \right\|_{2,\Omega}^2 + 2\left\| D_{0,t}^{\alpha} v_x^N \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| D_{0,t}^{\alpha} v_{xx}^N \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| v_{xx}^N \right\|_{2,\Omega}^2 + \\ &+ D_{0,t}^{\alpha}\left( \left\| v_{xx}^N \right\|_{2,\Omega}^2 + (1+c)\left\| v_x^N \right\|_{2,\Omega}^2 \right) + c\left\| v_x^N \right\|_{2,\Omega}^2 \le \\ &\le \int_0^1 f_{xx} D_{0,t}^{\alpha} v^N dx - \int_0^1 f_{xx} D_{0,t}^{\alpha} v_{xx}^N dx - \int_0^1 f_{xx} v_{xx}^N dx, \end{aligned} \tag{3.63}$$

из которой следует оценка

$$\left\| v^N(x,t) \right\|_{V_2^{\alpha}(Q_T)} \le C_5. \tag{3.64}$$

Из оценки (3.64) следует ограниченность последовательности приближенных решений $\left\{ v^N(x,t) \right\}$ в пространстве $V_2^{\alpha}\left(Q_T\right)$. Поскольку все производные, входящие в уравнение (3.61) квадратично суммируемы по области $Q_T$, то можно выбрать подпоследовательность $\left\{ v^{N_k} \right\}$ и перейти к пределу по $N$ при $k \to \infty$ в системе (3.61). Предельная функция принадлежит пространству $V_2^{\alpha}\left(Q_T\right)$. Поскольку система $\left\{ \psi_j(x) \right\}$ плотна в $L_2(0,1)$, получим, что на предельной функции $v(x,t)$ уравнение (3.58) удовлетворяется почти всюду в $Q_T$. Тем самым, существование регулярного решения задачи (3.58), (3.59), (3.57) доказано.

Единственность решения задачи (3.58), (3.59), (3.57) доказывается стандартным образом, от противного, пусть существуют два решения $v_1(x,t)$ и $v_2(x,t)$, их разность обозначим через $v(x,t)=v_1(x,t)-v_2(x,t)$. Из уравнения (3.58) и условий (3.59) и (3.57) имеем

$$D_{0,t}^{\alpha}v-D_{0,t}^{\alpha}v_{xx}-v_{xx}+cv=0,$$

$$D_{0,t}^{\alpha}v_x(0,t)+v_x(0,t)=0,$$

$$D_{0,t}^{\alpha}v_x(1,t)+v_x(1,t)=0,$$

$$v(x,0)=0.$$

Как и при получении неравенства (3.63), находим

$$\left\|D_{0,t}^{\alpha}v\right\|_{2,\Omega}^{2}+2\left\|D_{0,t}^{\alpha}v_x\right\|_{2,\Omega}^{2}+\left\|D_{0,t}^{\alpha}v_{xx}\right\|_{2,\Omega}^{2}+\left\|v_{xx}\right\|_{2,\Omega}^{2}+$$
$$+D_{0,t}^{\alpha}\left(\left\|v_{xx}\right\|_{2,\Omega}^{2}+(1+c)\left\|v_x\right\|_{2,\Omega}^{2}\right)+c\left\|v_x\right\|_{2,\Omega}^{2}\le 0,$$

откуда следует $\left\|v_{xx}\right\|_{2,\Omega}^{2}+(1+c)\left\|v_x\right\|_{2,\Omega}^{2}\le 0$, тогда $v(x,t)=0,$ то есть, $v_1(x,t)=v_2(x,t)$ в $Q_T$.

Тем самым, теорема 3.8.2 доказана полностью.

Из оценок (3.53) и (3.54) вытекает, что множество $A_\lambda$ замкнуто, а из теоремы 2 следует, что $0\in A_\lambda$. Теперь покажем, что $A_\lambda$ – открытое множество. Пусть при $\lambda=\lambda_0$ задача (3.55)-(3.57) разрешима. Покажем, что она разрешима при $\lambda=\lambda_0+\overline{\lambda},$ где $\overline{\lambda}>0$:

$$\begin{gathered}L_{\lambda_0}v\equiv D_{0,t}^{\alpha}v-D_{0,t}^{\alpha}v_{xx}-v_{xx}+cv(x,t)-\lambda_0\left[b_{1xx}(x,t)D_{0,t}^{\alpha}v(0,t)+b_{2xx}(x,t)v(0,t)\right]=\\=f_{xx}(x,t)+\overline{\lambda}\left[b_{1xx}(x,t)D_{0,t}^{\alpha}v(0,t)+b_{2xx}(x,t)v(0,t)\right]=F(x,t),\end{gathered}\tag{3.65}$$

$$D_{0,t}^{\alpha} v_x(0,t) + v_x(0,t) + \lambda_0 \Big[ f_0(t) + b_{10}(t) D_{0,t}^{\alpha} v(0,t) + b_{20}(t) v(0,t) \Big] =$$
$$= \overline{\lambda} \Big[ f_0(t) + b_{10}(t) D_{0,t}^{\alpha} v(0,t) + b_{20}(t) v(0,t) \Big] = \Phi_1(t),$$
$$\tag{3.66}$$
$$D_{0,t}^{\alpha} v_x(0,t) + v_x(0,t) + \lambda_0 \Big[ f_1(t) + b_{11}(t) D_{0,t}^{\alpha} v(0,t) + b_{21}(t) v(1,t) \Big] =$$
$$= \overline{\lambda} \Big[ f_1(t) + b_{11}(t) D_{0,t}^{\alpha} v(0,t) + b_{21}(t) v(0,t) \Big] = \Phi_2(t),$$

Возьмем произвольную функцию $\omega(x,t) \in V^{\alpha}(Q_T)$ и подставим в правую часть (3.65) и (3.66).

Обозначим через

$$B = \{ v : v \in L_{\infty}(0,T; L_2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)), D_{0,t}^{\alpha} v \in L_{\infty}(0,T; L_{\infty}(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)), v(x,0) = 0,$$
$$\|v\|_B \equiv \|v\|_{L_{\infty}(0,T; L_2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega))} + \left\| D_{0,t}^{\alpha} v \right\|_{L_{\infty}(0,T; L_2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega))} \le R \},$$

$$B_1 = \Big\{ U : \|U\|_{V_2^{\alpha}(Q_T)} \le R, U(x,0) = 0 \Big\};$$

где $B_1 \subset B,$ $R$ связано с константой из (3.54), т.е., $2c \le R.$

$$F(x,t) \equiv f_{xx}(x,t) + \overline{\lambda} \Big[ b_{1xx}(x,t) D_{0,t}^{\alpha} \omega(o,t) + b_{2xx}(x,t) \omega(0,t) \Big] \in L_2(Q_T),$$
$$\Phi_1(t) \equiv \overline{\lambda} \Big[ f_0(t) + b_{10}(t) D_{0,t}^{\alpha} \omega(0,t) + b_{20}(t) \omega(0,t) \Big] \in L_2(Q_T),$$
$$\Phi_2(t) \equiv \overline{\lambda} \Big[ f_1(t) + b_{11}(t) D_{0,t}^{\alpha} \omega(0,t) + b_{21}(t) \omega(0,t) \Big] \in L_2(Q_T).$$

Так как при $\lambda_0 \in A_{\lambda}$ существует единственное решение задачи (3.65), (3.66), (3.57) и можно считать, что $v = K(\omega) \in V_2^{\alpha}(Q_T),$ причем из (3.53) и (3.54) следует

$$\|v\|_{V_2^{\alpha}(Q_T)} = \|K(\omega)\|_{V_2^{\alpha}(Q_T)} \le C + C_1(R, \overline{\lambda}, T) \le R. \tag{3.67}$$

Выберем $\overline{\lambda}$ так, чтобы $C_1\Big(R, \overline{\lambda}, T\Big) \le C.$

Покажем, что оператор $K$ является сжимающим. Для этого рассмотрим пару решений $v_1, v_2 \in B_1 : v = v_1 - v_2$, $v = K(\omega_1) - K(\omega_2)$, $\omega_1, \omega_2 \in B,$ $\omega = \omega_1 - \omega_2$,

$$S\omega \equiv D_{0,t}^{\alpha} v - D_{0,t}^{\alpha} v_{xx} - v_{xx} + cv(x,t) - \lambda_0 \Big[ b_{1xx}(x,t) D_{0,t}^{\alpha} v(0,t) + b_{2xx}(x,t) v(0,t) \Big] =$$
$$= \overline{\lambda} \Big[ b_{1xx}(x,t) D_{0,t}^{\alpha} \omega(0,t) + b_{2xx}(x,t) \omega(0,t) \Big], \tag{3.68}$$

Как при выводе оценки (3.53) и (3.54) можно показать, что

$$\|v\|_{V_2^{\alpha}(Q_T)} = \bar{\lambda} C \|\omega\|_B ,$$

Выбирая $\bar{\lambda} > 0$ таким малым, чтобы имело место неравенство $q = \bar{\lambda} C < 1$,

$$\|v\|_{V_2^{\alpha}(Q_T)} = \|v_1 - v_2\|_{V_2^{\alpha}(Q_T)} = \|K\omega_1 - K\omega_2\|_{V_2^{\alpha}(Q_T)} \le q\|\omega_1 - \omega_2\|_B . \qquad (3.69)$$

Тогда из (3.67) и (3.69) следует, что существует $\bar{\lambda} > 0$ такое, что уравнение $v = K\omega$ однозначно разрешимо и существует элемент $v_0 \in B_1 \Rightarrow v_0 = K\omega_0$. Ясно, что этот элемент будет удовлетворять $L_{\lambda_0 v_0} = F$ и условиям (3.66) и (3.57), т.е., $A_{\lambda}$ – открытое множество. Тогда по теореме о методе продолжения по параметру следует разрешимость задачи (3.47)-(3.49) при $\lambda = 1$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам диссертационного исследования можно сделать следующие выводы:

Первый раздел диссертационной работы посвящен кратким общим сведениям, в которых приведены основные функциональные пространства, неравенства, известные вспомогательные леммы и теоремы, служащие инструментами для проведения исследований.

Во втором разделе для квазилинейного псевдопараболического уравнения дробного порядка в цилиндрической области рассмотрена начально-краевая задача с линейным граничным условием, где доказана теорема о существовании слабого решения задачи для случаев положительных постоянных степеней $p$ и $q$:

$I$ случай, когда $0 < q \le 1,\ 2 < p < \dfrac{2N}{N-2}$, для всех $N \ge 3$;

$II$ случай, когда $1 \le q \le 1 + \dfrac{2}{N},\ 2 < p < \dfrac{2N}{N-2}$, для всех $N \ge 3$.

При доказательстве теоремы были применены приближения Галеркина, априорные оценки, известные алгебраические и функциональные неравенства. Методом соболевских вложений, а также с использованием теоремы Реллиха-Кондрашова, леммы Гронуолла-Беллмана и метода компактности доказана единственность слабого решения задачи для случая $II$. Проведен анализ разрушения решения задачи, и доказано его отсутствие (разрушение) когда само решение стремится к бесконечности при $t \to T^*$ на некотором множестве $\Omega$ значений $x$, точнее, когда соответствующий интеграл $\int_\Omega |u(x,t)| \psi_1 dx$ стремится к бесконечности. Для следующих случаев степеней $p$ и $q$:

$III$ случай, когда $0 < q \le 1,\ 1 < p \le 2$, для всех $N \ge 3$;

$IV$ случай, когда $1 \le q \le 1 + \dfrac{2}{N},\ 1 < p \le 2$, для всех $N \ge 3$

рассмотрено и доказано существование решения задачи для любого конечного времени $t$. Также в данном разделе исследована глобальная разрешимость начально-краевой задачи и доказана теорема о существовании слабого обобщенного решения задачи. Наряду с этим, изучено асимптотическое поведение решения, показано, что решение задачи на бесконечности по времени $t$ убывает как $\dfrac{1}{t^\alpha}$.

В третьем разделе доказана разрешимость начально-краевых задач для квазилинейного псевдопараболического уравнения дробного порядка с достаточно гладкой границей. Особенностью данной задачи является то, что нелинейность присутствует как в самом уравнений, так и граничном условии, которое задано в виде нелинейного условия с оператором дробного дифференцирования Капуто. Основным результатом вышеназванного раздела служит доказательство локальной или глобальной разрешимости сформулированных задач в зависимости от параметров уравнения. Наряду с этим, для одного варианта псевдопараболического уравнения дробного порядка доказаны теоремы существования и единственности глобального решения начально-краевой задачи с нелинейными граничными условиями. Также в данном разделе рассматривается и доказывается разрешимость начально-краевой задачи для нагруженного уравнения соболевского типа с дробной производной Капуто.

Полученные результаты в дальнейшем могут быть полезны в теории исследований квазилинейных дифференциальных уравнений Соболева с операторами дробного интегро-дифференцирования. Также по достигнутым результатам исследования можно проводить вычислительные эксперименты для получения численных значений решений, построить их визуализацию.

Результаты, полученные в ходе выполнения диссертационного исследования опубликованы в 4 работах, из них 2 [88, 89] изданы в высокорейтинговых международных журналах, входящих в первый квартиль по данным Journal Citation Reports компании Clarivate Analytics и/или имеющих показатель процентиль по CiteScore в базе данных Scopus не менее 80, 2 тезиса [90, 91] в сборниках результатов международных конференций.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1 Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. – 1954. Т. 18, № 1. – С. 3–50.

2 Showalter R.E. The Sobolev type equations I // Appl. Anal. – 1975. – Vol. 5, № 1. – P. 15–22.

3 Showalter R.E. The Sobolev type equations II // Appl. Anal. – 1975. – Vol. 5, № 2. – P. 81–99.

4 Корпусов М.О., Свешников А.Г. Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики // Журнал вычислительной и математической физики. – 2003. Т. 43, № 12. – С. 1765–97.

5 Корпусов М.О., Свешников А.Г. Разрушение решений нелинейных уравнений типа Соболева с кубическими источниками // Дифференциальные уравнения. – 2006. Т. 42, №3. – С.404–415.

6 Рубинштейн, Л.И. К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Известия АН СССР, сер. геогр. – 1948. – Т. 12, № 1. – С. 27–45.

7 Чудновский, А.Ф. Теплофизика почв. – М.: Наука, 1976. – С.353

8 Hallaire M. Le potentiel efficace de l’eau dans le sol en regime de dessechement. L’Eau et la Production Vegetale. – Paris: Institut National de la Recherche Agronomique, 1964. – P. 27–62.

9 Баренблат Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, №5. – С. 852–864.

10 Benjamin T.B, Bona J.L, Mahony J.J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos Trans R Soc Lond. A. Math. and Phys. Sci. – 1972. – Vol. 272, № 1220. – P. 47–78.

11 Benjamin T.B. Lectures on Nonlinear Wave Motion. Lecture Notes in Applied Mathematics. – 1974. – Vol. 15. – P. 3–47.

12 Ting T.W. Certain non-steady flows of second-order fluids // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1963. – Vol. 14. – P. 1–26.

13 Albert J.P, Bona J.L, Saut J-C. Model equations for waves in stratified fluids // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1961. – Vol. 1997, № 453. – P. 1233–60.

14 Padron V. Effect of aggregation on population recovery modeled by a forward– backward pseudoparabolic equation // Trans. Am. Math. Soc. – 2004. – Vol. 356, № 7. – P.2739–2756.

15 Showalter R.E., Ting T.W. Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM J. Math. Anal. – 1970. – Vol. 1, № 1. – P. 1-26.

16 Bestokov M.Kh. Boundary value problems for a pseudoparabolic equation with the Caputo fractional derivative // Differ. Equ. – 2019. – Vol. 55, № 7. – P. 884–893. Transl. Differ. Uravn. – 2019. – Vol. 55, № 7. – P. 919–928.

17 Tuan N.A., Regan D.O., Baleanu D., Tuan N.H. On time fractional pseudo-parabolic equations with nonlocal integral conditions // Evolution Equations and Control Theory. – 2022. – Vol. 11, № 1.

18 Sousa C.V.J., de Oliveira C.E. Fractional order pseudoparabolic partial differential equation: Ulam-Hyers stability // Bull. Braz. Math. Soc., New Series. – 2019. – Vol. 50, № 2. – P. 393–420.

19 Korpusov M.O, Sveshnikov A.G. Blow-up of solutions of a Sobolev-type equation with a nonlocal source // Sib. Mat. Zh. – 2005. – Vol. 46, № 3. – P. 567–578.

20 Bouziani, A. Solvability of nonlinear pseudoparabolic equation with a nonlocal boundary condition // Nonlinear Anal. – 2003. – Vol. 55. – P. 883–904.

21 Xu R., Su J. Global existence and finite time blow-up for a class of semilinear pseudo-parabolic equations // Journal of Functional Analysis. – 2013. – Vol. 264. – P. 2732–2763.

22 Ting T.W. Parabolic and pseudoparabolic partial differential equations // J. Math. Soc. Japan. – 1969. – Vol. 21, № 3. – P. 440–453.

23 Berdyshev A., Cabada A., Karimov E., On the existence of eigenvalues of a boundary value problem with transmitting condition of the integral form for a parabolic-hyperbolic equation // Mathematics. – 2020. – Vol. 8 (6), No 1030 p.

24 Gopala Rao V.R, Ting T.W. Solutions of pseudo-heat equations in the whole space // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1972. – Vol. 49. – P. 57–78.

25 Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа, М.: Физматлит, 2007. – 736 с.

26 Brill H., A semilinear Sobolev evolution equation in a Banach space // J. Differential Equations. – 1977. – Vol. 24. – P. 412–425.

27 David C, Jet W. Asymptotic behaviour of the fundamental solution to the equation of heat conduction in two temperatures // J. Math. Anal. Appl. – 1979. – Vol. 69. – P. 411–8.

28 Ngoc T.B, Zhou Y., O'Regan D., Tuan N.H. On a terminal value problem for pseudoparabolic equations involving Riemann-Liouville fractional derivatives // Appl. Math. Lett. – 2020. – Vol. 106, № 106373.

29 Liao M, Guo B, Li Q. Global existence and energy decay estimates for weak solutions to the pseudo-parabolic equation with variable exponents // Math. Meth. Appl. Sci. – 2020. – Vol. 43, №25. – P. 16–27.

30 Zhu X, Guo B, Liao M. Global existence and blow-up of weak solutions for a pseudoparabolic equation with high initial energy // Appl. Math. Lett. – 2020. – Vol. 104. – 106270.

31 Luan W, Yang Z. Global existence and bounds for blow-up time in a class of nonlinear pseudo-parabolic equations with a memory term // Math. Meth. Appl. Sci. – 2019. – Vol. 42. – P. 2597–2612.

32 Beshtokov M. Kh. To boundary-value problems for degenerating pseudoparabolic equations with Gerasimov-Caputo fractional derivative // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. – 2018. – Vol. 10. – P. 3–16.

33 Beshtokov M. Kh. Boundary-value problems for loaded pseudoparabolic equations of fractional order and difference methods of their solving. Russian Mathematics. Springer. – 2019. – Vol. 63, № 2. – P. 1–10.

34 Таукенова, Ф.И., Шхануков-Лафишев М.Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2006. Т. 46, № 10. – С. 1871-1881.

35 Debnath L. Recent applications of fractional calculus to science and engineering // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – Vol. 2003, № 54. – P. 3413–3442.

36 Podlubny I. Fractional differential equations. Mathematics in science and engineering. – San, Diego, CA: Academic Press Inc, 1999. – 340 p.

37 Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – С. 688.

38 Agarwal R.P, Baleanu D., Nieto J.J, Torres D. F.M, Zhou Y. A survey on fuzzy fractional differential and optimal control nonlocal evolution equations // J. Comput. Appl. Math. – 2018. – Vol. 339. – P. 3–29.

39 Kilbas A.A, Srivastava H.M, Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland mathematics studies. Elsevier, Amsterdam. – 2006. – Vol. 204.

40 Zhou Y. Basic theory of fractional differential equations. – Singapore: World Scientific, 2014. – 304 c.

41 Jin L., Li L., Fang Sh. The global existence and time-decay for the solutions of the fractional pseudo-parabolic equation // Comput. Math. Appl. – 2017. – Vol. 73. – P. 2221–2232.

42 Seki K., Wojcik M., Tachiya M. Fractional reaction-diffusion equation // J. Chem. Phys. – 2003. – Vol. 119, № 4. – P. 2165.-2170,

43 Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение, М: Физматлит, 2003. – 272 с.

44 Berdyshev A. S., Cabada A., Turmetov B. Kh., On solvability of some boundary value problem for polyharmonic equation with boundary operator of a fractional order // Applied Mathematical Modelling. – 2015. – Vol. 39, № 15. P. 4548–4569.

45 Berdyshev A.S., Aitzhanov S.E., Zhumagul G.O. Solvability of Pseudoparabolic Equations with Non-linear boundary Condition // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41, № 9. – P. 1772–1783.

46 Korpusov M. O, Sveshnikov A. G. Blow-up of solutions of a Sobolev-type equation with a nonlocal source // Sib. Mat. Zh. – 2005. – Vol. 46, № 3. – P. 567–578.

47 Wang X., Xu R. Global existence and finite time blow-up for a nonlocal semilinear pseudo-parabolic equation // Adv. Nonlinear Anal. – 2021. – Vol. 10. – P. 261 l–288.

48 Khompysh K. Pseudoparabolic equations with variable exponents and coefficients: blow-up and large time behaviors // Appl. Anal. – 2021. 2003342.

49 Alsaedi A, Kirane M, Torebek BT. Blow-up of smooth solutions of the time-fractional burgers equation // Quaest. Math. – 2020. – Vol. 43, № 2. – P. 185–192.

50 Mitidieri E, Pokhozhaev SI. A priori estimates and blow-up of solutions of nonlinear partial differential equations and inequalities // Proc. Steklov Inst. Math. – 2001. – Vol. 234. – P. 1–362.

51 Alsaedi A., Ahmad B., Kirane M., Torebek B.T. Blowing-up solutions of the timefractional dispersive equations // Adv. Nonlinear Anal. – 2021. – Vol. 10, № 1. – P. 952–971.

52 Макаров П.А., Разрушение решения начально-краевой задачи для обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным граничным условием // Математические заметки. – 2012. – Т. 92, № 4. – С. 567–582.

53 Alshin A.B., Korpusov M.O. Sveshnikov A.G. Blow-up in Nonlinear Sobolev Type. – Walter de Gruyter Co.: Berlin, 2011. – P. 648.

54 Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. – Springer-Verlag, Berlin: Heidelberg, 1981. – 353 p.

55 Zennir K., Dridi H., Alodhaibi S., Alkhalaf S. Nonexistence of global solutions for coupled system of pseudoparabolic equations with variable exponents and weak memories // J. Funct. Spaces. – 2021. Vol. 2021. – 5573959..

56 Binh, H.D., Hoang, L.N., Baleanu, D., Van Ho, T.K. Continuity Result on the Order of a Nonlinear Fractional Pseudo-Parabolic Equation with Caputo Derivative // Fractal Fract. – 2021. – Vol. 5, № 41.

57 Tuan, N. H., Huynh, L. N., Ngoc, T. B., & Zhou, Y. On a backward problem for nonlinear fractional diffusion equations // Applied Mathematics Letters. – 2019. – Vol. 92. – P. 76-84.

58 Kochubei, A.N., Diffusion of fractional order // Differ. Equations. – 1990. – Vol. 26, № 4. – P. 485–492.

59 Demidenko G.V., Uspenskii S.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest-order derivative. – N.-Y.: Basel, – Hong Kong: Marcel Dekker, 2003. – 632 p.

60 Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Москва: Наука, 1972. – 257 с.

61 Шогенов В.Х., Шхануков-Лафишев М.Х., Бештоев Х.М. Дробные производные: интерпретация и некоторые применения в физике – Дубна: Сообщения объединенного института ядерных исследований, 1997.

62 Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. – London: Imperial College Press, 2010. – 368 p.

63 Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – Москва; Наука, 1987. – 483 с.

64 Корпусов М.О., Свешников А.Г. О разрушении решения уравнения типа Соболева с нелокальным источником // Сиб. Мат. Журнал. – 2005. – Т. 46, № 3. – С. 567–578.

65 Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. On the relaxation effect in finite time of solving a nonlinear pseudoparabolic equation // J. Comput. Math. Math. Phys. – 2011. – Vol. 51, № 3. – P. 407–435.

66 Tuan N.H, Baleanu D, Thach T.N, O'Regan D. N. H. Final value problem for nonlinear time fractional reaction–diffusion equation with discrete data // J. Comput. Appl. Math. – 2020. – Vol. 376, № 112883.

67 Abbas S., Benchohra M. Upper and lower solutions method for impulsive partial hyperbolic differential equations with fractional order // Nonlinear Anal. Hybrid Syst. – 2010. – Vol. 4, № 3. – P. 406–413.

68 H.M. Srivastava, A. Fernandez, D. Baleanu, Some new fractional-calculus connections between Mittag–Leffler functions // Mathematics. – 2019. – Vol. 7, № 6. – 485 с.

69 Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1968. – 736 с.

70 Алиханов А.А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 5. – С. 660-666.

71 Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

72 Корпусов М.О., Панин А.А. Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу. – Т. 2. Специальные пространства. – М.: Физфак, 2016. – 259 с.

73 Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – С. 496.

74 Butler G., Rogers T. A Generalization of Lemma of Bihari and Applications to Pointwise Estimates for Integral Equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1971. –Vol. 33. –P. 77–81.

75 Бубнов Б.А. Общие краевые задачи для уравнения Кортевега-де Фриза в ограниченной области // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15, №1. – С. 26–31.

76 Бубнов Б.А. Разрешимость в целом нелинейных граничных задач для уравнения Кортевега-де Фриза в ограниченной области // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т. 16, №1. – С. 34–41.

77 Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: Гостехиздат, 1939.

78 Ларькин Н.А., Новиков В.А., Яненко Н.Н. Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск: Наука, 1983. – 270 с.

79 Телешева Л. А. Обратная задача для параболических уравнений высокого порядка: случай неизвестного коэффициента, зависящего от времени // Вестник БГУ. Математика и информатика. – 2010. – №9. – С. 175-182.

80 Телешева Л.А. О разрешимости обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка с неизвестным коэффициентом при производной по времени // Матем. заметки ЯГУ. – 2011. – Т. 18, № 2. – С. 180-201.

81 Berdyshev A.S., Cabada A., Turmetov B.K. On solvability of a boundary value problem for a nonhomogeneous biharmonic equation with a boundary operator of a fractional order // Acta Mathematica Scientia. – 2014. – Vol. 34, № 6. – P. 1695–1706.

82 Berdyshev A.S., Eshmatov B.E., Kadirkulov B.J. Boundary value problems for fourth-order mixed type equation with fractional derivative // Electronic Journal of Differential Equations. – 2016. Vol. 2016.

83 Berdyshev A.S., Birgebaev A.B., Cabada A. // Boundary Value Problems. – 2017. – Vol. 2017, № 1.

84 Бердышев А.С. Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного параболо-гиперболического и смешанно-составного типов. – Алматы: КазНПУ им. Абая, Институт информационных и вычислительных технологий, 2015. – 224 с.

85 Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. – М.: Наука, 2012. – 232 с.

86 Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. – Алматы, 1995. – 270 с.

87 Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. – Алматы: Ғылым, 2010. – 334 с.

88 Aitzhanov SE, Berdyshev AS, Bekenayeva KS. Solvability issues of a pseudo-parabolic fractional order equation with a nonlinear boundary condition // Fractal Fract. – 2021. – Vol. 5, № 134. – P. 1–17.

89 Aitzhanov S.E., Kusherbayeva U.R., Bekenayeva K.S. Solvability of pseudoparabolic equation with Caputo fractional derivative // Chaos, Solitons and Fractals – 2022, – Vol 160. – P. 1–10.

90 Aitzhanov S.E., Berdyshev A.S., Bekenayeva K.S. Boundary value problems for pseudo-parabolic equation with fractional order derivatives // Absrtacts of the Uzbekistan-Malaysia conference “Computational models and technologies (CMT-2022)”. – September 16-17th, 2022, Tashkent. – P.142–143.

91 Бекенаева К.С., Байшемиров Ж.Д. Разрешимость уравнения Соболева с дробной производной Капуто // Тезисы докладов международной научной конференции. – 6-8 октября, 2022 г., Ташкент. – С.78–79.